PAUL-ANDRÉ MEYER

# Deux petits résultats de théorie du potentiel

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 5 (1971), p. 211-212
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__211_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

# DEUX PETITS RESULTATS DE THEORIE DU POTENTIEL

par P.A. Meyer

Soit P un noyau sousmarkovien sur un espace d'états $(E,\underline{\underline{E}})$, et soit G son noyau potentiel. Il est bien connu que toute fonction ( mesurable) u est majorée par une plus petite fonction excessive Ru, la <u>réduite de u</u> , et que l'on a PRu=Ru sur $\{u<Ru\}$. Lorsque u est positive, ou plus généralement lorsqu'il existe un potentiel fini p tel que $u\geq -p$, Ru est limite de la suite $(u_n)$ définie de manière récurrente par

$$u_0 = u \qquad , \quad u_n = u_{n-1} \vee Pu_{n-1}$$

Les résultats qui suivent sont des sous-produits de la rédaction d'un chapitre sur la question. Le premier reprend un théorème du livre " probabilités et potentiel"[1], en l'améliorant un peu de manière à répondre à une question de DELLACHERIE, et en le démontrant sans résolvantes. Le second développe un théorème de MOKOBODZKI[2]

THEOREME. <u>Supposons que le noyau G soit propre</u>. <u>Soit</u> v <u>une fonction</u> $\geq 0$ <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>pour toute fonction positive</u> f <u>telle que</u> Gf <u>soit partout fini</u>, <u>et que l'on ait</u> $v\geq Gf$ <u>sur</u> $\{f>0\}$, <u>on a</u> $v\geq Gf$ <u>partout</u>. <u>Alors</u> v <u>est excessive</u>.

DEMONSTRATION. Appelons fonctions dominantes les fonctions v possédant cette propriété. Toute fonction excessive est dominante ( principe de domination ), et l'inf de deux fonctions dominantes est dominante.

Commençons par le cas où v est majorée par un potentiel fini u . On a alors aussi $u\geq Rv$, et donc Rv=Gf , où f=Rv-PRv. Mais Rv=PRv sur $\{v<Rv\}$, donc v majore Gf sur $\{f>0\}$, donc partout, donc v=Rv et v est excessive.

On passe au cas général en considérant une suite de potentiels finis $p_n \uparrow +\infty$, et en appliquant ce qui précède aux fonctions $v\wedge p_n$ . ▯

MOKOBODZKI a démontré le théorème suivant, dont il a fait l'un des principaux résultats de la théorie : soient u et v deux fonctions excessives finies, alors $R(u-v)\ll u$ , où $\ll$ désigne l'ordre fort. Ce théorème se laisse renforcer de la manière suivante :

THEOREME. <u>Soient</u> a <u>une fonction telle que</u> R(-a) <u>soit partout finie</u>, b <u>une fonction telle que</u> $a\ll b$. <u>On a alors</u> $Ra\ll Rb$ .

DEMONSTRATION. Rappelons que $a \ll b$ signifie qu'il existe c excessive telle que $a+c=b$ ; cela a un sens ici, car a ne prend pas la valeur $-\infty$.

Reprenons le calcul de MOKOBODZKI : soit f une fonction telle que $G|f|$ soit finie, et soit $w=Gf$. Comme on a $Rw \leqq Gf^+$, Rw est le potentiel d'une fonction positive h que l'on évalue ainsi. Soit K l'opérateur non linéaire $g \mapsto g \vee Pg$ ; on a $Rw = \lim_n K^n w$ ( calcul de la réduite rappelé au début de l'exposé ). Kw est une différence de potentiels finis, donc $Kw=G(I-P)Kw$, et

$$(I-P)Kw = (I-P)KGf = (I-P)[Gf \vee PGf] = (I-P)[Gf \vee (Gf-f)] =$$
$$= (I-P)[Gf+f^-] = f+(I-P)f^- = f^+-Pf^- .$$

Ainsi, si T est l'opérateur non linéaire $g \mapsto g^+-Pg^-$, on a $KGf=GTf$. Comme $G|Tf|$ est fini, on peut itérer, et il vient $K^n w = K^n Gf = GT^n f$, d'où $(I-P)K^n w = T^n f$, et enfin $h = \lim_n T^n f$.

Démontrons le théorème en commençant par le cas où $a=Gf, b=Gg$, les fonctions $|f|$ et $|g|$ ayant des potentiels finis. La relation $a \ll b$ équivaut alors à $f \leqq g$, donc $f^+ \leqq g^+$, $f^- \geqq g^-$, $Pf^- \geqq Pg^-$, et finalement $Tf \leqq Tg$, d'où $Ka \ll Kb$, puis $K^n a \ll K^n b$ et enfin $Ra \ll Rb$.

Passons ensuite au cas où $R(-a)$ et $R(b)$ sont finies. Notons u la fonction excessive $R(-a)+Rb+(b-a)$ ; u majore b et $-a$, donc aussi a et $-b$, et enfin $|a|$ et $|b|$. Introduisons pour $0<c<1$ le noyau $P_c=cP$, le noyau potentiel $G_c$ et la relation forte $\underset{c}{\ll}$, la réduite $R_c$ qui lui correspondent. La série $\sum P_c^k|a-P_c a|$ est majorée par $\sum c^k P^k(u+cPu) \leqq u\frac{1+c}{1-c}$, et on peut donc écrire $a=G_c f$ ( $f=a-P_c a$, $G_c|f|$ finie ), de même $b=G_c g$, et $a \underset{c}{\ll} b$. Le résultat précédent s'applique alors et donne $R_c a \underset{c}{\ll} R_c b$. On fait alors tendre c vers 1.

Enfin, passons au théorème tel qu'il est énoncé. Soit A l'ensemble $\{Rb<\infty\}$, et soit $P_A$ le noyau induit sur l'ensemble absorbant A. On vérifie aussitôt que $(Rb)_A$, la restriction de Rb à A, est égale à $R_A(b_A)$, la $P_A$-réduite de la restriction $b_A$. On peut alors appliquer le résultat précédent aux restrictions $a_A$ et $b_A$, ce qui donne $a_A \underset{A}{\ll} b_A$. Il existe donc une fonction f définie dans A et $P_A$-excessive telle que $a+f=b$ dans A ; en prolongeant f par $+\infty$ dans $A^c$ on obtient une fonction excessive dans E telle que $a+f=b$ dans E, donc $a \ll b$. ▯

(1) p.228 de l'édition française ( Hermann, 1966 ).

(2) Séminaire de Strasbourg IV, p.173.