PAUL-ANDRÉ MEYER

Représentation intégrale des fonctions excessives. Résultats de Mokobodzki

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 196-208

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__196_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS EXCESSIVES
RÉSULTATS DE MOKOBODZKI(*)

MOKOBODZKI vient de démontrer plusieurs résultats fondamentaux sur les fonctions excessives, par rapport à une résolvante qui satisfait à l'hypothèse de continuité absolue. Parmi eux, l'existence d'une représentation intégrale de toute fonction excessive finie p.p. au moyen de fonctions excessives extrémales.

La première partie de l'exposé est consacrée aux très beaux lemmes sur les noyaux, que MOKOBODZKI a établis à partir d'une idée initiale de la thèse de GROTHENDIECK. La seconde partie traite de la représentation intégrale. Elle n'utilise pas la méthode des cônes de potentiels abstraits telle qu'elle a été exposée par MOKOBODZKI (Cours Peccot au Collège de France ; Séminaire Bourbaki de Mai 1970), mais la méthode "élémentaire" de ses premières démonstrations (non publiées).

§ 1 . NOYAUX BASIQUES

NOTATION.- $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ sont des espaces mesurables ; $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$ et $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$ sont les espaces de Banach des fonctions mesurables bornées sur E et F respectivement ; $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{E}})$ et $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{F}})$ les espaces de Banach des mesures bornées sur E et F. La boule unité de $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$ (par ex.) sera notée $\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{E}})$.

M est un noyau de E dans F, <u>positif</u> (MOKOBODZKI ne fait pas cette hypothèse), et <u>borné</u> ; M applique $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$ dans $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$, $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{E}})$ dans $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{F}})$. Noter toutefois que la définition 1 et la terminologie s'étendent à des noyaux non bornés !

DEFINITION 1.- <u>Soit</u> $\mu\in\underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{F}})$. <u>On dit que le noyau M est</u> de base μ <u>si pour tout</u> $x\in E$ <u>la mesure</u> $\varepsilon_x M$ <u>est absolument continue par rapport à</u> μ . <u>On dit que M est un noyau basique s'il existe</u> $\mu\in\underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{F}})$ <u>tel que M soit de base</u> μ.

(MOKOBODZKI emploie la terminologie " noyau absolument mesurable " au lieu de noyau basique).

Si M est de base μ, on peut faire opérer M de $L^\infty(\mu)$ dans $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$.

(*) Exposé de P.A.Meyer

Pour commencer, voici un rappel d'analyse fonctionnelle :

Soit $\mu \in \underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{F}})$, et soit $\underline{\underline{K}}$ la boule unité de $L^\infty(\mu)$; L^∞ étant le dual de L^1, $\underline{\underline{K}}$ est compacte pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$. Nous aurons besoin des propriétés de "séparabilité" suivantes :

a) Si la tribu $\underline{\underline{F}}$ est séparable, $\underline{\underline{K}}$ est compacte et <u>métrisable</u> pour la topologie $\sigma_\mu(L^\infty, L^1)$. En effet, pour vérifier que des $f_i \in \underline{\underline{K}}$ convergent faiblement vers f, il suffit de vérifier que $\int_A f_i \mu$ converge vers $\int_A f\mu$, A parcourant une algèbre de Boole dénombrable qui engendre $\underline{\underline{F}}$.

b) Même si la tribu $\underline{\underline{F}}$ n'est pas séparable, on peut extraire de toute suite (f_n) d'éléments de $\underline{\underline{K}}$ une <u>sous-suite</u> (f'_n) qui converge vers un $f \in \underline{\underline{K}}$ au sens de $\sigma_\mu(L^\infty, L^1)$. En effet, soit $\underline{\underline{F}}_0$ la tribu séparable engendrée par les f_n ; il existe d'après a) une sous-suite (f'_n) de (f_n) qui converge pour la topologie $\sigma_\mu(L^\infty(\underline{\underline{F}}_0), L^1(\underline{\underline{F}}_0))$, vers une fonction $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable $f \in \underline{\underline{K}}$. En prenant des espérances conditionnelles par rapport à $\underline{\underline{F}}_0$, on vérifie aussitôt que $f'_n \to f$ pour $\sigma_\mu(L^\infty(\underline{\underline{F}}), L^1(F))$.

Voici le premier résultat sur les noyaux basiques .

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> M <u>un noyau de base</u> μ. <u>On pose</u> $\underline{\underline{K}}=\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{F}})$, <u>et</u> $\underline{\underline{U}}=\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{K}})$.

1) $\underline{\underline{U}}$ <u>est compact pour la topologie de la convergence simple sur</u> E, <u>métrisable si</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>est séparable</u>.

2) <u>Même si</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>n'est pas séparable</u>, <u>on peut extraire de toute suite</u> (f_n) <u>d'éléments de</u> $\underline{\underline{U}}$ <u>une sous-suite qui converge simplement vers un élément de</u> $\underline{\underline{U}}$.

