SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Solutions de l'équation de Poisson dans le cas récurrent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 251-269
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__251_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

SOLUTIONS DE L'EQUATION DE POISSON DANS LE CAS RECURRENT

par P.A.Meyer

Cet exposé fait suite à celui qui traite du " schéma de remplissage" d'après ROST, mais il en est presque indépendant : l'emploi que l'on y fait du schéma de remplissage se rapproche beaucoup plus des idées d' ORNSTEIN et de METIVIER.

Le but de l'exposé est le suivant : étant donné un noyau P sur un espace d'états E, récurrent au sens de HARRIS, résoudre l'équation de Poisson du côté des mesures

$$\mu-\mu P = \theta$$

pour une classe de mesures bornées θ de masse nulle aussi large que possible. On impose traditionnellement à θ de satisfaire à une condition de support, de manière à obtenir des solutions μ bornées et de masse nulle. Nous adoptons ici un point de vue différent : nous résolvons d'abord l'équation de Poisson pour <u>toutes</u> les mesures bornées de masse nulle, au moyen du schéma de remplissage. Les solutions construites ne sont pas bornées, mais σ-finies. Plus précisément, nous montrons qu'elles appartiennent à une classe de mesures que les mathématiciens rencontrent de plus en plus fréquemment : les " mesures de sécurité"(*) ou " mesures policées" . Enfin, nous montrons que deux solutions policées de l'équation de Poisson diffèrent d'un multiple de la mesure invariante du processus.

Cet exposé n'existerait pas si S.OREY et A.BRUNEL ne m'avaient pas communiqué, l'un son cours polycopié de l'Université de Minnesota , l' autre son excellent exposé de Rennes sur les différentes classes d' ensembles bornés. Je les en remercie vivement tous deux.

I. RAPPELS

NOTATIONS. $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace d'états abstrait. La tribu $\underline{\underline{E}}$ est séparable. P est un noyau markovien sur E. m est une mesure bornée positive non nulle sur E, telle que mP soit absolument continue par rapport à m. P satisfait à la <u>condition de récurrence de HARRIS</u> relativement à m : si (X_n) est le processus canonique admettant P comme noyau de transition,

(*) " Devant la gravité de la situation, les autorités ont pris les mesures de sécurité qui s'imposent, etc... "

<u>pour tout</u> A <u>non m-négligeable et tout</u> $x \in A$, <u>le processus</u> (X_n) <u>est</u> P^x-<u>p.s. récurrent dans</u> A .

Nous utiliserons les notations suivantes : si $A \subset E$ (cette notation sous entend que $A \in \underline{\underline{E}}$), A' sera le complémentaire de A, $J_A, J_{A'}$ seront les noyaux de multiplication par $I_A, I_{A'}$ respectivement, et nous poserons

$$G_A = I + PJ_A + PJ_APJ_A + \dots$$
$$A_G = I + J_AP + J_APJ_AP + \dots$$

(<u>ce ne sont pas</u> les notations classiques des potentiels avec tabou).
Le noyau de réduction sur A vaut

$$H_A = {}^{A'}GJ_A = J_A + J_{A'}G_{A'}PJ_A$$

Nous identifierons les fonctions ou mesures sur A à des fonctions ou mesures sur E, nulles hors de A. Cette identification étant faite, le noyau de transition du <u>processus induit</u> sur A s'écrit

$$P|_A = J_APH_A = J_AG_{A'}PJ_A$$

Le potentiel d'équilibre H_A1 de A est noté e_A : il est égal à 1 partout si A n'est pas m-négligeable (nous dirons désormais simplement " négligeable") . Nous fixerons un nombre $c \in]0,1[$, et nous noterons T le noyau markovien

$$(1-c)[\, I + cP + c^2P^2 + \dots \,]$$

LE LEMME DE HARRIS

La classe d'ensembles suivante a été introduite par METIVIER.

DEFINITION. <u>Un ensemble</u> $A \subset E$ <u>est dit</u> modeste (relativement à m) <u>s'il existe un entier</u> K, <u>une constante</u> $a>0$, <u>tels que l'on ait pour tout</u> $B \subset A$

$$\sum_0^K P^n(x,B) \geq am(B) \quad \underline{\text{pour tout}}\ x \in A$$

<u>et si en outre</u> A <u>n'est pas négligeable</u>.

On a alors aussi, pour tout $x \in A$, $T(x,B) \geq c^K m(B)$.

Cette classe d'ensembles n'est pas entièrement caractérisée de manière intrinsèque : elle change si l'on remplace m par une mesure équivalente. Elle n'est pas non plus stable par réunions finies. Aussi introduirons nous la classe suivante d'ensembles, qui ne prête pas aux critiques précédentes . On peut montrer que ces ensembles sont des "D-sets" d'OREY, mais je doute que la réciproque soit vraie.

DEFINITION. *On dit que* $A \subset E$ *est un ensemble* réservé *si, pour tout ensemble* B *non négligeable, la fonction* $T(.,I_B)$ *est bornée inférieurement sur* A *par une constante* >0 .

Il n'est pas absolument évident qu'un ensemble modeste soit réservé . C'est pourtant vrai : soit A un ensemble modeste. Si B est non négligeable, on a $e_B=1$, donc il existe un entier k tel que $I_A.P^k(I_B)$ ne soit pas négligeable. A étant modeste, $T(.,P^kI_B)$ est bornée inférieurement sur A. Mais on a $T(I_B) \geqq c^kTP^kI_B$.

Le premier résultat fondamental de la théorie est le lemme suivant, qui est dû à HARRIS (au vocabulaire près).

THEOREME 1. *Il existe une suite croissante* (A_n) *d'ensembles modestes, dont la réunion est* E.

Nous ne démontrerons pas ce lemme ici.(*)

II. LE CAS OU E EST MODESTE

Je dois à BRETAGNOLLE la connaissance du lemme suivant, qui est dû je crois à UENO

LEMME 1. *Soit* Q *un noyau markovien sur* E, *et soit* $\delta(Q)$ *le " diamètre" de* Q :

$$\delta(Q) \quad = \quad \sup_{x,y} \tfrac{1}{2}\|\varepsilon_x Q - \varepsilon_y Q\|$$

On a alors pour toute mesure bornée α *de masse nulle*

$$\|\alpha Q\| \leqq \|\alpha\|\, \delta(Q) .$$

Nous ne démontrons pas ce lemme(*).

THEOREME 2. *Supposons que* E *soit modeste. Alors*

1) *Il existe sur* E *une mesure* P-*invariante* ρ, *positive et de masse* 1.
2) *Pour toute mesure bornée de masse nulle* θ, *l'équation de Poisson*

$$\mu-\mu P = \theta$$

admet une solution unique μ_0 *bornée et de masse nulle, et toute autre solution bornée* μ *est de la forme* $\mu_0 + a\rho$, *où* a *est une constante*.

