Paul-André Meyer

Processus de Poisson ponctuels, d'après K. Ito

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 177-190
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__177_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1969/70

PROCESSUS DE POISSON PONCTUELS, D'APRÈS K.ITO

par P.A. Meyer

Cet exposé repose sur un article de K.ITO intitulé " Poisson point processes and their application to Markov processes " (Lecture note, University of Kyoto, 1969). Cet article comprend trois parties : une théorie générale des processus de Poisson ponctuels, qui fait l'objet ci-dessous du paragraphe 1 ; une remarquable application de cette théorie aux processus de Markov, que nous exposons au paragraphe 2, en essayant de donner aux résultats d'ITO toute la généralité dont ils sont susceptibles ; enfin, un calcul de générateurs infinitésimaux que nous laissons de côté malgré son intérêt.

§ 1 . PROCESSUS DE POISSON PONCTUELS

Nous nous donnons un espace mesurable $(U,\underline{\underline{U}})$, que nous appellerons l'<u>espace d'états</u> . Nous supposerons que la tribu $\underline{\underline{U}}$ est séparable , et que ses atomes sont les points de U - ces hypothèses ne sont d'ailleurs pas indispensables, mais elles sont anodines, et nous faciliteront la vie en divers endroits. Afin de pouvoir travailler sur des fonctions partout définies, nous adjoindrons à U un point ∂ , et nous désignerons par $\hat{U}$ l'ensemble $U\cup\{\partial\}$, muni de sa tribu naturelle.

Donnons nous un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, et un processus mesurable $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\hat{U}$. Nous dirons que (X_t) est un <u>processus ponctuel</u> si pour tout $\omega\in\Omega$ l'ensemble $D_\omega=\{\, t : X_t(\omega)\neq\partial\}$ est dénombrable .
Si pour presque tout $\omega\in\Omega$ D_ω est discret dans $\mathbb{R}_+$, nous dirons que (X_t) est un processus ponctuel <u>discret</u>.

Pour tout $B\in\underline{\underline{U}}$, considérons le processus (X_t^B) défini par

$$X_t^B(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } X_t(\omega)\in B \ , \ X_t^B(\omega)=\partial \text{ si } X_t(\omega)\notin B \ .$$

Si U est réunion d'une suite (B_n) d'ensembles mesurables, tels que les processus $(X_t^{B_n})$ soient tous discrets, nous dirons que (X_t) est un processus ponctuel <u>σ-discret</u>. Nous n'aurons affaire dans la suite qu'à de tels processus ponctuels.

Soit E une partie de $\mathbb{R}_+ \times U$, mesurable pour la tribu produit naturelle; nous poserons

$$N_E(\omega) = \text{nombre des } t \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } (t, X_t(\omega)) \in E$$

Le processus (X_t) étant mesurable, la théorie de la mesurabilité des temps d'entrée permet de voir aussitôt, dans le cas discret, que les fonctions N_E sont des variables aléatoires. On passe de là au cas σ-discret. Nous poserons en particulier, pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $B \in \underline{\underline{U}}$, $N_t^B = N_{]0,t] \times B}$. Alors que le processus ponctuel (X_t) est l'objet qui apparaît de manière naturelle dans les problèmes probabilistes, presque toute la technique repose sur l'emploi des v.a. N_t^B. En particulier, nous dirons (avec un léger abus de langage) que deux processus ponctuels σ-discrets (X_t) et (X_t') à valeurs dans U sont <u>équivalents en loi</u> si les variables aléatoires X_0 et X_0' ont même loi, et si les n-uples $(N_{t_1}^{B_1}, \dots, N_{t_n}^{B_n})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^n$ ont la même loi pour les deux processus, quels que soient $B_1, \dots, B_n \in \underline{\underline{U}}$ (non nécessairement distincts) , l'entier n , les instants $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$(non nécessairement distincts).

De même, nous dirons qu'un processus ponctuel σ-discret (X_t) est <u>adapté</u> à une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ si X_0 est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable, et si pour tout t N_t^B est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, quel que soit $B \in \underline{\underline{U}}$.

REMARQUE.- La tribu $\underline{\underline{U}}$ séparant les points de U, la connaissance de toutes les applications $t \mapsto N_t^B(\omega)$ $(B \in \underline{\underline{U}})$ caractérise uniquement l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ (pour $t>0$).

