SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE ARTZNER

Fonctions caractéristiques et mesures planes invariantes par rotation

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__1_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1969-70

- Séminaire de Probabilités -

FONCTIONS CARACTERISTIQUES ET MESURES PLANES INVARIANTES PAR ROTATIONS

(Ph. ARTZNER)

L'origine de cet article est la recherche de classes simples de fonctions caractéristiques de plusieurs variables, plus particulièrement de classes de fonctions liées aux fonctions caractéristiques d'une variable.

Le premier paragraphe fournit une telle classe de fonctions : celles invariantes par rotations ; elles correspondent aux lois de probabilité invariantes par rotations. On montre alors que les marginales de ces lois sont des mesures absolument continues.

L'étude, au troisième paragraphe, de la transformation de Weyl permet de caractériser ensuite celles des lois sur la droite qui sont marginales de lois invariantes par rotations.

La rédaction s'attache au seul cas de la dimension 2 qui présente le plus d'intérêt mathématique.

Nous ferons les deux conventions suivantes

. le mot mesure désignera une mesure positive bornée, sauf mention expresse du contraire

.. l'application $(x,y)\mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ sera appelée projection, ainsi que son extension aux mesures planes.

§ 1 - ETUDE DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES 2-RADIALES

Un procédé naturel pour trouver une classe simple de fonctions caractéristiques de deux variables est de s'intéresser aux fonctions caractéristiques des lois de probabilité planes invariantes par les rotations autour de l'origine (*) : si Φ est une telle fonction, la fonction d'une variable définie par $\varphi(x) = \Phi(x,o)$ est la fonction caractéristique de la première loi marginale de la loi associée à Φ, et l'on retrouve Φ à partir de φ puisque

$$\Phi(x,y) = \varphi((x^2+y^2)^{1/2}).$$

Dans l'espace $Oxyz$, le graphe de Φ s'obtient en faisant tourner le graphe de φ autour de l'axe des z.

Nous poserons donc la

DEFINITION 1 . On appelle fonction caractéristique 2-radiale toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable réelle, telle que la fonction Φ de deux variables réelles définie par

$$\Phi(x,y) = \varphi((x^2+y^2)^{1/2})$$

soit la fonction caractéristique d'une loi de probabilité plane, nécessairement unique, invariante par rotations, et dite associée à φ ; φ est alors la fonction caractéristique de la première marginale de cette loi.

EXEMPLES :

1 - Les fonctions $x \mapsto e^{-\sigma^2 x^2}$, σ réel donné $\neq 0$, sont des fonctions caractéristiques 2-radiales ; les lois planes associées sont celles des vecteurs aléatoires plans gaussiens centrés, à composantes indépendantes. On note d'ailleurs que ces

---

(*) appelées souvent dans la suite, simplement, "rotations" .

lois gaussiennes sont les seules lois planes à la fois invariantes par rotations et à composantes indépendantes : la démonstration de BARTLETT [1] faisant a priori l'hypothèse de l'existence d'une densité, démontrons cette assertion de façon générale : nous cherchons en effet une fonction 2-radiale φ telle que pour x,y quelconques

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi\left((x^2 + y^2)^{1/2} \right) .$$

Nous savons de plus que φ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$, et que $\varphi(0) = 1$. Supposons que pour un certain x_o, $\varphi(x_o) = 0$; on trouverait alors que $\varphi(2^{-n}x_o) = 0$ pour tout entier n, et donc, à la limite, que $\varphi(0) = 0$. Ainsi, pour tout x, $\varphi(x)$ est strictement positif.

La fonction ψ définie par

$$\psi(t) = \operatorname{Log} \varphi(\sqrt{t}) \quad t \geq o ,$$

est continue et vérifie pour t et τ positifs quelconques

$$\psi(t + \tau) = \psi(t) + \psi(\tau)$$

il existe donc un nombre α tel que $\psi(t) = \alpha t$, et par conséquent $\varphi(x) = e^{\alpha x^2}$ puisque φ est bornée α est de la forme $-\sigma^2$, σ réel ; le cas $\sigma = 0$ est évidemment exclu, d'où la démonstration.

Celle-ci se généralise en toute dimension finie. Remarquons que le résultat donne immédiatement la loi de MAXWELL en Mécanique Statistique.

2 - Les fonctions caractéristiques paires $x \to \cos ax$, a réel non nul, ne sont pas des fonctions 2-radiales puisque les masses $1/2$ et $1/2$ placées aux points $+a$ et $-a$ de $\mathbb{R}$ ne sauraient constituer la projection d'une mesure invariante par rotations.