Noter que 2) entraîne, si $\theta=0$, que toutes les mesures invariantes bornées sont proportionnelles à ρ.

DEMONSTRATION. Nous commencerons par prouver les théorèmes analogues pour le noyau markovien T, en notant que la relation

$$T(x,.) \geqq bm \qquad (b>0)$$

(*) Voir appendice.

qui a lieu pour tout x, entraîne $\delta(T)<1$. Le lemme entraîne les conséquences suivantes :

a) Si ξ est bornée, $\xi-\xi T^k$ est bornée de masse nulle et de norme au plus égale à $2\|\xi\|$. On a donc

$$\|\xi T^k-\xi T^{k+n}\| \leqq 2\|\xi\|(\delta(T))^n$$

Les mesures ξT^p forment donc une suite de Cauchy pour la norme des mesures, elles convergent donc vers une mesure ξ_∞, qui est évidemment T-invariante.

b) Si ξ est de masse nulle, on a $\|\xi T^n\| \leqq \|\xi\|(\delta(T))^n$, la série $\sum \xi T^k$ converge en norme, et cela entraîne $\xi_\infty=0$.

Supposons que $m(1)=1$, et appliquons a) à m. La mesure $\rho=m_\infty$ est positive, de masse 1 et invariante. Les mesures mT^k étant absolument continues par rapport à m, ρ l'est aussi. Mais $\rho T=\rho$ majore bm, donc ρ et m sont équivalentes.

Si α est une mesure invariante bornée de masse nulle, on a $\alpha=\alpha_\infty$ et $\alpha_\infty=0$, donc $\alpha=0$. Si λ est une mesure invariante bornée, $\lambda-\lambda(1)\rho$ est invariante de masse nulle, donc nulle, et λ est proportionnelle à ρ.

Enfin, si Θ est bornée de masse nulle, la mesure $\mu_0=\sum \Theta T^k$ est la solution de masse nulle de l'équation de Poisson $\mu-\mu T=\Theta$. La caractérisation des autres solutions résulte de l'alinéa précédent.

Passons au noyau P. Nous avons

$$cTP+(1-c)I = P = cPT+(1-c)I$$

Il en résulte aussitôt qu'une mesure bornée λ est P-invariante si et seulement si elle est T-invariante. Soit à trouver une solution bornée de masse nulle de l'équation

$$\mu-\mu P = \Theta \tag{1}$$

où Θ est bornée de masse nulle. Nous résolvons l'équation de Poisson relative à T

$$\mu-\mu T = \frac{c}{1-c}\,\Theta T \tag{2}$$

et montrons que sa solution bornée de masse nulle μ_o satisfait à (1) : en effet, soit $\Theta'=\mu_o-\mu_o P$. Nous avons $\frac{c}{1-c}\Theta' T = \mu_o-\mu_o P = \frac{c}{1-c}\,\Theta T$. La mesure bornée $\lambda=\Theta-\Theta'$ satisfait donc à $\lambda T=0$. Faisons apparaître explicitement c dans la notation, en écrivant pour un instant

$$T_c = (1-c)\sum c^k P^k$$

et notons la " relation résolvante"

$$\frac{c'-c}{(1-c)(1-c')}\,T_c T_{c'} = \frac{c'}{1-c'}T_c - \frac{c}{1-c'}T_{c'}$$

La relation $\lambda T_c = 0$ entraîne $\lambda T_{c'}=0$ pour <u>tout</u> c' ; en faisant tendre c' vers 0 il vient que $\lambda=0$, et le théorème est complètement démontré.

III. MESURES POLICEES

Nous choisissons une suite croissante (M_n) d'ensembles modestes, de réunion E (théorème 1). Cette suite restera fixée désormais.

DEFINITION. <u>Une mesure</u> λ <u>sur E est dite policée si</u>

1) $< |\lambda| P^k, I_U > < \infty$ <u>pour tout ensemble réservé</u> U <u>et tout</u> k .

2) <u>Il existe un ensemble modeste</u> A, <u>contenu dans l'un des</u> M_i, <u>tel que</u>
$$\lim_{k\to\infty} < |\lambda|, (J_{A'}P)^k I_U > = 0$$ <u>pour tout ensemble réservé</u> U.

Le lemme de HARRIS entraîne que toute mesure policée est σ-finie. D'autre part, si deux mesures λ_1 et λ_2 sont policées, leur somme λ l'est aussi (soient A_1 et A_2 deux ensembles modestes satisfaisant à 2) pour λ_1 et λ_2 respectivement ; soit A l'un des M_i contenant à la fois A_1 et A_2 : A satisfait à 2) pour λ).

Nous allons établir l'existence de nombreuses mesures policées. Pour cela, nous aurons besoin d'un lemme (que j'ai trouvé dans le travail de BRUNEL).

LEMME 2. <u>Soit</u> $B\subset E$. <u>Alors</u> $^{B'}GP^kI_B \leqq k+1$, $G_{B'}P^kI_B \leqq k+1$.

DEMONSTRATION. Prouvons la première inégalité. Elle est évidente pour k =0. On a ensuite, en raisonnant par récurrence
$$^{B'}GP^{k+1}I_B = {^{B'}G}(J_{B'}P+J_BP)P^kI_B \leqq {^{B'}GP^kI_B} + {^{B'}GJ_B1} \leqq k+2$$
car $^{B'}GP^kI_B \leqq k+1$, et $^{B'}GJ_B1 = H_B1 \leqq 1$. Même démonstration pour la seconde inégalité, le rôle de H_B étant tenu par le noyau sousmarkovien $G_{B'}PJ_B$.

THEOREME 3. <u>Si</u> λ <u>est une mesure bornée sur</u> E, <u>et si</u> B <u>n'est pas négligeable, les mesures</u> $\lambda^{B'}G$ <u>et</u> $\lambda G_{B'}$ <u>sont policées</u>.

DEMONSTRATION. Soit U un ensemble réservé. Nous pouvons supposer $\lambda\geqq 0$. Comme B n'est pas négligeable, la fonction $T(.,I_B)$ est minorée sur U par une constante a>0, et nous avons donc sur E
$$a\ {^{B'}GP^kI_U} \leqq {^{B'}GP^k}\left(\sum_0^\infty c^nP^nI_B\right) \leqq \sum_0^\infty c^n(k+n+1) < \infty$$
La fonction $^{B'}GP^kI_U$ est donc bornée, et enfin λ-intégrable.

Pour établir la seconde propriété, nous remarquons que le lemme de HARRIS entraîne l'existence d'un ensemble modeste (non négligeable) $A\subset B$. On peut supposer A contenu dans l'un des M_i . On a si U est réservé
$$< \lambda^{B'}G , (J_{A'}P)^kI_U > \leqq < \lambda^{A'}G, (J_{A'}P)^kI_U >$$

Mais la suite $({}^{A'}G(J_{A'}P)^k I_U)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, uniformément bornée, et converge partout vers 0. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Lebesgue. Même raisonnement pour la seconde mesure.