3) <u>Soit</u> $\lambda \in \underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{E}})$; $\underline{\underline{U}}$ <u>est compact dans</u> $L^1(\lambda)$ (<u>fort</u>), <u>et il existe une sous-tribu séparable</u> $\underline{\underline{F}}_s$ <u>de</u> $\underline{\underline{F}}$ (<u>dépendant de</u> λ) <u>telle que</u>

$$Mf = M(E_\mu[f|\underline{\underline{F}}_s]) \ \lambda\text{-p.p.} \quad \text{pour tout } f \in \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}}) .$$

4) <u>Il existe un noyau-fonction</u> $m(x,y) \geq 0$, $\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{F}}_s$<u>-mesurable</u>, <u>tel que pour tout</u> $f \in \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$ <u>on ait</u> <u>λ-p.p.</u>

$$Mf(x) = \int_F m(x,y) f(y) \mu(dy) .$$

DEMONSTRATION.- Si $\lambda \in \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{E}})$, la mesure λM appartient à $L^1(\mu)$, donc M est continu de $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}}) \subset L^\infty(\mu)$ muni de $\sigma_\mu(L^\infty, L^1)$ dans $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$ muni de $\sigma(\underline{\underline{B}}(E), \underline{\underline{M}}(E))$. Comme $\underline{\underline{K}}$ est compact (métrisable si $\underline{\underline{F}}$ est séparable), $\underline{\underline{U}}=M(\underline{\underline{K}})$ est compact (métrisable...) dans $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$ muni de $\sigma(\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{M}})$. Les mesures ε_x , $x \in E$, appartenant à $\underline{\underline{M}}(\underline{\underline{E}})$, $\sigma(\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}}), \underline{\underline{M}}(\underline{\underline{E}}))$ est plus fine que la topologie de la convergence simple, d'où 1).

2) On écrit $f_n=Mg_n$, avec $g_n\in\underline{\underline{K}}_\infty$, et on extrait une sous-suite (g'_n) qui converge vers $g\in\underline{\underline{K}}$ pour $\sigma_\mu(L^\infty,L^1)$, et on pose $f'_n=Mg'_n$, $f=Mg$: la sous-suite (f'_n) converge simplement vers $f\in\underline{\underline{U}}$.

3) Avec les notations de 2), les f'_n convergent vers f dans $L^1(\lambda)$ (théorème de Lebesgue). Comme $L^1(\lambda)$ est un espace métrique, $\underline{\underline{U}}$ est compact dans $L^1(\lambda)$.

Passons à l'existence de $\underline{\underline{F}}_s$. Soit (h_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{U}}$, dense dans $\underline{\underline{U}}$ pour la topologie forte de $L^1(\lambda)$. La mesure $(h_n.\lambda)M$ est absolument continue par rapport à μ, choisissons en une densité g_n . Nous allons montrer que la tribu $\underline{\underline{F}}_s$ engendrée par les g_n (et qui est évidemment séparable) répond à la question.

Soit $f\in\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$; posons $f'=f-E_\mu[f|\underline{\underline{F}}_s]$. On a

$$0=\langle f',g_n\rangle_\mu = \langle f',g_n.\mu\rangle = \langle f',(h_n.\lambda)M\rangle = \langle Mf',h_n.\lambda\rangle = \langle Mf',h_n\rangle_\lambda$$

Mf' est orthogonale à h_n pour tout n , donc à tout $h\in\underline{\underline{U}}$; en prenant h proportionnelle à Mf', il vient que $Mf'=0$ λ-p.p. .

4) Une application bien connue, due à DOOB, du théorème de convergence des martingales nous permet de choisir un noyau-fonction $m(x,y)$ ≥ 0, $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{F}}_s$-mesurable, tel qu'on ait pour $f\in\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}}_s)$

$$Mf(x) = \int m(x,y)f(y)\mu(dy)$$

si $f\in\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$, soit $\overline{f}=E_\mu[f|\underline{\underline{F}}_s]$; nous avons vu que $Mf=M\overline{f}$ λ-presque partout. D'autre part, $m(x,.)$ est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable pour tout $x\in E$, et on a donc

$$\int m(x,y)f(y)\mu(dy) = \int m(x,y)\overline{f}(y)\mu(dy) \quad \text{partout}$$

Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE.- <u>Considérons deux noyaux basiques</u> M <u>et</u> N

$$(E,\underline{\underline{E}}) \xrightarrow{M} (F,\underline{\underline{F}})_{\mu} \longrightarrow (G,\underline{\underline{G}})_{\nu} \quad (\ M \text{ de base } \mu,\ N \text{ de base } \nu\ )$$

<u>et soit</u> P <u>le noyau</u> MN. <u>L'ensemble</u> $P(\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{G}}))$ <u>est alors compact métrisable pour la topologie de la convergence simple sur</u> E (<u>sans restriction de séparabilité sur</u> $\underline{\underline{G}}$), <u>et</u> P <u>est donné par un noyau fonction</u> $p(x,z)\geq 0$, $\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{G}}$-<u>mesurable</u> :

$$Pg(x) = \int_G p(x,z)g(z)\nu(dz)$$

DEMONSTRATION.- $N(\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{G}})$ est compact (métrique) dans $L^1(\mu)$, d'après la prop.1, 3). Or si des f_n bornées convergent dans $L^1(\mu)$, les Mf_n convergent simplement, d'où la première propriété. Pour la seconde, choisissons un noyau $n(y,z)$ tel que l'on ait pour $g\in\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{G}})$

$$Ng(y) = \int n(y,z)g(z)\nu(dz) \quad \mu\text{-p.p.}$$

et posons $p(x,z) = \int M(x,dy)n(y,z)$. On vérifie aussitôt que p satisfait à l'énoncé.