3 - La fonction caractéristique de Khintchine définie par $\chi(x) = 1 - |x|$ si $|x| \leq 1$, $\chi(x) = 0$ sinon, n'est pas une fonction 2-radiale : on trouverait sinon, puisque la fonction $\Phi(x,y) = \chi((x^2 + y^2)^{1/2})$ est intégrable, une mesure m

associée à X , admettant une densité continue F , nécessairement invariante par rotations. La marginale de m serait la mesure de densité $f(x) = (\sin \frac{x}{2})^2 (\frac{x}{2})^{-2}$; puisque cette densité s'annule au point $x = 2\pi$ on trouverait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(2\pi, y)\, dy = 0$$

et donc $F(2\pi, y) = 0$ pour tout y , puis $F(x,y) = 0$ dès que $x^2 + y^2 \geq 4\pi^2$; la mesure m aurait un support borné ce qui ne serait pas vrai de sa projection.

Ces exemples montrent qu'il est commode d'introduire la

DEFINITION 2 . On appelle mesure radiale (plane) une mesure positive, bornée, dans le plan, qui soit invariante par toutes les rotations de centre l'origine.

Le théorème d'unicité dans la transformation de **Fourier** montre que deux mesures radiales ayant même projection sont nécessairement égales. Au paragraphe 4 nous caractériserons l'ensemble des projections des mesures radiales.

A côté de l'opération de projection existe un autre procédé pour relier mesures radiales et **mesures** sur la droite : la construction de l'indicatrice d'une mesure radiale, par la

DEFINITION 3 . On appelle indicatrice de la mesure radiale m , et on note μ , la mesure positive et bornée sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, définie par :

$$\mu([0,r]) = m(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x^2 + y^2 \leq r^2\}) .$$

Si m est la mesure radiale associée à une fonction caractéristique 2-radiale φ , on dira aussi que μ est l'indicatrice associée à φ .

La représentation des éléments de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ à l'aide de module et argument $[(x,y) \rightarrow ((x^2+y^2)^{1/2}, (x^2+y^2)^{-1/2}(x,y))]$ permet d'établir facilement la

PROPOSITION 1 . L'application $m \to$ indicatrice de m , est une bijection de l'ensemble des mesures radiales sur l'ensemble des mesures positives et bornées sur $\mathbb{R}^+$; elle est bicontinue pour les convergences étroites et échange les mesures absolument continues, ainsi que les mesures ne chargeant pas les origines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^+$ respectivement.

Puisque les masses totales de m et μ sont égales, l'application de cette proposition aux lois de probabilité, montre qu'un "point aléatoire radial" dans le plan, c'est à dire un point aléatoire à loi radiale, se décrit comme un couple $(R\cos\theta, R\sin\theta)$, où les variables R et θ sont indépendantes, la loi de R étant l'indicatrice de la loi du point, et la loi de θ étant la loi uniforme sur le cercle unité.

Le role joué par la fonction de Bessel d'indice zéro dans la transformation de Fourier, donne une solution partielle au problème de recherche des fonctions caractéristiques 2-radiales.

Une mesure radiale m , d'indicatrice μ , est l'intégrale par rapport à μ (puisque $\mu(\mathbb{R}^+) = 1$, on peut dire la combinaison convexe par rapport à μ) des mesures radiales particulières s_r , où s_r est concentrée sur le cercle de rayon r , et a pour masse totale 1 .

La fonction caractéristique de s_1 est la fonction

$$(x,y) \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x^2+y^2)^{1/2}\cos\theta} d\theta = J_0\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)$$

la fonction J_0 est donc une fonction 2-radiale particulière, d'indicatrice associée la mesure de Dirac au point 1 .

Par intégration on trouve donc la

PROPOSITION 2 . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

. φ <u>est une fonction caractéristique</u> 2-radiale, <u>d'indicatrice associée</u> μ

.. <u>il existe une loi de probabilité</u> μ <u>sur</u> $\mathbb{R}^+$ <u>telle que</u>

$$\varphi(x) = \int_0^\infty J_0(rx)\,\mu(dr) \qquad \textbf{pour tout } x \textbf{ réel}.$$

Les tables de la transformation de Hankel d'ordre zéro (sous l'une de ses diverses formes) permettent alors de construire le tableau