Pour quelle raison considère t'on des mesures policées ? Pour avoir le lemme suivant :

LEMME 3. <u>Soit</u> ρ <u>une mesure invariante policée</u> (positive ou non), <u>et soit</u> A <u>un ensemble modeste satisfaisant à la seconde condition de l'énoncé précédent</u>. <u>On a alors</u> $\rho=\rho J_A G_{A'}$.

DEMONSTRATION. $|\rho|J_A$ est bornée, donc $|\rho|J_A G_{A'}$ est policée, par conséquent σ-finie. De même, les mesures $|\rho|P^k$ sont σ-finies, et nous pouvons écrire en toute confiance l'identité suivante (qui vient du fait que $\rho=\rho P$)

$$\rho = \rho(J_A + J_A P J_{A'} + \ldots + J_A(PJ_{A'})^k) + \rho J_{A'}(PJ_{A'})^k$$

Mais le terme complémentaire $|\rho|(J_{A'}P)^k J_{A'}$ tend vers 0 d'après la définition des mesures policées, la somme constituant la parenthèse converge en norme vers $\rho J_A G_{A'}$ sur tout ensemble réservé d'après le théorème précédent, et le lemme est établi.

IV. SOLUTIONS POLICEES DE L'EQUATION DE POISSON

Suivant la méthode de HARRIS, nous faisons maintenant la remarque cruciale suivante : soit A un ensemble modeste, et soit (Y_n) le processus induit par (X_n) sur A ; nous avons si $B\subset A$

$$\sum_0^K I_B\circ Y_n \geqq \sum_0^K I_B\circ X_n$$

Autrement dit, si $x\in A$, $B\subset A$, et si P' désigne le noyau induit sur A

$$\sum_0^K P'^n(x,B) \geqq \sum_0^K P^n(x,B)$$

A étant modeste, le second membre majore $am(B)$ pour un choix convenable de K et de $a>0$. Mais alors <u>A est modeste pour le processus induit sur</u> A.

LE THEOREME DE HARRIS

THEOREME 4. <u>Il existe une mesure invariante positive</u> ρ <u>pour le noyau</u> P, <u>qui est policée et équivalente à</u> m. <u>Toute autre mesure invariante policée est proportionnelle à</u> ρ.

DEMONSTRATION. 1) <u>Existence d'une mesure invariante positive</u>. Soit A un ensemble modeste. Le noyau $P|_A$ induit sur A admet une mesure invariante positive bornée α (que nous identifions comme d'habitude à une mesure sur E portée par A). Soit $\rho = \alpha G_{A'}$; ρ est une mesure positive et policée , et on vérifie aussitôt (α étant équivalente à $m|_A$) que ρ est absolument continue par rapport à m . Nous avons

$$\rho P = \alpha G_{A'}P = \alpha G_{A'}PJ_{A'} + \alpha G_{A'}PJ_A = \alpha(G_{A'}-I)+\alpha G_{A'}PJ_A$$
$$= \rho + \alpha((P|_A)-I) = \rho .$$

Soit A un ensemble tel que $\rho(A)=0$; comme ρ est invariante on a $<\rho P^k, I_A>$ $=0$, donc $<\rho, e_A> =0$, et e_A ne peut être égal à 1. Donc $m(A)=0$, et les mesures ρ et m sont équivalentes.

2) Unicité. Soit ρ' une seconde mesure policée invariante (positive ou non). Nous allons montrer que ρ' est proportionnelle à ρ. D'après le lemme 3 il existe un ensemble modeste B tel que l'on ait $\rho'=\rho' J_B G_{B'}$. On a alors aussi $\rho' P=\rho'=\rho' J_B G_{B'}P$, et enfin $\rho' J_B=\rho' J_B G_{B'} J_B$, ce qui signifie que la mesure induite $\beta'=\rho' J_B$ est invariante par le noyau $P|_B$. Comme elle est bornée, le théorème 2 entraîne qu'elle est proportionnelle à la mesure invariante positive et de masse 1 sur B. Autrement dit, nous pouvons supposer que ρ' est positive. De plus, la première partie de la démonstration montre que ρ' est équivalente à m, si elle n'est pas nulle.

D'après le théorème de décomposition de Riesz, toute mesure σ-finie excessive μ s'écrit $u+vG$, où u est invariante , et v est la mesure positive $\mu-\mu P$. Soit f une fonction μ-intégrable, partout >0 ; on a $<vG, f>$ $< \infty$, mais Gf vaut $+\infty$ partout , et cela n'est possible que si $v=0$. Autrement dit, toute mesure excessive (σ-finie) est invariante. Appliquons cela à la mesure excessive $\rho\wedge(t\rho')$, où $t\in\mathbb{R}_+$. Nous en déduisons que pour tout t la mesure $(\rho-t\rho')^+= \rho-(\rho\wedge(t\rho'))$ est positive, policée et invariante. Elle est donc ou nulle (et alors $\rho\leq t\rho'$) , ou équivalente à ρ (et alors $\rho\geq t\rho'$). On déduit aussitôt de tout cela l'existence d'un t tel que $\rho=t\rho'$.

L'EQUATION DE POISSON

THEOREME 5. Soit θ une mesure bornée de masse nulle sur E. L'équation de Poisson $\xi-\xi P=\theta$ admet des solutions policées, et deux d'entre elles diffèrent par un multiple de la mesure invariante ρ (*).

DEMONSTRATION. La seconde partie de l'énoncé résulte aussitôt du théorème précédent. Pour établir l'existence, nous commencerons par une remarque sur le " schéma de remplissage" . Soient λ et μ deux mesures positives bornées, (λ_n, μ_n) la suite qui leur est associée par le

(*) Noter que si θ est absolument continue, il en est de même de ξ.

schéma de remplissage, ν la différence $\lambda-\mu$. Posons

$$s_k = \lambda_0 + \dots + \lambda_k$$

La relation $\lambda_{n+1}-\mu_{n+1} = \lambda_n P-\mu_n$ entraîne aussitôt la relation de récurrence

$$s_{k+1} = \nu + s_k P + \mu_{k+1}$$

Posons alors $s = \lim_k s_k$. C'est une mesure positive, qui satisfait à l'équation de Poisson

$$s = \nu + sP + \mu_\infty \ .$$

A quelle condition s sera t'elle policée ? Considérons un ensemble B tel que $\lambda_n(B)=0$ pour tout n. La relation $\lambda_{k+1} \leqq \lambda_k P$ s'écrit alors $\lambda_{k+1} \leqq \lambda_k J_{B'} P$, donc $\lambda_p \leqq \lambda(J_{B'}P)^k$, et

$$s \leqq \lambda\, {}^{B'}G \ .$$

Il nous suffit donc de trouver un tel B <u>non négligeable</u>. Il suffit pour cela que la masse de μ soit <u>strictement</u> supérieure à celle de λ, et que μ soit absolument continue par rapport à m . En effet dans ce cas on n'a pas $\mu \dashv \lambda$, donc la mesure $\mu_\infty \leq \mu$ est absolument continue et non nulle, étrangère à toutes les mesures λ_k, et il existe donc un ensemble B portant μ_∞ (donc non négligeable) et tel que $\lambda_k(B)=0$ pour tout k. Si μ est portée par un ensemble A, on peut imposer à B d'être contenu dans A.