NOYAUX COMPACTS

Voici un lemme très intéressant, qui généralise le théorème bien connu d'EGOROV

PROPOSITION 2.- Soit H un ensemble de fonctions $\underline{\underline{E}}$-mesurables sur E, compact et métrisable pour la topologie de la convergence simple. Soit $\lambda \in \underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{E}})$. Il existe une suite (A_n) d'éléments disjoints de $\underline{\underline{E}}$, dont la réunion porte λ, telle que pour tout n l'ensemble $H|_{A_n}$ des restrictions à A_n des éléments de H soit compact pour la convergence uniforme.

DEMONSTRATION.- Pour tout $x \in E$ soit ε_x la fonction $f \longmapsto f(x)$ sur H ; ε_x est continue sur H muni de la topologie de la convergence simple, et $\varepsilon : x \longmapsto \varepsilon_x$ est une application de E dans $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{H}})$; or $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{H}})$ est polonais, ε est mesurable, et la mesure image $\varepsilon(\lambda)$ sur $\underline{\underline{C}}(\underline{\underline{H}})$ est intérieurement régulière, portée par une réunion dénombrable de compacts disjoints B_n. On pose $A_n = \varepsilon^{-1}(B_n)$; ces ensembles sont mesurables, disjoints, leur réunion porte λ, et on a la propriété de l'énoncé en remarquant que les compacts B_n sont équicontinus sur $\underline{\underline{H}}$ d'après le théorème d'Ascoli. Si des $h_k \in \underline{\underline{H}}$ convergent simplement vers $h \in \underline{\underline{H}}$, leurs restrictions à chaque A_n convergent uniformément vers $h|_{A_n}$.

COROLLAIRE.- Reprenons les notations de la prop.1. Soit $\lambda \in \underline{\underline{M}}^+(\underline{\underline{E}})$; E est réunion, à un ensemble négligeable près, d'ensembles disjoints $A_n \in \underline{\underline{E}}$ tels que, pour tout n, $\underline{\underline{U}}|_{A_n}$ soit fortement compact dans $L^\infty(\lambda)$.

DEMONSTRATION.- Lorsque $\underline{\underline{F}}$ est séparable, cela résulte des propositions 1, 1) , et 2 - on a même compacité de $\underline{\underline{U}}|_{A_n}$ dans $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$. Dans le cas général, on applique ce qui précède à $\underline{\underline{F}}_s$ (prop. 1, 3)).

DEFINITION.- Un noyau borné positif M de E dans F est dit compact s'il transforme $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{F}})$ en une partie de $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$ compacte pour la convergence uniforme.

Nous reprenons les notations du corollaire de la proposition 1 .

PROPOSITION 3.- Le noyau P (composé des noyaux basiques M et N) est somme d'une série de noyaux compacts.

DEMONSTRATION.- Nous choisissons une tribu séparable $\underline{\underline{G}}_s \subset \underline{\underline{G}}$ telle que $Ng = N(E_\nu[g|\underline{\underline{G}}_s])$ μ-p.p. pour $g\in\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{G}})$ (prop.1, 3)) ; nous appliquons la prop.2 à $N(\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{G}}_s))$, et nous en déduisons des $A_n \in \underline{\underline{F}}$ disjoints dont la réunion porte μ, tels que les ensembles $N(\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{G}}))|_{A_n}$ soient compacts dans $L^\infty(\mu)$. On pose alors

$$P_n g = M(I_{A_n}.Ng)$$

Les noyaux P_n sont alors compacts, et on a $P=\sum_n P_n$.

Nous obtiendrons au paragraphe suivant, pour un noyau de théorie du potentiel, un résultat bien meilleur (prop.4).

§ 2 . APPLICATION A LA THEORIE DU POTENTIEL

Nous nous donnons, sur un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$, un noyau propre V qui satisfait au principe complet du maximum. Les fonctions de la forme Vf ($f\geq 0$) sont appelées <u>potentiels</u>. Une fonction f est dite <u>excessive</u> s'il existe une suite croissante Vf_n de potentiels telle que $f=\lim_n Vf_n$. Un ensemble A est <u>de potentiel nul</u> si $V(I_A)=0$; l'expression " presque partout" est synonyme de "sauf sur un ensemble de potentiel nul" .

On se propose dans ce qui suit d'étudier le <u>cône convexe des fonctions excessives finies p.p.</u> , et nous nous permettrons tous les changements de noyau, d'espace... qui préserveront la structure de ce cône.

Nous ferons sur V une seule hypothèse :

HYPOTHESE FONDAMENTALE.- V <u>est basique</u> .

Nous désignerons par λ une mesure (positive bornée) telle que V soit de base λ.