DENSITE SUR $\mathbb{R}$	FONCTION 2-RADIALE	INDICATRICE
Voir § 2	J_0	masse unité en 1
$\frac{1}{\pi}\lvert x\rvert\, K_1(\lvert x\rvert)$	$(1+x^2)^{-3/2}$	densité re^{-r}
$\frac{1}{\pi} K_0(\lvert x\rvert)$	$(1+x^2)^{-1/2}$	densité e^{-r}
$\frac{1}{\pi}(1+x^2)^{-1}$	$e^{-\lvert x\rvert}$ (Cauchy)	densité $(1+r^2)^{-3/2}$

(Cf [3], chapitre III, 3.8.3 et chapitre IX)

§ 2 - PROJECTION DES MESURES RADIALES

Rappelons que l'on appelle projection, et que l'on note pr l'application $(x,y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Nous allons exprimer la projection $pr(m)$ d'une mesure radiale m d'indicatrice μ comme intégrale par rapport à μ des projections des mesures radiales particulières s_r. Pour $r > 0$, la projection de s_r admet la densité paire

$$f_r(x) = (\pi)^{-1}(r^2 - x^2)^{-1/2} \quad \text{si} \quad |x| < r$$

$$f_r(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \geq r$$

Le théorème d'intégration par rapport à une mesure positive bornée (ici μ) de mesures (ici les $pr(s_r)$, $r > 0$) positives uniformément bornées, admettant toutes une densité (ici f_r, $r > 0$) par rapport à une même mesure de base (ici la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$), permet d'énoncer la

PROPOSITION 3 . *La projection d'une mesure radiale* m *ne chargeant pas l'origine, est une mesure absolument continue, admettant la densité paire* g , *donnée par*

$$g(x) = (\pi)^{-1} \int_{|x|}^{+\infty} (r^2 - x^2)^{-1/2} \mu(dr) ,$$

où μ *est l'indicatrice de* m .

Remarques :

1 - Le fait que la densité f_r ne soit pas constante sur l'intervalle $]-r, +r[$ (ce qui se produit dans le problème analogue endimension 3), ni décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (ce qui se produit en dimension ≥ 4) , mais au contraire croissante et non bornée, explique l'intérêt mathématique de l'étude en dimension 2 .

2 - Il serait agréable de posséder une démonstration "géométrique" de la première partie de cette proposition, par exemple en utilisant le théorème de Radon - Nikodym ; nous n'en connaissons pas.

Afin d'étudier le problème de remontée, en particulier chercher m connaissant g, il est utile de considérer l'image par l'application $K : x \mapsto x^2$, de la mesure $pr(m)$: cette image admet au point $y > 0$ la densité $f(y)$ donnée par

$$f(y) = \frac{g(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \pi^{-1} y^{-1/2} \int_{\sqrt{y}}^{+\infty} (r^2-y)^{-1/2} \mu(dr) \text{ , soit}$$

$$f(y) = \pi^{-1} y^{-1/2} \int_{y}^{+\infty} (t-y)^{-1/2} \nu(dt) ,$$

où ν est l'image de l'indicatrice μ par l'application K. On voit apparaitre la formule de transformation de Weyl étudiée au paragraphe suivant.

§ 3 - ETUDE DE LA TRANSFORMATION DE WEYL D'ORDRE 1/2

Si f est une fonction positive localement intégrable sur un intervalle de $\mathbb{R}$, nous désignerons par $f^{\bullet}$ la mesure σ-finie sur cet intervalle, admettant f pour densité.

La définition de la transformation de Weyl d'une fonction s'étend aux mesures :

<u>DEFINITION</u> 4 . <u>Soit</u> ν <u>une mesure positive, bornée ou</u> σ- <u>finie, sur l'intervalle</u> $I =]0, +\infty[$; <u>on appelle transformée de Weyl d'ordre</u> 1/2 <u>de</u> ν, <u>et on note</u> $W\nu$, <u>la fonction sur</u> I, <u>à valeurs dans</u> $[0, +\infty]$, <u>définie par</u>

$$W\nu(x) = (\pi)^{-1/2} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{-1/2} \nu(dt) .$$

Lorsque ν est bornée, $W\nu$ est la restriction à I de la convolution de ν avec la fonction ω nulle sur $\mathbb{R}^+$ et égale à $(-\pi t)^{-1/2}$ pour $t < 0$.