Nous avons $e_B=1$ partout. Comme $e_B = {}^{B'}GI_B$, nous avons

$$< \lambda_k, 1 > = < \lambda_k, e_B > \leqq < \lambda(J_{B'}P)^k \ , \ e_B > = < \lambda, (J_{B'}P)^k \, {}^{B'}GI_B >$$

Mais $(J_{B'}P)^k \, {}^{B'}GI_B$ tend vers 0 en restant borné par 1, donc la masse de λ_k tend vers 0 si $k \to \infty$. La relation $\lambda_{k+1}-\mu_{k+1} = \lambda_k P-\mu_k$ entraîne d'autre part que $\lambda_{k+1}-\lambda_k$ et $\mu_{k+1}-\mu_k$ ont même masse, d'où l'on tire aussitôt par récurrence que $\lambda-\lambda_k$ et $\mu-\mu_k$ ont même masse, et enfin que λ et $\mu-\mu_\infty$ ont même masse.

Passons à la démonstration proprement dite. Choisissons un ensemble non négligeable A contenu dans l'un des M_i, donc modeste, et appliquons le procédé ci-dessus aux mesures

$$\lambda = \theta^+ \quad , \qquad \mu = bI_A \cdot \rho$$

où la constante $b>0$ est choisie de telle sorte que la masse de μ soit strictement supérieure à celle de θ^+. La mesure s correspondante est policée, et satisfait à

$$s - sP = \theta^+ - \gamma$$

où $\gamma = \mu - \mu_\infty$ est positive, bornée de masse égale à celle de θ^+, portée par A. De même, appliquons le procédé aux mesures

$$\lambda' = \theta^- \quad , \quad \mu' = bI_A . \rho$$

La mesure s' correspondante satisfait à

$$s' - s'P = \theta^- - \gamma'$$

où γ' satisfait aux mêmes propriétés que γ . Considérons maintenant la mesure de masse nulle $\gamma-\gamma'$; comme A est modeste, le théorème 2 entraîne l'existence d'une mesure bornée α sur A vérifiant l'équation de Poisson pour le noyau induit

$$\alpha - \alpha(P|_A) = \gamma - \gamma' \ .$$

Posons $s'' = \alpha G_{A}$, : c'est une mesure policée et on a (cf. la démonstration du théorème précédent)

$$s'' P = s'' + \alpha((P|_A) - I)$$

ou $s'' - s''P = \gamma - \gamma'$. Il ne reste plus qu'à prendre pour ξ la mesure $s - s' + s''$.

V. MESURES DE SECURITE

La notion de mesure policée n'est vraiment pas jolie : elle dépend, non seulement de la mesure m (par l'intermédiaire de la notion d'ensemble modeste), mais d'une suite arbitraire (M_i) d'ensembles modestes. Nous allons introduire dans ce paragraphe une notion analogue, mais intrinsèque.

Nous commençons par remarquer que, si E est un ensemble réservé, les mesures policées sont bornées. Le théorème 5 nous donne alors le résultat suivant (qui est une variante d'un résultat de BRUNEL)

THEOREME 2'. <u>Supposons que</u> E <u>soit réservé</u>. <u>Alors la mesure invariante</u> ρ <u>est bornée</u>. <u>Pour toute mesure bornée de masse nulle</u> θ, <u>l'équation de Poisson</u> $\mu - \mu P = \theta$ <u>admet une solution bornée de masse nulle</u> μ_0 <u>unique</u>, <u>et les autres solutions sont les mesures</u> $\mu_0 + t\rho$ ($t \in \mathbb{R}$).

Ensuite, nous remarquons que si A est réservé et non négligeable, A est <u>réservé pour le processus induit sur</u> A . Soit en effet $B \subset A$ non négligeable ; la fonction

$$\sum_0^\infty c^k P^k(.,B)$$

est alors bornée inférieurement sur A par une constante $a > 0$. Mais alors il existe un entier n tel que $\sum_0^n c^k P^k(.,B) \geq \frac{a}{2}$ sur A , et si P' désigne le noyau induit sur A nous avons $\sum_0^n c^k P'^k(.,B) \geq \frac{a}{2}$ sur A, l'inégalité cherchée.

Nous posons la définition suivante :

DEFINITION. Une mesure λ sur E est une mesure de sécurité si $<|\lambda|, P^k I_U>$ $< \infty$ pour tout ensemble réservé U et tout k, et s'il existe un ensemble réservé A tel que $\lim\limits_{k\to\infty} < |\lambda|, (J_A P)^k I_U > = 0$ pour tout ensemble réservé U.

Toute mesure policée est une mesure de sécurité. Nous avons le théorème suivant, qui ne dépend plus de choix arbitraires.

THEOREME 4'-5'. a) Le noyau P admet une mesure invariante positive de sécurité ρ, équivalente à m. Toute autre mesure invariante de sécurité est proportionnelle à ρ.

b) Pour toute mesure bornée de masse nulle θ, l'équation de Poisson $\mu - \mu P = \theta$ admet des solutions de sécurité, et deux d'entre elles diffèrent d'un multiple de la mesure ρ.

(Il apparaît ainsi, après coup, que les solutions policées et les solutions de sécurité sont identiques).

DEMONSTRATION. Relire le paragraphe IV, en remplaçant le théorème 2 par le théorème 2' pour l'unicité (th.4). Il n'y a rien à prouver quant à l'existence, puisque les mesures policées sont de sécurité.

VI. L'EXISTENCE D'UN NOYAU POTENTIEL

THEOREME 6. Supposons que E soit réservé. Il existe alors un noyau borné W sur E possédant les propriétés suivantes

1) Pour tout x , la mesure $W(x,.)$ est de masse nulle.

2) Pour toute fonction bornée f sur E telle que $\rho(f)=0$, on a $(I-P)Wf = f = W(I-P)f$.

Ces propriétés caractérisent uniquement le noyau W .

DEMONSTRATION. 1) Unicité. Nous supposerons que $\rho(1)=1$. La relation $W(I-P)f=f$ si f est d'intégrale nulle entraîne pour f quelconque $W(I-P)f=f-\rho(f)$, et il en résulte que $\varepsilon_x W$ est l'unique mesure w_x de masse nulle telle que $w_x(I-P)=\varepsilon_x-\rho$.