Il est bien connu (d'après HUNT) que l'on peut trouver une fonction a partout >0 sur E, telle que Va soit bornée. Le noyau V^1 : $f\mapsto V(af)$ sur E est alors borné, il satisfait au principe complet du maximum, admet les mêmes potentiels et les mêmes fonctions excessives que V. De plus (toujours d'après HUNT), il existe une résolvante sousmarkovienne (V^1_p) telle que $V^1=V^1_0$, et les fonctions excessives sont caractérisées par les propriétés

$$pV_p^1 f \leqq f \text{ pour tout } p>0 \quad , \quad pV_p^1 f \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f$$

Les noyaux V_p^1 sont de base λ. Voici deux remarques simples et bien connues.

REMARQUE 1.- Deux fonctions excessives f et g égales λ-p.p. sont égales.

En effet, on a $pV_p^1 f = pV_p^1 g$ partout, d'où f=g lorsque $p\to\infty$.

REMARQUE 2.- Soit $\mu=\lambda V^1$. Le noyau V est de base μ, et il y a identité entre les ensembles μ-négligeables et les ensembles de potentiel nul.

Si A est de potentiel nul, on a $\mu(A) = < \lambda V^1, I_A > = < \lambda, V^1 I_A > = 0$. Inversement, si A est μ-négligeable, on a $< \lambda, V^1 I_A > = 0$, donc la fonction excessive $V^1 I_A$ est nulle λ-p.p., donc partout, et A est de potentiel nul. Il en résulte que V est de base μ.

Le résultat suivant est la clef de toute la suite.

THEOREME 1.- Il existe une fonction c, partout >0 et bornée, telle que le noyau $V^2 : f \longmapsto V(cf)$ soit compact.

DEMONSTRATION.- Soit $\underline{\underline{K}}$ la boule unité de $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{E}})$; nous savons d'après la proposition 1 que $\underline{\underline{U}}=V^1(\underline{\underline{K}})$ est compact dans $L^1(\lambda)$. Or soient f_n des éléments de $\underline{\underline{U}}$ qui convergent dans $L^1(\lambda)$ vers $f \in \underline{\underline{U}}$; je dis qu'ils convergent simplement vers f. D'abord, comme les f_n sont bornées et convergent en mesure vers f, on a $pV_p^1 f_n \longrightarrow pV_p^1 f$ pour tout p. Ensuite, posons $f_n = V^1 g_n$, $f = V^1 g$ ($g_n, g \in \underline{\underline{K}}$) ; on a donc $|f_n - pV_p^1 f_n| \leqq V_p^1 |g_n| \leqq V_p^1 1 \leqq 1/p$, et de même pour $|f - pV_p^1 f|$, d'où le résultat cherché.

Il en résulte aussitôt que sur $\underline{\underline{U}}$ la topologie de $L^1(\lambda)$ et celle de la convergence simple coincident, et que $\underline{\underline{U}}$ est compact métrisable pour la seconde. La proposition 2 nous montre qu'il existe des $A_n \in \underline{\underline{E}}$ disjoints dont la réunion porte λ, tels que pour chaque n l'ensemble $\underline{\underline{U}}|A_n$ soit compact pour la convergence uniforme sur A_n.

Montrons que le noyau $f \longmapsto V^1(I_{A_n} f)$ est compact : soit (g_p) une suite d'éléments de $\underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{E}})$; soit (g'_p) une sous-suite qui converge vers g $\in \underline{\underline{B}}_1(\underline{\underline{E}})$ au sens de $\sigma_\lambda(L^\infty, L^1)$; les fonctions $f'_p = V^1(I_{A_n} g'_p)$ convergent alors vers $V^1(I_{A_n} g)$ uniformément sur A_n. Mais d'après le principe complet du maximum, les $I_{A_n} g'_p$ étant nulles hors de A_n, ces fonctions convergent vers $V^1(I_{A_n} g)$ uniformément sur E, et cela entraîne que le noyau est compact.

Choisissons une fonction b, partout >0 , prenant sur chaque A_n une valeur constante b_n, et telle que $\sum_n b_n < \infty$. L'opérateur $f \mapsto V^1(bf)$ est alors somme d'une série (convergente en norme) d'opérateurs compacts, il est donc compact. Il ne reste plus qu'à poser c=ab.

COROLLAIRE.- <u>La tribu $\underline{\underline{E}}_e$ engendrée par les fonctions excessives est séparable</u>.

En effet, elle est engendrée par l'ensemble $V^2(\underline{\underline{B}}_1^+(\underline{\underline{E}}))$, qui est compact pour la convergence uniforme sur E.

Si nous restreignons la tribu à $\underline{\underline{E}}_e$ (i.e., si nous considérons V comme un noyau de $\underline{\underline{E}}_e$ dans $\underline{\underline{E}}_e$), nous ne changeons <u>ni le cône des potentiels</u> , <u>ni</u> (par conséquent) <u>celui des fonctions excessives</u>. En effet, soit g une fonction $\underline{\underline{E}}$-mesurable positive et bornée, et soit $f=V^1g$; les fonctions $g_p=p(f-pV_p^1f)$ sont $\underline{\underline{E}}_e$-mesurables et bornées . Désignons par g' une valeur d'adhérence de la suite $(g_p)_{p\in\mathbb{N}}$ lorsque $p\to\infty$, pour la topologie $\sigma_\lambda(L^\infty,L^1)$; g' peut être supposée $\underline{\underline{E}}_e$-mesurable, et on a $V^1(g')=\lim V^1(g_p') = \lim pV_p^1f = f$.

