SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

# Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 5 (1971), p. 191-195
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__191_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

# DEMONSTRATION SIMPLIFIEE D'UN THEOREME DE KNIGHT

par P.A. Meyer

Le résultat suivant est bien connu : il est dû à Paul LEVY, et on sait maintenant le démontrer très simplement, au moyen de la formule de changement de variables dans les intégrales stochastiques ( voir la démonstration de KUNITA-WATANABE, dans [2] p.110 )

THEOREME 1.- <u>Soient</u> $X^1, X^2 \dots X^n$ <u>des martingales continues</u> ( <u>définies sur un même espace</u> $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, <u>relatives à une même famille de tribus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$) <u>telles que</u>

$$X_0^i = 0 \ \underline{\text{pour}}\ i=1,\dots,n$$

$$<X^i, X^i>_t = t \ \underline{\text{pour}}\ i=1,\dots,n$$

$$<X^i, X^j>_t = 0 \ \underline{\text{pour}}\ i=1,\dots,n\ ,\ j=1,\dots,n\ ,\ i \neq j\ .$$

<u>Alors le processus</u> $X=(X^1,\dots,X^n)$ <u>est un mouvement brownien à</u> n <u>dimensions</u>.

Supposons maintenant que les martingales soient telles que $X_0^i = 0$, $< X^i, X^j > = 0$, mais ne satisfassent pas à la seconde condition. Posons $A_t^i = < X^i, X^i>_t$ , et désignons par $\tau_{.}^i$ la fonction réciproque de $A_{.}^i$ (*) Le théorème 1 entraîne aussitôt le résultat suivant :

COROLLAIRE.- <u>Supposons que</u> $A^1 = A^2 = \dots = A^n$ , <u>et que l'on ait</u> $\lim_{t\to\infty} A_t^i = +\infty$. <u>Notons</u> $\tau$ <u>la valeur commune des processus</u> $\tau^i$. <u>Alors le processus</u> $X_t = (X^1_{\tau_t}, X^2_{\tau_t}, \dots, X^n_{\tau_t})$ <u>est un mouvement brownien à</u> n <u>dimensions</u>.

F.KNIGHT a présenté à Oberwolfach en Mai 1970 le théorème suivant, qui étend ce corollaire de manière frappante :

THEOREME 2. <u>Supposons seulement que</u> $\lim_{t\to\infty} A_t^i = +\infty$ <u>pour</u> $i=1,\dots,n$. <u>Alors le processus</u> $X_t = (X^1_{\tau^1_t}, X^2_{\tau^2_t}, \dots X^n_{\tau^n_t})$ <u>est un mouvement brownien à</u> n <u>dimensions</u>.

---

(*) $\tau_s^i = \inf \{ u : A_u^i > s \}$ ; on a $A^i_{\tau^i_s} = s$ , et $\tau^i_{A^i_s}$ = premier point de croissance de $A_{.}^i$ à droite de s.

L'énoncé n'est pas tout à fait celui de KNIGHT, qui est un peu plus général et s'applique même au cas où les $A^i_\infty$ sont finis. Nous laisserons cela de côté, et nous démontrerons le théorème 2 sous cette forme, par une méthode différente de celle de KNIGHT.

Nous commençons par rappeler un autre résultat bien connu sur le mouvement brownien linéaire ( [2], p.135 ) .

THEOREME 3. - Soit $(B_t)$ un mouvement brownien linéaire issu de 0, et soit $(\underline{\underline{B}}_t)$ sa famille de tribus naturelle ( qui est continue à droite après adjonction des ensembles négligeables ). Tout élément H de $L^2(\underline{\underline{B}}_\infty)$ admet alors une représentation comme intégrale stochastique

$$H = E[H] + \int_0^\infty h_s dB_s$$

où $(h_t)$ est un processus prévisible par rapport à la famille $(B_t)$, tel que $E[\int_0^\infty h_s^2 ds ] < \infty$.

Ce théorème ne s'étend pas en général aux martingales continues. Mais soit $(X_t)$ une martingale continue telle que $X_0=0$ ; posons $A_t=\langle X,X\rangle_t$ et supposons que $A_\infty = \infty$ ; introduisons la fonction $\tau_.$ réciproque de $A_.$ comme plus haut, et posons $B_t=X_{\tau_t}$ . C'est un mouvement brownien auquel s'applique le théorème 3. Alors :

LEMME.- Tout élément H de $L^2(\underline{\underline{B}}_\infty)$ admet une représentation comme intégrale stochastique

$$H=E[H] + \int_0^\infty k_s dX_s$$

où $(k_t)$ est un processus prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et $E[\int_0^\infty k_s^2 \, dA_s] < \infty$.