2) Existence . Nous définirons W en posant $\varepsilon_x W = w_x$. Tout d'abord, les mesures w_x ont des normes uniformément bornées. En effet, l'opérateur $I-P$ sur l'espace de Banach $\underline{\underline{M}}_0(E)$ des mesures bornées de masse nulle est une bijection continue de $\underline{\underline{M}}_0(E)$ sur lui même, et il admet donc un inverse borné. Il nous faut montrer

a) que W est un noyau, i.e. que si f est mesurable bornée, Wf est mesurable.

Lorsque ce point sera établi, nous pourrons écrire $W(I-P)f= f-\rho(f)$

pour toute f mesurable bornée, et il restera à établir que

b) $(I-P)Wf=f-\rho(1)$

Nous allons commencer par prouver a) et b) lorsque E est <u>modeste</u>. Avec les notations du théorème 2, nous avons prouvé dans ce cas que w_x est la limite en norme des mesures

$$\frac{c}{1-c}(\varepsilon_x-\rho)T\sum_0^\infty T^n$$

Soit L le noyau défini par $\varepsilon_x L=\varepsilon_x-\rho$; T et L commutent avec P, et nous avons

$$W = \lim_n \frac{c}{1-c}\sum_1^\infty LT^n$$

Donc W est un noyau , W et P commutent, et b) en résulte aussitôt.

Passons au cas général. Soit A un ensemble modeste contenu dans E, et soit f une fonction d'intégrale nulle à support dans A et bornée. D'après le résultat précédent, il existe une fonction g sur A , bornée et d'intégrale nulle, telle que

$$f = (I-(P|_A)g\ )$$

ou encore, avec les identifications habituelles

$$f = (J_A - J_A G_{A'} PJ_A)g$$

Soit alors h la fonction $H_A g$ sur E. Un calcul immédiat montre que

$$f= (I-P)h$$

On a alors $< \varepsilon_x W,f > = < w_x,(I-P)h > = < w_x(I-P),h > = h(x)-\rho(h)$.

Comme h est mesurable, on peut affirmer que Wf est mesurable si f est nulle hors d'un ensemble modeste, et on passe de là immédiatement au cas général. Donc W est un noyau.

Si h est d'intégrale nulle sur E et bornée, nous avons $W(I-P)h=h$ d'après ce qui précède, donc $(I-P)W(I-P)h = (I-P)h$. Cette relation s'étend aussitôt au cas où h est d'intégrale non nulle. Soit alors f une fonction d'intégrale nulle à support dans A modeste. Nous avons vu à l'instant que f peut s'écrire $(I-P)h$. La relation précédente s'écrit alors

$(I-P)Wf = f$ si f est d'intégrale nulle à support modeste

donc aussi $(I-P)Wf = f-\rho(f)$ si f est bornée à support modeste, et un passage à la limite immédiat étend cela à toute f bornée sur E.

LE THEOREME D'ORNSTEIN-METIVIER

Nous cessons de supposer E réservé.

THEOREME 7. <u>Soit</u> f <u>une fonction bornée sur</u> E, <u>d'intégrale nulle, nulle hors d'un ensemble réservé</u> A .

a) L'équation de Poisson $(I-P)g=f$ sur E admet des solutions bornées, et deux d'entre elles diffèrent d'une constante.

b) On a

$$\sup_n \|f+Pf+P^2f\ldots+P^nf\|_E \leqq c_A\|f\|_E$$

où c_A ne dépend que de A.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 6, appliqué dans A, il existe une fonction unique g sur A telle que

$$(I-(P|_A))g = f \qquad , \int_A g\rho = 0 .$$

et on a $\|g\|_A \leq j\|f\|_A$, j étant la norme du noyau potentiel W. Posons $h=H_Ag$; nous avons $\|h\|_E \leqq j\|f\|$, et

$$(I-P)h = f \quad \text{dans } E .$$

Cela prouve l'existence de solutions bornées de l'équation de Poisson.(*) On a d'autre part

$$(I+P+\ldots+P^n)f = h - P^{n+1}h$$

d'où b), avec $c_A=2j$. Enfin, si g est bornée, et $(I-P)g=0$, montrons que g est constante. On se ramène aussitôt au cas où g est positive. Alors g est excessive, donc égale p.p. à une constante u. En retranchant u, on se ramène à prouver que si g est nulle p.p., et $Pg=g$, alors g est nulle partout. Soit A l'ensemble $\{g=0\}$. Il est non négligeable, donc le temps d'entrée dans A est P^x-p.s. fini pour tout x. Le processus $(g\circ X_n)$ étant une martingale bornée, le théorème d'arrêt donne $g=H_Ag=0$.

On trouvera en appendice quelques résultats complémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

A.BRUNEL. Chaînes abstraites de Markov vérifiant une condition de Orey. Extension à ce cas d'un théorème ergodique de M.Métivier. (Je ne connais cet article que sous forme de polycopié. Université de Rennes, 1968/69)

S.OREY. Limit theorems for Markov chain transition probability functions Lecture Notes, University of Minnesota, 1968.

M.METIVIER. Existence of an invariant measure and Ornstein's ergodic theorem. Ann. Math. Stat., 40 (1969), p. 79-96.

(*) La solution h qui vient d'être construite est la seule telle que $\int_A h\rho=0$.

APPENDICE

DEMONSTRATION DU LEMME DE HARRIS

La tribu étant séparable, nous pouvons écrire

$$P^k = Q_k + R_k$$

où $Q_k(x,dy) = q_k(x,y)m(dy)$ est la partie absolument continue de $P^k(x,dy)$ par rapport à m. La condition de récurrence entraîne que pour <u>tout</u> x et tout A tel que $m(A)>0$ on a $\sum c^k P^k(A)>0$. La mesure m est donc absolument continue par rapport à $T(x,dy)$. Comme m est non nulle, $T(x,dy)$ a une partie absolument continue non nulle par rapport à m, et il existe un k tel que $Q_k(x,.)\neq 0$.

Remarquer que $Q_k P^n \leqq Q_{k+n}$. Soit alors f une fonction positive non négligeable ; nous avons $\sum_0^\infty P^n f = +\infty$ presque partout, donc si k est tel que $Q_k(x,.)\neq 0$ $Q_k(x,\sum_0^\infty P^n f)=+\infty$; mais ceci est inférieur à $\sum_0^\infty Q_m(x,f)$. Ainsi $\sum Q_m f=\infty$ partout.