En définitive, quitte à changer de notations et à poser $V=V^2$, $\underline{\underline{E}}=\underline{\underline{E}}_e$, nous sommes ramenés à étudier les cônes de fonctions excessives et de potentiels sous les hypothèses particulières suivantes :

<u>Le noyau</u> V <u>est compact, de base</u> μ. <u>Il est associé à une résolvante sousmarkovienne</u> (V_p). <u>La mesure</u> μ <u>est de la forme</u> λV, <u>où</u> λ <u>est elle même une mesure de base pour</u> V. <u>La tribu</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est séparable, et engendrée par les fonctions excessives</u>.

Nous pouvons aussi passer au quotient suivant la relation d'équivalence dont les classes sont les atomes de $\underline{\underline{E}}$: cela revient à supposer que <u>les fonctions excessives séparent E</u> . Il y a alors au plus un point x où s'annulent toutes les fonctions excessives : $V(I_{\{x\}})$ vaut alors 0 en x, donc partout, et nous pouvons chasser x de E, et supposer enfin que <u>le noyau V est strictement positif</u>(*).

CONSTRUCTION D'UNE RESOLVANTE DUALE

Les noyaux V_p, V étant de base μ, et la tribu $\underline{\underline{E}}$ étant séparable, ces noyaux sont donnés par des densités positives

(*) On a un certain arbitraire dans le choix de V et μ. C'est important pour la suite.

$$V_p(x,dy) = v_p(x,y)\mu(dy) \quad , \quad V(x,dy) = v(x,y)\mu(dy)$$

Définissons des noyaux $\hat{W}_p$, $\hat{W}$ par les formules

$$\hat{W}_p(x,dy) = \mu(dy)v_p(y,x) \quad , \quad \hat{W}(x,dy) = \mu(dy)v(y,x)$$

Nous avons les relations évidentes de dualité par rapport à μ

$$< V_p f,g >_\mu = < f,\hat{W}_p g >_\mu \quad , < Vf,g >_\mu = < f,\hat{W}g >_\mu$$

Il faut noter que ces relations caractérisent les noyaux $\hat{W}_p$, $\hat{W}$ à des ensembles négligeables près. Si $\hat{A}$, par exemple, est un second noyau tel que $< Vf,g >_\mu = < f,\hat{A}g >_\mu$, on a pour tout f $< f,\hat{A}g >_\mu = < f,\hat{W}g >_\mu$, donc $\hat{A}g = \hat{W}g$ μ-p.p., et enfin (la tribu $\underline{\underline{E}}$ étant séparable) $\hat{A}(x,dy) = \hat{W}(x,dy)$ pour μ-presque tout x .

Notons quelques propriétés faciles :

1) $< V1,1 >_\mu < \infty$, donc $\hat{W}1$ est finie μ-p.p.

2) $< f,p\hat{W}_p 1 >_\mu = < pV_p f,1 >_\mu = < p\mu V_p \; , f > \leq < \mu,f > = < f,1 >_\mu$ si $f \geq 0$

(l'inégalité provient du fait que $\mu=\lambda V$ est une mesure excessive). On a donc $p\hat{W}_p 1 \leq 1$ μ-p.p. .

3) On a pour $p \geq 0$, $q \geq 0$

$$(+) \qquad (q-p)\hat{W}_p\hat{W}_q(x,dy) = \hat{W}_p(x,dy)-\hat{W}_q(x,dy) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x$$

En effet les deux membres sont des noyaux en dualité avec $V_p - V_q$.

Soit A l'ensemble des x tels que (+) ait lieu pour tout couple (p,q) de rationnels ≥ 0 , tels aussi que $p\hat{W}_p(x,1) \leq 1$ et $\hat{W}(x,1) < \infty$. Posons pour p rationnel

$$\hat{W}^1(x,dy) = \hat{W}(x,dy) \text{ si } x \in A \; , \; \hat{W}^1(x,dy)=0 \text{ si } x \in A^c$$

(définition analogue pour $\hat{W}^1_p(x,dy)$). Comme A^c est μ-négligeable, et que les noyaux $\hat{W}_p$ sont de base μ, cette formule définit une résolvante sousmarkovienne pour p et q rationnels, et le prolongement aux réels est immédiat.

Nous choisissons maintenant une fonction b bornée, partout > 0, telle que le noyau $\hat{W}^2$: $f \mapsto \hat{W}^1(bf)$ soit compact (théorème 1). Nous introduisons le noyau V^2: $f \mapsto V(bf)$, qui a les mêmes fonctions excessives que V, et qui est encore compact . Les noyaux $\hat{W}^2$ et V^2 sont en dualité par rapport à la mesure $\mu^2=\lambda V^2=b\mu$. Il leur correspond deux résolvantes que nous noterons V_p^2 et $\hat{W}_p^2$; il est facile de vérifier qu'elles sont en dualité par rapport à μ^2 (*).