Le calcul final du paragraphe précédent se traduit dans la

PROPOSITION 4 . *Si* ν *est la loi du carré d'une variable aléatoire* $R>0$, *et si* θ *est un point aléatoire réparti uniformément sur le cercle unité,* R *et* θ *étant indépendants, la loi de* $R^2\cos^2\theta$ *admet la densité* f *donnée par*

$$\sqrt{\pi y}\, f(y) = W\nu(y) \qquad y>0 \ ,$$

où $W\nu$ *est la transformée de Weyl d'ordre* $1/2$ *de* ν .

Naturellement on aurait un énoncé analogue, mais plus lourd, pour une indicatrice de masse totale finie quelconque, ne chargeant pas l'origine de $\mathbb{R}^+$.

COROLLAIRES

1 - *Si* ν *est une mesure positive et bornée sur* I , *la fonction* $W\nu$ *est localement intégrable sur* I .

il suffit de considérer la projection de la mesure radiale d'indicatrice l'image de ν par l'application $K^{-1} : x \to \sqrt{x}$.

2 - *Si une mesure positive et bornée* ν_n *sur* I , *converge étroitement, pour* $n \to +\infty$, *vers une mesure* ν , *la mesure sur* I *de densité* $(\pi y)^{-1/2}\, W\nu_n(y)$, *converge étroitement vers la mesure de densité* $(\pi y)^{-1/2} W\nu(y)$.

en effet la mesure radiale m_n d'indicatrice l'image de ν_n par K^{-1} , converge étroitement vers la mesure radiale m d'indicatrice l'image de ν par K^{-1} (proposition 1 et continuité étroite de K^{-1}) ; mais l'application pr conserve la convergence étroite et nous donne les mesures concernées par le corollair

De façon générale on définit une famille de transformations (W_ν) , ν **réel** , ayant la propriété $W_\mu \circ W_\nu = W_{\mu+\nu}$, W_1 étant l'intégration de la mesure ν , de x à $+\infty$, où x varie de 0 à $+\infty$. Sans entrer dans la théorie générale, notons que le carré de convolution de la fonction ω est la fonction $t \to H(-t)$, où H est la fonction de Heaviside ; vérifions ces propriétés dans notre cas particulier :

la mesure $(W\nu)^\bullet$, pour ν bornée ou σ-finie, est positive et σ-finie ;

sa transformée de Weyl d'ordre $1/2$ est définie pour $y>0$, par

$$W((W\nu)^{\bullet})(y) = \pi^{-1} \int_y^{+\infty} (x-y)^{-1/2} dx \int_x^{+\infty} (t-x)^{-1/2} \nu(dt) \; ;$$

définissons sur l'ouvert $U =]y,+\infty[\times]y,+\infty[$ du plan des (x,t), la fonction H par

$$H(x,t) = (x-y)^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \quad \text{si} \quad t>x \;,\; (x,t)\in U$$

$$H(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leq x \;,\; (x,t)\in U$$

et appliquons sur l'ouvert U, le théorème de Lebesgue - Fubini à la mesure positive σ-finie $dx\otimes\nu(dt)$ et à la fonction mesurable positive H ; nous trouvons

$$\int_U H(x,t)dx\otimes\nu(dt) = \int_y^{+\infty}\nu(dt) \int_y^t (x-y)^{-1/2}(t-x)^{-1/2}dx$$

$$= \pi \int_y^{+\infty} \nu(dt) \qquad ,$$

et cette intégrale double est aussi égale à

$$\int_y^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} (x-y)^{-1/2}(t-x)^{-1/2}\nu(dt) = \pi\, W((W\nu)^{\bullet})(y)$$

nous obtenons donc la

<u>PROPOSITION</u> 5 . <u>Soit</u> ν <u>une mesure bornée ou</u> σ-<u>finie sur</u> I ; <u>la mesure</u> $(W\nu)^{\bullet}$ <u>vérifie pour tout</u> $y>0$ <u>la relation</u>

$$W((W\nu)^{\bullet})(y) = \int_y^{+\infty} \nu(dt) \; .$$

<u>COROLLAIRES</u>

1 - <u>Pour qu'une mesure</u> ν <u>sur</u> I , <u>bornée ou</u> σ-<u>finie soit bornée, il suffit</u>

<u>que la fonction</u> $W((W\nu)^{\bullet})$ <u>soit bornée sur</u> I .

2 - <u>Si pour deux mesures</u> ν_1 <u>et</u> ν_2 <u>dont l'une au moins est bornée, on a l'égalité</u> $W\nu_1 = W\nu_2$ <u>presque partout sur</u> I , <u>alors ces mesures sont égales</u>.