Partons d'une version de la densité $q_k(x,y)$ mesurable sur $E\times E$. Modifions la en posant

$$q'_k(x,y) = q_k(x,y) \text{ pour tout } k \quad \text{si } \sum_0^\infty q_n(x,y)=+\infty$$

$$q'_k(x,y) = +\infty \quad \text{pour tout } k \text{ sinon}$$

La relation $\sum q'_n(x,y)=+\infty$ a lieu identiquement, et les q'_n forment encore une version des densités. Puis remarquons que $P^k Q_n \leqq Q_{k+n}$, et définissons par récurrence

$$q''_0(x,y) = q'_0(x,y)$$

$$q''_{n+1}(x,y) = q'_{n+1}(x,y) \vee \left(\sup_{r\leq n} \int P^{n+1-r}(x,dz)q''_r(z,y)\right)$$

Les nouvelles densités (que nous désignerons à nouveau par q_k) possèdent les deux propriétés

$$\sum q_k(x,y)=+\infty \text{ identiquement} \; ; \quad \int q_m(x,z)m(dz)q_n(z,y) \leqq q_{m+n}(x,y)$$

Posons

$$B_j(x) = \{ y : \sum_0^j q_k(x,y) > \frac{1}{j} \}$$

$$\hat{B}_j(y) = \{ x : \sum_0^j q_k(x,y) > \frac{1}{j} \}$$

Comme $\sum_0^\infty q_k(x,y)=+\infty$ identiquement, $m(B_j(x))$ et $m(\hat{B}_j(y))$ tendent vers 1 lorsque $j\to\infty$, quels que soient x et y. Les ensembles

$$M_j = \{ z : m(B_j(z)) \geqq \frac{3}{4} \; , \; m(\hat{B}_j(z)) \geqq \frac{3}{4} \}$$

ont donc pour réunion E. En particulier, M_j n'est pas négligeable dès que j est assez grand. Montrons que les M_j sont alors des ensembles modestes.

Posons $\ell(x,y)=\sum_0^j q_k(x,y)$. Nous avons si $x\in M_j$, $y\in M_j$

$$\int \ell(x,z)m(dz)\ell(z,y) \geqq \int_{B_j(x)\cap\hat{B}_j(y)} \ell(x,z)m(dz)\ell(z,y)$$

Mais cette intersection a une probabilité au moins égale à $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, et $\ell(x,z)$ et $\ell(z,y)$ y sont tous deux $\geq 1/M$. L'intégrale au premier membre dépasse donc $1/2j^2$. D'autre part cette intégrale est majorée par $\sum_{p\leqq j,\, m\leqq j} q_{m+p}(x,y) \leqq 2j \sum_0^{2j} q_i(x,y)$. Autrement dit, nous avons

$$\inf_{(x,y)\in M_j\times M_j} \sum_0^{2j} q_i(x,y) \geqq a > 0$$

où a est une certaine constante. Cela entraîne que M_j est modeste, dès que M_j est non négligeable.

DEMONSTRATION DU LEMME 1 (notations de la 3e page)

Soient E^+,E^- deux ensembles portant $(\alpha Q)^+$, $(\alpha Q)^-$ respectivement.

On a $\|\alpha Q\| = <\alpha Q,\ I_{E^+}-I_{E^-}> = <\alpha Q\ .\ I_{E^+}-I_{E^-}-m>$, où la constante m peut être choisie arbitrairement. On prend

$$m = \frac{1}{2}\left(\sup_x Q(x, I_{E^+}-I_{E^-}) + \inf_x Q(x,I_{E^+}-I_{E^-}) \right)$$

Alors on a $|Q(.,I_{E^+}-I_{E^-}-m)| \leqq \frac{1}{2}\left(\sup_x Q(x,I_{E^+}-I_{E^-}) - \inf_x Q(x,I_{E^+}-I_{E^-})\right)$

$= \frac{1}{2} \sup_{x,y} | Q(x,I_{E^+}-I_{E^-})-Q(y,I_{E^+}-I_{E^-})| \leqq \delta(Q)$. Le lemme en découle.

EXISTENCE D'UN DUAL ET APPLICATIONS

Nous regroupons ici quelques résultats sur l'équation de Poisson, qui se déduisent des théorèmes 5 et 7 par dualité. Ils n'ont pas été mis dans le texte, car ils utilisent une technique assez différente.

Nous commençons par construire un noyau dual Q de la manière suivante. Nous supposerons que E est un espace lusinien, de manière à pouvoir appliquer le théorème de désintégration des mesures. Nous désignerons par ρ une mesure invariante, et nous considérerons la mesure sur $E\times E$

$$\phi(A\times B) = \int I_B(u)\rho(du)P(u,A)$$

La première projection de cette mesure sur E est ρ , puisque $\rho P=\rho$. Il existe donc un noyau markovien $\hat{P}$ sur E telle que la mesure ϕ s'écrive

$$\phi(A\times B) = \int_A \rho(dv)\hat{P}(v,B)$$

La fonction $\hat{P}(.,B)$ est donc une version de la densité de Radon-Nikodym de la mesure $(I_B.\rho)P$ par rapport à ρ. Les noyaux $\hat{P}$ et P sont en dualité par rapport à ρ : si f et g sont mesurables positives sur E

$$< Pf,g >_\rho \quad = \quad < f,\hat{P}g >_\rho$$

On en déduit que si g est positive, et n'est pas négligeable, on a $<\sum_0^\infty \hat{P}^k g,f> = +\infty$ pour toute f positive non négligeable. Mais alors $\sum_0^\infty \hat{P}^k g = +\infty$ p.p.. Il en résulte que toute fonction $\hat{P}$-excessive est p.p. égale à une constante.

Nous notons ensuite que si l'on décompose $\hat{P}^k$ en $\hat{Q}_k+\hat{R}_k$ par rapport à ρ , comme nous l'avons fait plus haut par rapport à m pour P^k, on a pour presque tout x (q'_k désignant maintenant une densité p.r.à ρ)

(1) $$\hat{Q}_k(x,dy) \geqq \rho(dy)q'_k(y,x)$$

Nous suivons maintenant les raisonnements indiqués dans le livre de FOGUEL (*) : on a $\hat{R}_m\hat{R}_n \geqq \hat{R}_{m+n}$, donc la suite $\hat{R}_n 1$ est décroissante. Soit h sa limite. On a $\hat{R}_n h\geqq h$, donc $\hat{P}^n h\geqq h$ et (comme $h\leqq 1$) h est p.p. égale à une constante. Soit m une mesure bornée équivalente à ρ ; $m\hat{R}_n \leqq m\hat{P}^n$ est absolument continue par rapport à m . Nous avons $\hat{R}_n h\geqq h$, donc $<m\hat{R}_n,h > \geqq <m,h >$, mais h est p.c. égale à une constante c, et l'on a $\hat{R}_n c\leqq c$, d'où l'inégalité inverse $<m\hat{R}_n,h>\leqq <m,h >$, et enfin $\hat{R}_n h=h$ m-p.p. Mais alors $\hat{Q}_n h=\hat{P}^n h-\hat{R}_n h=0$ m-p.p., et l'inégalité (1) entraîne h=0 m-p.p.