Nous utilisons maintenant le résultat suivant de MOKOBODZKI, pour lequel on pourra consulter le Séminaire de Strasbourg IV : si l'on a une résolvante (U_p), et si g est mesurable bornée , $nU_n g$ converge p.p. lorsque $n \to \infty$, et la limite est égale à g p.p. si g est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les fonctions excessives. En particulier, si f est $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée, $nV_n^2\hat{W}^2f \to \hat{W}^2f$ p.p. (donc μ-p.p.). Le noyau $\hat{W}^2$ étant compact, il existe un ensemble N μ-négligeable fixe tel que pour $x \notin N$ on ait $\lim_n nV_n^2\hat{W}^2f^x = \hat{W}^2f^x$ pour toute fonction $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée f .

Pour faire la même chose de l'autre côté, nous notons d'abord que les ensembles de potentiel nul pour la résolvante duale $(\hat{W}_p^2)$ sont exactement les ensembles μ-négligeables. En effet $\mu(A)=0 \Rightarrow \hat{W}^2(I_A)=0$ puisque $\hat{W}$ est de base μ, et inversement $\hat{W}^2(I_A)=0 \Rightarrow < 1,\hat{W}^2(I_A) >_\mu=0=< V^21,I_A >_\mu$, donc $\mu(A)=0$ puisque V^21 est partout >0 .

Soit f $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée, et soit $f^*=\lim_n n\hat{W}_n^2f$, limite qui existe p.p. pour la résolvante $(\hat{W}_p^2)$, donc μ-p.p. . Montrons que $f=f^*$ μ-p.p. . On a si g est $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée

$$< g,f^* >_\mu = \lim_n < g,n\hat{W}_n^2f >_\mu = \lim_n < nV_n^2g,f >_\mu = < g,f >_\mu$$

puisque $nV_n^2g \to g$ μ-p.p. . Le résultat cherché s'en déduit aussitôt. Comme plus haut, on voit alors qu'il existe un ensemble μ-négligeable N' tel que pour $x \notin N'$ on ait $\lim_n n\hat{W}_n^2V^2f^x = V^2f^x$ pour toute f $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée.

<u>Nous jetons maintenant les ensembles N et N'</u> hors de l'espace d'états E. Comme ces ensembles sont μ-négligeables, ni les résolvantes, ni les fonctions excessives ne s'en aperçoivent, et les deux relations

$$\lim_n nV_n^2\hat{W}^2f = \hat{W}^2f \quad , \quad \lim_n n\hat{W}_n^2\hat{V}^2f = \hat{V}^2f$$

ont lieu partout, pour toute f bornée. Cela a plusieurs conséquences intéressantes.

- La résolvante $\hat{W}_p^2$ (donc le noyau $\hat{W}^2$) sépare les points. En effet,

(*) Pour p assez petit, V_p^2 est somme de la série $\sum(-1)^np^n(V^2)^{n+1}$, et la dualité est immédiate. On l'obtient pour tout p par prolongement analytique sur $\mathbb{R}_+$.

les fonctions V^2f les séparent, et $V^2f = \lim_n n\hat{W}^2_n V^2 f$.

- Le noyau $\hat{W}^2$ est strictement positif (propriété laissée au lecteur)

- La tribu $\underline{\underline{E}}$ est aussi engendrée par les fonctions <u>coexcessives</u> , i.e. les fonctions excessives par rapport à la résolvante duale $(\hat{W}^2_p)$. (Nous laissons cette propriété au lecteur).

On peut encore donner un petit coup de pouce à l'espace d'états. Soit $\underline{\underline{S}}$ le cône convexe $\wedge$-stable engendré par les fonctions V^2f ($f \in \underline{\underline{B}}^+(\underline{\underline{E}})$) et par les constantes positives ; les éléments de $\underline{\underline{S}}$ sont des fonctions surmédianes sur E. Posons

$$A = \{ x \in E : nV_n f^x \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{pour tout } f \in \underline{\underline{S}} \}$$

Le noyau V^2 étant compact, on vérifie aisément que $\underline{\underline{S}}$ est séparable pour la convergence uniforme, et on en déduit que A^c est μ-négligeable. Si f et g sont des fonctions excessives, la fonction surmédiane $f \wedge g$ est égale partout sur A à sa régularisée excessive. Si nous chassons de l'espace d'états A^c, et l'ensemble analogue $\hat{A}^c$ associé à la résolvante duale, nous avons stabilisé pour l'opération $\wedge$ les cônes de fonctions excessives et coexcessives, et les constantes positives sont excessives et coexcessives.