La proposition 5 explique que W soit aussi appelée intégration fractionnaire d'ordre $1/2$; elle montre que la seule mesure dont la transformée de Weyl soit presque partout égale à une fonction donnée h ne peut être que définie par

$$\int_y^{+\infty} \nu(dt) = W(h^{\bullet})$$

si cette égalité a un sens ; ce problème est l'objet du paragraphe suivant.

§ 4 - RECHERCHE D'UNE MESURE RADIALE (PLANE) DE PROJECTION DONNEE.

Etant donnée une mesure p sur $\mathbb{R}$ nous cherchons s'il existe une mesure radiale m dans $\mathbb{R}^2$, de projection p ; dans [2], page 32, FELLER donne une application à un problème physique de la question analogue en dimension 3, et montre comment l'équation intégrale d'Abel peut intervenir en dimension 2 ; mais il se limite aux mesures radiales absolument continues dans ce dernier cas. Nous allons résoudre le problème plan de façon générale.

Nous considérons la mesure $p-p(\{0\})\,\delta$ où δ est la masse unité placée à l'origine de $\mathbb{R}$; d'après la proposition 3, cette mesure doit être absolument continue et nous cherchons donc une condition sur une fonction paire $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ intégrable, pour que la fonction $h(y)=(\pi y)^{1/2} \frac{g(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}$ soit pour presque tout $y > 0$, la transformée de Weyl en y, d'une mesure positive et bornée ν sur $I =]0, +\infty[$.

La proposition 5 du paragraphe 3 nous fournit des conditions nécessaires sur h : la fonction $W(h^{\bullet})$ décroit sur I de la valeur finie $\int_0^{+\infty} \nu(dt)$ à la valeur zéro ; notons que cette dernière condition entraine l'intégrabilité de h sur tous les intervalles $]0,a]$, $0 < a < +\infty$; on a en effet

$$\int_x^1 h(y)dy \leq \int_x^1 h(y)(y-x)^{-1/2}dy \leq W(h^{\bullet})(x) \leq \int_0^{+\infty} \nu(dt)$$

et ceci quel que soit $x < 1$. Nous allons montrer que cette condition est suffisante, en trois étapes.

<u>LEMME</u> 1 . <u>Si une fonction</u> $h : I \to [0, +\infty]$ <u>est intégrable sur</u> I , <u>et vérifie la condition</u>

(D_ℓ) $\qquad$ $W(h^{\bullet})$ <u>décroit sur</u> I , <u>de</u> ℓ (<u>fini</u>) <u>à</u> 0 ,

<u>il existe une mesure positive bornée</u> ν <u>unique sur</u> I , <u>telle que</u>

$$h = W\nu \quad \underline{\text{presque partout}}.$$

Démonstration : posons $g = W(h^{\bullet})$ et définissons la mesure ν par

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \nu(dt) \qquad x > 0 \ ;$$

pour montrer que h et $W\nu$ sont presque partout égales, il suffit de montrer que les deux mesures $(h)^{\bullet}$ et $(W\nu)^{\bullet}$, dont la première au moins est bornée, ont même transformée de Weyl (corollaire 2 de la proposition 5) ; c'est bien le cas puisque

$$W((W\nu)^{\bullet}) = g = W(h^{\bullet}) \ .$$

Nous allons nous affranchir de la condition d'intégrabilité de h à l'infini par un procédé de troncation.

<u>LEMME</u> 2 . <u>Soit (a_n) une suite croissante de nombres strictement positifs, de limite $+\infty$. Soit une fonction mesurable $h : I \to [0, +\infty]$ telle que $W(h^{\bullet})$ vérifie la condition (D_{ℓ}) du lemme 1 . Désignant par h_n la fonction égale à h sur $]0, a_n]$ et à 0 ailleurs, on peut affirmer que chaque h_n est égale presque partout sur I à la transformée $W\nu_n$ d'une certaine mesure bornée ν_n</u> .

Démonstration : posons $g_n = W(h_n^{\bullet})$; cette fonction est nulle sur $]a_n, +\infty[$; montrons qu'elle est décroissante (et positive) sur $]0, a_n]$; on a en effet

$$g_n(x) = g(x) - \pi^{-1/2} \int_{a_n}^{+\infty} (t-x)^{-1/2} h(t)\,dt \quad \text{pour} \quad 0 < x \le a_n$$

où $g = W(h^{\bullet})$. Puisque h est intégrable sur tous les intervalles $]0, a_n]$, chaque h_n est intégrable sur I , et le lemme 1 montre que

$$h_n = W\nu_n \quad \text{presque partout sur } I \ ,$$

où

$$g_n(x) = \int_x^{+\infty} \nu_n(dt) \ .$$

<u>LEMME</u> 3 . <u>Dans les hypothèses, et avec les notations du lemme 2 , on peut affirmer que la suite des mesures</u> ν_n <u>converge étroitement vers une mesure (bornée)</u> ν <u>telle que</u>

$$h = W\nu \quad \underline{\text{presque partout sur}} \quad I \; .$$

Démonstration : la relation établie entre g_n et g , au lemme 2 , montre que pour tout $x > 0$, $g(x) = \lim_n g_n(x)$.