Soit un x tel que h(x)=0, et soit f une fonction $\hat{P}$-excessive bornée. f est égale m-p.p. à une constante c, nous avons $\hat{Q}_n(f-c)=0$ partout, et $\hat{R}_n(f-c)$ tend vers 0 en x , donc $\hat{P}^n(f-c)$ tend vers 0 en x lorsque $n\to\infty$. Donc

$$f(x) \geqq \lim_n \hat{P}^n f^x = \lim_n \hat{P}^n c^x = c$$

En particulier, prenons pour f un potentiel d'équilibre $\hat{e}_A$, où A est non-négligeable ; on a c=1, donc $\hat{e}_A(x)\geqq 1$, et enfin $\hat{e}_A(x)=1$.

Définissons maintenant par récurrence

$$H_0=\{h=0\} \quad , \quad H_{n+1}=\{ x\in H_n : P(x,H_n)=1,\ \hat{P}(x,H_n)=1 \} \quad , \ H_\infty = \bigcap_n H_n \ .$$

(*) S.R.FOGUEL, the ergodic theory of Markov processes, Van Nostrand 1969.

L'ensemble H_∞^c est négligeable, on a $P(x,H_\infty)=\hat{P}(x,H_\infty)=1$ pour tout $x\in H_\infty$, et l'on peut donc réduire l'espace d'états à H_∞. Si $A\subset H_\infty$ est non-négligeable, on a identiquement $e_A=\hat{e}_A=1$ sur H_∞. Autrement dit, après réduction de l'espace d'états, P et le noyau dual sont récurrents au sens de HARRIS.

Il faut noter la formule de dualité bien connue : si $\hat{H}_A$ est le noyau de réduction sur A pour $\hat{P}$

$$\hat{H}_A = J_A+J_{A'}\hat{P}J_A+ J_{A'}\hat{P}J_{A'}\hat{P}J_A+\dots$$

on a pour f et g $\geqq 0$

$$< g,J_A G_{A'}f >_\rho \quad = \quad < \hat{H}_A g \ , \ f >_\rho$$

Nous n'avons pas envie de discuter des notions d'ensembles "bornés" pour le processus dual : c'est déjà assez ennuyeux lorsqu'on a un seul noyau! Qu'il suffise de dire que le résultat dual du théorème 5 permet de résoudre l'équation de Poisson g-Pg=f p.p. lorsque $f\in L^1(\rho)$, $\int f\rho=0$.

CONSTRUCTION D'UN OPERATEUR POTENTIEL GLOBAL

Nous allons utiliser le résultat dual du théorème 7 de la manière suivante.

Nous fixons un ensemble modeste A (non négligeable) tel que l'on ait, pour un entier j et un nombre a>0 convenables

$$\inf_{(x,y)\in A\times A} \sum_0^j q_k(x,y) \geqq a$$

où les q_k désignent les densités par rapport à m. Quitte à le réduire un peu, nous pouvons le supposer contenu dans H_∞, et tel que la densité $\frac{m}{\rho}$ soit bornée supérieurement et inférieurement sur A. L'ensemble A est alors modeste pour le processus dual.

Nous supposerons ρ normalisée de telle sorte que $\rho(A)=1$, et nous poserons $\rho_A=I_A.\rho$.

THEOREME 8. Il existe un noyau positif V sur E, possédant les propriétés suivantes

1) Pour toute mesure bornée θ, θV est solution de sécurité de l'équation de Poisson $\xi-\xi P = \theta- <\theta,1>\rho_A$.

2) Si f est une fonction bornée, nulle hors d'un ensemble réservé, les fonctions $VP^k|f|$ sont bornées sur E, et il existe une fonction fixe bornée v telle que l'on ait $(I-P)Vf = f-v<\rho,f>$.

3) Si de plus $\int f\rho=0$, Vf est l'unique fonction bornée g telle que $g-Pg=f$, $\int_A g\rho = 0$.

DEMONSTRATION. a) L'ensemble A est modeste pour le processus dual. Le résultat dual du théorème 7 est alors le suivant .

Si Θ est une mesure de masse nulle, à support dans A, admettant une densité bornée par rapport à ρ , l'équation de Poisson $\xi-\xi P=\Theta$ admet une solution unique admettant une densité bornée par rapport à ρ (et donc policée), telle que $\xi(A)=0$. On a de plus une majoration de la forme

$$\|\xi\|_\infty \leqq c\|\Theta\|_\infty$$

où l'on note ainsi, par abus de notation, la norme dans L^∞ des densités en question.

b) Reprenons maintenant la construction du théorème 5 : nous appliquons le schéma de remplissage aux mesures

$$\lambda^x=\varepsilon_x \qquad , \qquad \mu = 2\rho_A$$

Nous construisons ainsi des mesures λ_k^x , μ_∞^x, $s_x=\sum_k \lambda_k^x$; s_x est une mesure positive, policée (on verra cela de plus près), solution de l'équation

$$s_x - s_xP = \varepsilon_x- 2\rho_A + \mu_\infty^x$$

La tribu $\underline{\underline{E}}$ étant séparable (nous avons même supposé plus haut E lusinien), il est facile et ennuyeux de vérifier que les applications $x\mapsto s_x$, $x\mapsto \mu_\infty^x$ sont des noyaux (i.e. sont mesurables).

La mesure μ_∞^x est positive, majorée par $2\rho_A$, de masse 1. Soit ξ_x l' unique solution policée de l'équation

$$\xi_x - \xi_xP = \rho_A-\mu_\infty^x$$

D'après a), $\rho_A-\mu_\infty^x$ ayant une densité comprise entre -1 et 1, ξ_x a une densité comprise entre -c et c. L'application $x\mapsto \xi_x+c\rho$ est un noyau positif. Nous posons enfin

$$v_x = s_x+\xi_x+c\rho$$

Pour chaque x, v_x est une solution positive de l'équation $v_x-v_xP=\varepsilon_x-\rho_A$. L'application V : $x\mapsto v_x$ est un noyau V.

c) Nous montrons maintenant que si Θ est positive bornée, ΘV est une mesure de sécurité. Comme $\xi_x+c\rho$ a une densité bornée par 2c, il suffira de montrer que ΘS est une mesure de sécurité, où S désigne le noyau $x\mapsto s_x$.