Revenons à des notations raisonnables : $\mu, V, \hat{V}$ au lieu de $\mu^2, V^2, \hat{W}^2$, et récapitulons toutes les propriétés obtenues jusqu'à maintenant :

<u>La tribu $\underline{\underline{E}}$ est séparable, engendrée par les fonctions excessives, ou par les fonctions coexcessives</u>.
<u>Les noyaux</u> V <u>et</u> $\hat{V}$ <u>séparent</u> E, <u>sont compacts et strictement positifs</u>. <u>Les cônes de fonctions excessives ou coexcessives sont $\wedge$-stables, et contiennent les constantes positives</u>.
<u>La mesure</u> $\mu = \lambda V$ <u>est bornée. Il y a identité entre ensembles</u> μ-<u>négligeables et ensembles de potentiel ou de copotentiel nul. Les noyaux</u> V <u>et</u> $\hat{V}$ <u>sont en dualité par rapport à</u> μ.

Ce sont là les propriétés qui nous serviront à faire la représentation intégrale.

§ 3. REPRESENTATION INTEGRALE DES FONCTIONS EXCESSIVES

Nous allons nous occuper d'abord de la représentation intégrale des fonctions excessives <u>μ-intégrables</u> . Nous verrons ensuite que ce n'est une restriction qu'en apparence.

Nous commençons par rappeler un résultat fondamental dû à FERNIQUE :
Soit $\underline{\underline{M}}^+(T)$ le cône convexe des mesures (de Radon) positives bornées sur un espace complètement régulier T, muni de la topologie étroite. Soit $\underline{\underline{C}}$ un cône convexe fermé contenu dans $\underline{\underline{M}}^+(T)$. Alors $\underline{\underline{C}}$ est réunion de chapeaux de la forme $\underline{\underline{H}} = \{ \mu \in \underline{\underline{C}} : < \mu,f > \leq 1 \}$, où f est borélienne ≥ 0.(*)

En voici brièvement la démonstration. Soit $\theta \in \underline{\underline{C}}$; choisissons des compacts K_n tels que $\theta(K_n^c) \leq 2^{-n}$, et soit f_n l'indicatrice de K_n^c ; la fonction $f = c(1+\sum_n nf_n)$(*), où la constante c est choisie telle que $<\theta,f> = 1$, est alors semi-continue inférieurement, bornée inférieurement, et pour chaque nombre $t>0$ l'ensemble $\{f \leq t\}$ est compact. On vérifie alors aussitôt que $\underline{\underline{H}}$ est étroitement fermé, et satisfait à la condition de PROKHOROV, donc est étroitement compact : c'est un chapeau de $\underline{\underline{C}}$ contenant θ.

Noter que si T est métrique séparable, $\underline{\underline{M}}^+(T)$ est métrisable, les chapeaux précédents le sont donc aussi, et le théorème de représentation intégrale au moyen des éléments extrémaux s'applique donc à $\underline{\underline{C}}$.

Appliquons cela aux fonctions excessives. D'après KUNITA-WATANABE, l'application $u \longmapsto u.\mu$ est une bijection du cône des fonctions excessives μ-intégrables sur le cône des mesures coexcessives bornées. Soit F le compactifié de E relativement aux fonctions $\hat{V}f$, $f \in \underline{\underline{B}}_1^+(\underline{\underline{E}})$: c'est une compactification du type de MARTIN, métrisable du fait que $\hat{V}$ est un opérateur compact. Nous munirons E de la topologie (complètement régulière) induite par F - en particulier, les " compacts" de E ci-dessous seront relatifs à cette topologie. Les fonctions coexcessives sur E sont semi-continues inférieurement. D'après la prop.2 appliquée à $\hat{V}(\underline{\underline{B}}_1^+(\underline{\underline{E}}))$, toute mesure bornée sur E est portée par la réunion d'une suite de compacts métrisables, et est donc une mesure de Radon sur E.

PROPOSITION 4.- Le cône des fonctions excessives μ-intégrables, identifié au cône des mesures coexcessives bornées sur E, et muni de la topologie étroite, est réunion de chapeaux métrisables de la forme $H=\{u : <u,f>_\mu \leq 1\}$, où f est borélienne positive.(*)

Tout revient à montrer que le cône des mesures coexcessives bornées sur E est étroitement fermé. Remarquons d'abord qu'il y a identité entre mesures coexcessives et mesures cosurmédianes (bornées). Soit en effet γ une mesure bornée cosurmédiane, et soit γ^* sa régularisée coexcessive.

(*) Noter que l'on peut choisir une fonction f bornée inférieurement sur E.

Si f est une fonction coexcessive bornée, on a

$$< \gamma^*,f > = \lim_n < n\gamma\hat{V}_n,f > = \lim_n < \gamma,\, n\hat{V}_n f > = < \gamma,f >$$

Or le cône des fonctions coexcessives bornées est $\wedge$-stable, contient les constantes et engendre la tribu $\underline{\underline{E}}$, dcnc $\gamma = \gamma^*$.

La résolvante $(\hat{V}_p)$ transforme toutes les fonctions boréliennes bornées en fonctions continues (car $V_p f = V(f-pV_p f)$). Il en résulte que le cône des mesures cosurmédianes bornées est étroitement fermé, et la proposition 4 résulte du théorème de FERNIQUE.

La topologie étroite n'est pas suffisamment forte pour les besoins de la théorie du potentiel. Aussi allons nous préciser la proposition 4. Les références à FM dans la démonstration renvoient à <u>la Frontière de MARTIN</u> (Lecture Notes in M. vol. 77, Springer 1968).