Puisque $h_n \le h_{n+1}$, on trouve $g_n \le g_{n+1}$, et g est la **borne supérieure** de la suite g_n ; les fonctions g_n et g étant décroissantes sur I , on peut écrire

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{n \to \infty} g_n(x)\right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to 0} g_n(x)\right) , \quad \text{soit}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \ell = \lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} \nu_n(dt) \; .$$

Par conséquent la mesure ν définie par

$$g(x) = \int_x^{\infty} \nu(dt) \qquad x > 0 \; ,$$

est la limite étroite des mesures ν_n ; le corollaire 2 de la proposition 4 prouve alors que la mesure de densité $(\pi y)^{-1/2} W\nu(y)$ est la limite étroite des mesures de densités $(\pi y)^{-1/2} W\nu_n(y)$. Ces densités sont les fonctions $(\pi y)^{-1/2} h_n(y)$ (presque partout) ; sur tout intervalle compact J de I on a donc

$$\int_J W\nu(y)\,dy = \lim_n \int_J W\nu_n(y)\,dy = \lim_n \int_J h_n(y)\,dy$$

soit $\int_J W\nu(y)\,dy = \int_J h(y)\,dy$, ce qui établit le lemme, puisque la différence $W\nu - h$ doit être presque partout égale à une constante α , nulle nécessairement, la mesure de densité $\alpha(\pi y)^{-1/2}$ devant être bornée.

Ces trois lemmes permettent d'énoncer le

<u>THEOREME</u> 1 . <u>Une fonction mesurable</u> $h :]0,+\infty[\to [0,+\infty]$, <u>est égale presque partout à la transformée de Weyl d'une mesure positive sur</u> I , <u>de masse totale</u> ℓ <u>finie, si et seulement si la transformée de Weyl</u>

$$g(x) = W(h^{\bullet})(x) = (\pi)^{-1/2} \int_x^{+\infty} (t-x)^{-1/2} h(t)\,dt$$

<u>décroit de</u> ℓ <u>à</u> 0 <u>quand</u> x <u>croit de</u> 0 <u>à</u> $+\infty$. <u>La fonction</u> $\ell - g$ <u>est la fonction de répartition de la mesure cherchée</u>.

<u>Remarque</u> : La mesure trouvée est donc absolument continue si et seulement si il en est de même de la fonction g .

A l'aide de la proposition 4 on obtient la solution du problème de remontée

<u>THEOREME</u> 2 . <u>Une mesure absolument continue positive et bornée sur</u> $\mathbb{R}$, <u>de densité</u> g , <u>est la projection d'une mesure radiale (plane) de masse</u> ℓ , <u>ne chargeant pas l'origine, si et seulement si la fonction</u>

$$\gamma(y) = 2 \int_y^{+\infty} u g(u) (u^2 - y^2)^{-1/2}\, du$$

<u>décroit de</u> ℓ <u>à</u> 0 <u>quand</u> y <u>croit de</u> 0 à $+\infty$. <u>La fonction</u> $\ell - \gamma$ <u>est la fonction de répartition de l'indicatrice de la mesure radiale cherchée</u>.

<u>Exemples</u> :

1 - La mesure de densité $1/2$ sur l'intervalle $[-1,+1]$ est la projection de la mesure radiale d'indicatrice $1-(1-y^2)^{1/2}$, pour $0 \leq y \leq 1$.

2 - Toute mesure uniformément répartie sur la réunion des intervalles $[-2,-1]$ et $[1,2]$, n'est pas une projection de mesure radiale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTLETT M. S. - The Vector representation of a sample, Proc. Cambridge Philos. Soc. , Vol. 30 (1934), pp. 327-340 .

[2] FELLER W. - An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. II , Wiley, New-York, 1966 .

[3] MAGNUS W. , OBERHETTINGER F. , SONI R.P. - Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics, th. ed., Springer, Berlin, 1966 .