DEMONSTRATION.- Soit $(h_s)$ un processus prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{B}}_s)$. Posons $k_s(\omega)=h_{A_s(\omega)}(\omega)$ : je dis que $(k_t)$ est prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et que l'on a

$$E[\int_0^\infty h_s^2 ds ] = E[\int_0^\infty k_s^2 dA_s ] \quad ; \quad \int_0^\infty h_s dB_s = \int_0^\infty k_s dX_s \quad \text{p.s.}$$

Le lemme sera alors une conséquence immédiate du théorème 3.
Il suffit de faire la vérification lorsque $(h_s)$ est un processus prévisible élémentaire, de la forme

$h_s=0$ si $s\leqq u$ ou $s>v$

$h_s=f(B_{r_1},\dots B_{r_n})$ si $u<s\leqq v$ , où f est borélienne bornée sur $\mathbb{R}^n$, et $r_1,\dots,r_n$ sont $\leqq u$ . Dans ce cas, $k_s$ est donné par

$k_s=0$ si $s \leqq \tau_u$ ou $s>\tau_v$

$k_s=f(X_{\tau_{r_1}},\dots,X_{\tau_{r_n}})$ si $\tau_u<s\leqq\tau_v$ .

La vérification est alors facile, et laissée au lecteur.

Passons à la démonstration du théorème de KNIGHT . Nous poserons $B_t^i=X^i_{\tau_t^i}$ , et nous ferons l'hypothèse de récurrence suivante, qui vient d'être vérifiée au rang 1 .

<u>Le processus</u> $(B_t^1,\dots,B_t^{n-1})$ <u>est un mouvement brownien à n-1 dimensions</u>. <u>Notons</u> $\underline{\underline{B}}_t^{(n-1)}$ <u>la famille de tribus qu'il engendre</u>. <u>Alors tout élément H de l'espace</u> $L^2(\underline{\underline{B}}_\infty^{(n-1)})$ <u>admet une représentation au moyen d'intégrales stochastiques</u>

$$H = E[H] + \sum_1^{n-1} \int_0^\infty k_s^i\, dX_s^i$$

<u>où les</u> $k_s^i$ <u>sont des processus prévisibles par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Le mouvement brownien $(B_t^n)$ est alors <u>indépendant</u> de $(B_t^1,\dots,B_t^{n-1})$. En effet, soit $K\in L^2(\underline{\underline{B}}_\infty^n)$ admettant la représentation

$$K = E[K] + \int_0^\infty k_s^n dX_s^n \qquad ( k_s^n \text{ prévisible p.r. } (\underline{\underline{F}}_t))$$

L'orthogonalité de $X^n$ et des $X^i$ ($i<n$ ) entraîne que $E[HK]=E[H]E[K]$. Il en résulte aussitôt que le processus $(B_t^1,\dots,B_t^n)$ est un mouvement brownien à n dimensions.

Appliquons maintenant la formule du changement de variable dans les intégrales stochastiques, pour des martingales continues. Posons $M_s^i = \int_0^s k_u^i dX_u^i$ . Nous avons , $M^i$ et $M^n$ étant orthogonales

$$M_\infty^i M_\infty^n = \int_0^\infty (M_s^i dM_s^n + M_s^n dM_s^i) = \int_0^\infty M_s^i k_s^n dX_s^n + \int_0^\infty M_s^n k_s^i dX_s^i$$

Il en résulte que HK est de la forme voulue. L'ensemble des intégrales stochastiques de la forme

$$a+\sum_1^n \int_0^\infty k_s^i dX_s^i \quad , \text{ avec } \sum E[\int_0^\infty k_s^{i2} dA_s^i ] < \infty$$

d'une part, contient un ensemble total dans $L^2(\underline{\underline{B}}_\infty^{(n)})$, et d'autre part est fermé dans $L^2(\Omega)$ [ d'après KUNITA-WATANABE : il est formé des variables aléatoires terminales des martingales de carré intégrable, appartenant au sous-espace stable(*) engendré par $X^1,X^2\dots X^n$ ]. Il contient donc $L^2(B_\infty^{(n)})$ tout entier, et nous avons vérifié l'hypothèse de récurrence au rang n. ▯

---

(*) Voir [2], p. 81.

EXTENSION DU THEOREME DE KNIGHT AUX PROCESSUS DE POISSON

Le théorème suivant fait pendant au théorème 1, pour le processus de Poisson. Nous l'énonçons pour une seule martingale.

THEOREME 1'.- Soit $(Q_t)$ une martingale de carré intégrable telle que $Q_0=0$, purement discontinue et à sauts tous égaux à 1, telle que $\langle Q,Q\rangle_t = t$. Alors $(Q_t)$ est un processus de Poisson compensé : le processus $(Q_t+t)$ est un processus de Poisson de paramètre 1.