Nous dirons que le processus ponctuel est <u>homogène dans le temps</u> si, quels que soient l'entier n, les ensembles $B_1, \dots, B_n$ appartenant à $\underline{\underline{U}}$, les intervalles $]s_1, t_1] \dots]s_n, t_n]$, le nombre $r>0$, les vecteurs aléatoires

$$(N_{]s_1,t_1] \times B_1}, \dots, N_{]s_n,t_n] \times B_n}) \text{ et } (N_{]r+s_1, r+t_1] \times B_1}, \dots, N_{]r+s_n, r+t_n] \times B_n})$$

ont la même loi .

DEFINITION .- <u>Un processus ponctuel σ-discret</u> (X_t) <u>adapté à une famille de tribus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est un</u> <u>processus de Poisson ponctuel</u> <u>(ppp) par rapport à cette famille si</u>

1) <u>il est homogène dans le temps,</u>

2) <u>quels que soient</u> $s<t$, $B \in \underline{\underline{U}}$, $N_{]s,t] \times B}$ <u>est indépendante de</u> $\underline{\underline{F}}_s$.

Jusqu'à nouvel ordre , (X_t) désigne maintenant un ppp .

STRUCTURE DES PROCESSUS DE POISSON PONCTUELS

Soit $B\in\underline{\underline{U}}$ tel que les v.a. N_t^B soient p.s. finies - par définition, U est réunion d'une suite de tels ensembles. Le processus (N_t^B) est alors un processus à accroissements indépendants (p.a.i.) homogène dans le temps, dont les trajectoires sont continues à droite et croissent uniquement par sauts égaux à 1. C'est donc un processus de Poisson [pour ce résultat classique, voir par ex. DOOB, Stochastic processes, p.402 , ou bien le début de KHINTCHINE, Mathematical methods in the theory of queuing , Griffin 1960].

Voici une conséquence importante de ce résultat : si N_t^B est fini p.s. pour tout t, N_t^B a une loi de Poisson, donc est intégrable. Nous poserons donc la définition suivante :

DEFINITION.- On appelle mesure caractéristique du ppp (X_t) la mesure positive σ-finie n sur U définie par $n(B)=E[N_1^B]$ $(B\in\underline{\underline{U}})$.

Ensuite, soient $B_1,B_2,\dots,B_n$ des éléments disjoints de $\underline{\underline{U}}$, tels que $n(U_i)<+\infty$ pour $i=1,\dots,n$. Le n-uple $(N_t^{B_1},\dots,N_t^{B_n})$ est un p.a.i. vectoriel, dont les composantes sont des processus de Poisson deux à deux sans discontinuités communes. D'après un théorème classique (P.LEVY, ITO), ces processus sont alors indépendants [une autre forme de ce théorème figure dans l'exposé " Intégrales stochastiques IV", Séminaire de Probabilités de Strasbourg vol.I , p.137 (Lecture Notes in M., vol. 39)]. Il en résulte aussitôt que deux ppp sont équivalents en loi si et seulement s'ils ont la même loi initiale, et la même mesure caractéristique.

Nous appliquons maintenant à ce n-uple le résultat suivant, qui est bien connu : si (Y_t) est un processus de Markov adapté à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, admettant un semi-groupe de Feller (P_t), et dont les trajectoires sont continues à droite, alors (Y_t) est fortement markovien par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$. Un argument de classes monotones nous donne le résultat suivant, que nous n'énonçons (pour simplifier) que dans le cas de temps d'arrêt finis.

THEOREME 1.- Soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, p.s. fini. Posons $\hat{X}_t=X_{T+t}$ $(t\in\mathbb{R}_+)$; le processus $(\hat{X}_t)$ est alors un ppp ayant la même mesure caractéristique que (X_t), p.r. à la famille $\hat{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{T+t}$.

Nous nous référerons dans la suite à ce théorème sous le nom de "propriété de Markov forte des ppp" dans la suite. Grâce au théorème 1, il est facile d'obtenir une description complète des ppp discrets. Noter que le théorème 2 permet de construire de manière très simple un ppp ayant une mesure caractéristique n <u>bornée</u> donnée . On en déduit sans peine une construction pour le cas non borné.