PROPOSITION 5.- <u>Sur le cône des fonctions excessives μ-intégrables, la topologie étroite et la topologie de $L^1(\mu)$ coïncident</u>.

DEMONSTRATION.- Tout revient à montrer que si u_n $(n\in\mathbb{N})$ et u sont des fonctions excessives μ-intégrables, et si $u_n.\mu \to u.\mu$ étroitement, alors $u_n \to u$ dans $L^1(\mu)$.

Nous notons d'abord (KUNITA-WATANABE) que pour tout x la mesure p-excessive $\varepsilon_x V_p$ a une densité p-coexcessive g_p par rapport à μ ; g_p est ici semi-continue inférieurement, et on a donc $< u,g_p >_\mu \leqq$ $\liminf_n < u_n,g_p >_\mu$, ou $pV_p u \leqq \liminf_n pV_p u_n \leqq \liminf_n u_n$, et enfin $u \leqq \liminf_n u_n$.

D'après le lemme 15 du chap.II de FM, la convergence de la suite (u_n) vers u dans L^1 est alors équivalente à la propriété suivante : pour toute f mesurable positive bornée , $\int u_n f\mu \to \int uf\mu$.

Soit a une valeur d'adhérence de la suite $(\int u_n f\mu)$; il suffit de montrer que $a=\int uf\mu$. Soit (u'_n) une suite extraite de (u_n), telle que $\lim_n \int u_n f\mu = a$, et que u'_n converge p.p. vers une fonction excessive w (FM, chap.II, th.16, p.59). Comme $u \leqq \liminf_n u'_n$ on a $u \leqq w$ p.p.. Mais d'autre part, si ϕ est continue bornée positive sur E, le lemme de Fatou nous donne $< \phi,w > \leqq \liminf_n < \phi,u'_n > = < \phi,u >$, donc $w \leqq u$ p.p., et finalement w=u.

Les u'_n convergent donc p.p. vers u, et $\int u'_n\mu \to \int u\mu$. D'après un lemme bien connu, cela entraîne que $u'_n \to u$ dans L^1, donc $\int fu'_n\mu \to \int fu\mu$

et enfin $a=\int fu\mu$, ce qu'on cherchait.

Nous allons maintenant étendre la représentation intégrale aux fonctions excessives non nécessairement μ-intégrables. La notation $L^1_{loc}(\mu)$ désigne comme d'habitude l'espace des fonctions μ-intégrables sur tout compact de E, muni de ses semi-normes naturelles.

Le lemme suivant est l'une des découvertes de MOKOBODZKI : il entraîne en particulier l'existence de mesures intégrant toutes les fonctions excessives finies p.p.

LEMME.- Toute fonction excessive u finie p.p. appartient à L^1_{loc}.

DEMONSTRATION.- u étant finie p.p., choisissons une fonction bornée a partout >0 telle que $\int a u\mu < \infty$. Nous avons alors pour p>0

$$< u, p\hat{V}_p a >_\mu = < pV_p u, a >_\mu \leqq < u, a >_\mu < \infty$$

La fonction $p\hat{V}_p a$ est partout >0 , et continue, donc bornée inférieurement sur tout compact K par une constante $h_K>0$. Alors $\int_K u\mu \leqq \frac{1}{h_K} < u, p\hat{V}_p a >_\mu < \infty$ et le lemme est établi.

Voici le résultat final. On notera que la topologie de l'énoncé n'est pas intrinsèque : elle dépend du choix de la mesure de base μ (en dépend elle vraiment ?).

THEOREME 2.- Le cône $\underline{\underline{C}}$ des fonctions excessives finies p.p., muni de la topologie de $L^1_{loc}(\mu)$, est réunion de chapeaux métrisables.

DEMONSTRATION.- Soit $u\in\underline{\underline{C}}$; nous allons construire un chapeau contenant u. Soit a une fonction bornée partout >0 telle que $\int a u\mu<\infty$. Quitte à remplacer a par $p\hat{V}_p a$ comme ci-dessus, nous pouvons supposer a continue. Posons $\mu'=a\mu$, et soient V' et $\hat{V}'$ les noyaux $f\mapsto V(af)$, $f\mapsto\hat{V}(af)$. Le triplet $(\mu',V',\hat{V}')$ satisfait aux mêmes propriétés que (μ,V,V') [fin du paragraphe 2], avec les mêmes fonctions excessives ou coexcessives. Les propositions 4 et 5 s'appliquent donc au cône $\underline{\underline{C}}'$ des fonctions excessives μ'-intégrables. La fonction u est donc contenue dans un chapeau de $\underline{\underline{C}}'$ de la forme $H=\{ v\in\underline{\underline{C}}' : <v,f>_{\mu'} \leqq 1\}$, où f est borélienne et bornée inférieurement sur E, et H est compact pour la topologie de $L^1(\mu')$, plus forte que celle de $L^1_{loc}(\mu)$. On conclut en remarquant que $H=\{v\in\underline{\underline{C}} : <v,f>_{\mu'} \leqq 1\}$, de sorte que H est aussi un chapeau de $\underline{\underline{C}}$.