Ce théorème est dû à S.WATANABE, et il est démontré sous une forme un peu différente dans [3].

THEOREME 3'.- Soit $(\underline{\underline{Q}}_t)$ la famille de tribus naturelle du processus $(Q_t)$. Cette famille est alors continue à droite après complétion, et tout élément H de $L^2(\underline{\underline{Q}}_\infty)$ admet une représentation comme intégrale stochastique

(*) $$H=E[H] + \int_0^\infty h_s dQ_s$$

où $(h_t)$ est un processus prévisible tel que $E[\int_0^\infty h_s^2 ds\,] < \infty$.

Voici très sommairement la démonstration de ces deux théorèmes. Soit S l'instant du premier saut du processus $(Q_t)$. Appliquons la formule du changement de variables à la fonction $e^{iut}$ entre les instants 0 et S, il vient

$$E[e^{iu(1-S)}] = 1 + E[\int_0^S iue^{iuQ_{r-}}dQ_r\,] + E[\sum_{r\leq S} e^{iuQ_r}-e^{iuQ_{r-}}-iue^{iuQ_{r-}}\,]$$

Le second terme est nul, et le dernier se réduit à $E[e^{iu(1-S)}-e^{-iuS}-iue^{-iuS}]$, donc

$$E[e^{iuS}] = \frac{1}{1+iu}$$

Donc S a une répartition exponentielle de paramètre 1. Si on voulait mettre en évidence l'indépendance de S et de $\underline{\underline{Q}}_0$ ( qui est ici évidente, $\underline{\underline{Q}}_0$ étant triviale ), on écrirait toutes ces formules avec $E[.|\underline{\underline{Q}}_0]$ au lieu de $E[.]$ : c'est ce qu'il faut faire pour montrer que les écarts entre les sauts suivants sont des variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes.

Pour prouver le second théorème, nous remarquons que la famille de tribus est aussi engendrée par le processus de Poisson $P_t=Q_t+t$. D'après KUNITA-WATANABE, il suffit de montrer que toute martingale $(M_t)$ de carré intégrable et d'espérance nulle, orthogonale à $(Q_t)$, est nulle. Toujours d'après KUNITA-WATANABE ( cf. [2], p.131 ), il suffit de montrer que $(M_t)$ est orthogonale aux martingales fondamentales du processus de Poisson :

$$C_t^f = f\circ P_t - f\circ P_0 - \int_0^t Af\circ P_s\, ds$$

où $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et où A, le générateur infinitésimal du processus de Poisson, est donné par $Af(x)=f(x+1)-f(x)$. Finalement tout revient à montrer que $(C_t^f)$ est une intégrale stochastique par rapport à $(Q_t)$. Ce n'est pas difficile :

$$C_t^f = \int_0^t [f(P_{s-}+1)-f(P_{s-})]dQ_s$$

Ceci étant, nous pouvons énoncer le théorème analogue à celui de KNIGHT

THEOREME 2'.- Soient $X^1, X^2, \dots, X^n$ des martingales purement discontinues , à sauts totalement inaccessibles tous égaux à +1, deux à deux orthogonales, nulles pour t=0.

On pose $A_t^i = \langle X^i, X^i\rangle_t$ , et on suppose que $A_\infty^i=\infty$ pour tout i . On désigne par $\tau_\bullet^i$ la fonction réciproque de $A_\bullet^i$ , et on pose $Q_t^i = X^i_{\tau_t^i}$ .

Alors les processus $(Q_t^1), \dots, (Q_t^n)$ sont des processus de Poisson compensés de paramètre 1 indépendants.

La démonstration par récurrence est identique à celle du th.2. Il faut seulement remarquer, à propos du produit $M^iM^n$, que les processus $X^i, X^n$ sont sans discontinuités communes. On peut donc bien appliquer une formule d'intégration par parties, et remplacer les $M_s^j$ par $M_{s-}^j$ .

On peut se demander si ce résultat est vraiment plus qu'une curiosité mathématique !

BIBLIOGRAPHIE

[1] L'article de KNIGHT contenant le théorème 2 est à paraître, sous le titre A Reduction of Continuous Square Integrable Martingales to Brownian Motion. Le théorème 2 a été énoncé dans un autre article de KNIGHT : An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes, Ann. Math. Stat. 41, 1970.

[2] MEYER, Intégrales Stochastiques I-IV, Séminaire de Probabilités de Strasbourg I, Lecture Notes in M. Vol.39, Springer 1967.

Le lemme suivant le th.3 est inspiré d'un travail de N.KAZAMAKI, à paraître aux Annales de l'Inst.H.Poincaré.