Rappelons un résultat vu dans la démonstration du théorème 5 : soit B_x un ensemble contenu dans A, portant μ_∞^x , tel que $\lambda_k^x(B_x)=0$ pour tout $k\geqq 0$; alors on a

$$s_x \leqq {}^{(B_x')}G$$

Notons que $\rho(B_x) \geqq \frac{1}{2}$: en effet B_x porte μ_∞^x , qui a une masse égale à 1, et une densité au plus égale à 2. Il existe donc une constante $\alpha>0$ telle que $m(B_x)\geqq\alpha$. Il existe donc une constante $\beta>0$ telle que l'on ait pour tout $z\varepsilon A$ et tout x

$$T(z,B_x) = \sum c^n P^n(z,B_x) \geqq \sum_0^j c^j \int_{B_x} q_n(z,u)m(du) \geqq \beta$$

Soit U un ensemble réservé ; la fonction $T(.,A)$ est bornée inférieurement sur U par une constante γ_U , et on a donc si $z\varepsilon U$

$$T^2(z,B_x)=\sum(n+1)c^nP^n(z,B_x) \geqq \int_A T(z,du)T(z,B_x) \geqq \delta_U=\beta\gamma_U \ .$$

Nous avons donc $T^2(.,B_x) \geqq \delta_U I_U$ et, pour tout $x\varepsilon E$

$$\delta_U< s_x, \ P^k I_U > \leqq \delta_U < \varepsilon_x, \ {}^{(B_x')}GP^k I_U > \leqq < \varepsilon_x, {}^{(B_x')}GP^k T^2(.,B_x) >$$

$$= \sum (n+1)c^n <\varepsilon_x, {}^{(B_x')}GP^{k+n} I_{B_x} > \leqq \sum c^n(n+1)(k+n+1)<\infty \ .$$

Ainsi, la fonction SP^kI_U est bornée sur E pour tout ensemble réservé. On en déduit que VP^kI_U est bornée sur E. Il en résulte aussi que θVP^k est une mesure pour laquelle les ensembles réservés sont intégrables.

Montrons que θS (donc θV) est une mesure de sécurité . Nous avons

$$< \theta S, \ (J_A,P)^k I_U > \ = \int\theta(dx) <s_x, \ (J_A,P)^k I_U>$$

Mais nous avons $< s_x, \ (J_A,P)^k I_U > \leqq < \varepsilon_x \ , \ {}^{(B_x')}G(J_A,P)^k I_U > \ \leqq$

$< \varepsilon_x \ , \ {}^{(B_x')}G(J_{B_x'},P)^k I_U >$, fonction (non nécessairement mesurable) qui tend en décroissant vers 0 en restant majorée par la fonction

$$< \varepsilon_x, \ {}^{(B_x')}GI_U > \leqq \sum c^n(n+1)^2/\delta_U \quad , \text{ constante finie.}$$

Le théorème de Lebesgue entraîne alors que $< \theta S, \ (J_A,P)^k I_U > \to 0 \ (k\to\infty)$. Donc θS est bien une mesure de sécurité.

d) Soit θ bornée (non nécessairement positive) ; c) permet d'intégrer tranquillement par rapport à θ la relation $\varepsilon_x V-\varepsilon_x VP=\varepsilon_x-\rho_A$; on en déduit que θV est une solution de sécurité de l'équation $\xi-\xi P=\theta-<\theta,1>\rho_A$.

e) Appliquons cela à la mesure bornée de masse nulle $\theta=\varepsilon_x(I-P)$. Il vient que $\varepsilon_x(I-P)V$ est solution de sécurité de $\xi(I-P)=\varepsilon_x(I-P)$. Mais cette équation admet la solution de sécurité ε_x. On peut donc écrire

$$\varepsilon_x(I-P)V = \varepsilon_x + v(x)\rho$$

Soit alors f bornée, nulle hors d'un ensemble réservé. En intégrant f, il vient $\quad (I-P)Vf = f+v<\rho,f>$. Prenant $f=I_U$, on voit que v est bornée.

f) $\rho_A V$ est solution de l'équation $\xi-\xi P = \rho_A-\rho_A(1)\rho_A=0$. Donc $\rho_A V= d\rho$, où d est une constante positive. Nous avons donc $< \rho_A, Vf > = d<\rho,f>$, si f est nulle hors d'un ensemble réservé, et bornée. En particulier si $\int f\rho =0$, il vient que Vf est solution de $g-Pg=f$, $\int g\rho_A=0$. Il n'existe pas d'autre solution bornée d'après le théorème 7.

REMARQUE. Non seulement le noyau V construit ci-dessus dépend de A, mais la construction elle même dépend d'éléments arbitraires (l'utilisation de $2\rho_A$ dans le schéma de remplissage, l'addition de $c\rho$ aux mesures...) dont on peut se débarrasser au moyen du lemme suivant.

LEMME 4. <u>Soient</u> λ <u>et</u> μ <u>deux mesures positives de masse 1, et</u> $\theta=\lambda-\mu$. <u>Si l'équation de Poisson</u> $\xi-\xi P=\theta$ <u>admet une solution positive de sécurité</u> v, <u>elle admet une plus petite solution positive</u> w, <u>donnée par</u>

$$w = \sum \lambda_k$$

<u>où les mesures</u> (λ_k,μ_k) <u>sont déduites de</u> (λ,μ) <u>par le schéma de remplissage</u>.

Avant de démontrer le lemme, remarquons qu'il entraîne immédiatement l'existence d'un plus petit noyau positif V satisfaisant à l'énoncé du théorème 8, pour lequel $\varepsilon_x V$ est la plus petite solution positive de $\xi-\xi P = \varepsilon_x-\rho_A$.

DEMONSTRATION. Nous avons $v\geq \theta+vP$, $v\geq 0$, donc $v\geq\theta^+=\lambda_0$. Soit $v_1=v-\lambda_0$; v_1 est positive, et on a en posant $\theta_1=\lambda_1-\mu_1= \lambda_0 P-\mu_0$

$$v_1\geq \theta+vP-\lambda_0 = \theta+\lambda_0 P-\lambda_0+v_1 P = (\lambda_0 P-\mu_0)+v_1 P = \theta_1+v_1 P$$

donc $v_1\geq\theta_1^+=\lambda_1$. Soit $v_2=v_1-\lambda_1$, etc. On en déduit en fin de compte que $v \geq \sum \lambda_k$.

Désignons cette dernière mesure par w. Comme elle est majorée par v. c'est une mesure de sécurité. Nous avons déjà utilisé la relation

$$w = \theta+wP+\mu_\infty$$

dans la démonstration du théorème 5. Mais ici λ et μ ont même masse, donc $\mu \dashv \lambda$, et $\mu_\infty=0$. Il en résulte finalement que w est la plus petite solution positive de l'équation de Poisson.

REMARQUE. Dans la théorie du potentiel des marches aléatoires, on construit des solutions positives de l'équation de Poisson $g-Pg=h$, où h est une fonction bornée à support réservé telle que $\rho(h)\leq 0$. En particulier si h est négative on construit ainsi des fonctions défectives. Nous ne savons rien faire de tel ici.