THEOREME 2.- <u>Soit</u> (X_t) <u>un ppp discret à valeurs dans</u> U, <u>admettant la mesure caractéristique (bornée)</u> $\mathbf{n}$; <u>nous prolongeons</u> n <u>à</u> $\hat{U}$ <u>en convenant que</u> $n(\{\partial\})=0$. <u>Soient</u> $T_1,\dots,T_n$.. <u>les instants successifs de saut du processus de Poisson</u> (N_t^U) ; $S_1,\dots,S_n$.. <u>les intervalles successifs entre ces sauts</u> ; $J_0,\dots,J_n$.. <u>les positions successives</u> $X_0, X_{T_1},\dots X_{T_n}$.. <u>Alors les variables aléatoires</u> $J_0,J_1,\dots,J_n,\dots S_1,\dots,S_n$.. <u>forment une famille indépendante</u> , <u>avec les lois suivantes</u>

$$P\{S_i>t\} = \exp[-tn(U)] \quad , \quad P\{J_i\in B\} = \frac{n(B)}{n(U)} \ \underline{\text{pour}}\ i\geqq 1 \quad .$$

DEMONSTRATION.- Compte tenu de la propriété de Markov forte, il nous suffira de démontrer que

$$P\{S_1>t,\ J_1\in B\} = \frac{n(B)}{n(U)}e^{-tn(U)} \quad .$$

Posons $n(B)=p$, $B'=B^c$, $n(B')=p'$, $N_t^B=N_t$, $N_t^{B'}=N_t'$; désignons par Z et Z' les instants de premier saut des processus de Poisson indépendants (N_t) et (N_t'). L'événement au premier membre est égal à $\{t<Z<Z'\}$, et nous avons bien

$$P\{t<Z<Z'\}= \int_t^\infty P\{Z'>u\}P\{Z\in du\} = \int_t^\infty e^{-p'u}.pe^{-pu}\,du = \frac{p}{p+p'}\, e^{-(p+p')t} \quad .$$

REMARQUES.- a) Définissons un processus (Y_t) à valeurs dans $\mathbb{N}\times\hat{U}$, de la manière suivante :

pour $0\leqq t<S_1$, $Y_t=(0,J_0)$

pour $S_1\leqq t<S_2$, $Y_t=(1,J_1)$

....

pour $S_n\leqq t<S_{n+1}$, $Y_t=(n,J_n)$

Il résulte aussitôt du théorème 2 que le processus (Y_t) est un processus de Markov dont les trajectoires sont des fonctions de sauts continues à droite : tout ppp discret peut donc se construire en regardant un " bon" processus de Markov aux instants de saut seulement. Si la mesure caractéristique est diffuse, la définition de (Y_t) peut être simplifiée en prenant

$Y_t = J_n$ pour $S_n \leqq t < S_{n+1}$.

b) Voici une autre interprétation du même type pour le processus (X_t) (discret ou non), qui ne repose pas sur le théorème 2. Rappelons que si un espace $(U,\underline{\underline{U}})$ est séparable, et admet les points de U pour atomes, il existe une injection mesurable ϕ de U dans $[0,1]$ telle que $\underline{\underline{U}}=\underline{\underline{T}}(\phi)$. Pour construire ϕ, on utilise une suite d'ensembles mesurables engendrant la tribu $\underline{\underline{U}}$ pour construire une injection de U dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ possédant la propriété ci-dessus, et on identifie $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ à l'ensemble de Cantor.

Donnons nous maintenant une partition (U_i) de U en ensembles tels que $n(U_i) < \infty$, et une suite strictement décroissante (c_i) de nombres > 0 tels que $\sum c_i . n(U_i) < \infty$. Soit ϕ_0 une injection de U_0 dans $]c_1, c_0]$ possédant les propriétés ci-dessus, soit ϕ_1 une injection de U_1 dans $]c_2, c_1]$, etc, et soit ϕ l'injection de $\hat{U}$ dans $\mathbb{R}_+$ égale à ϕ_i sur U_i , à 0 au point ∂ . Si nous identifions $\hat{U}$ à une partie de $\mathbb{R}_+$ au moyen de ϕ, la v.a. $S_t = \sum_{s \leqq t} X_t$ est p.s. finie, et le processus (S_t) est un <u>subordinateur</u>(*), dont n est la mesure de LEVY. On peut en déduire immédiatement tous les résultats que nous avons vus sur les ppp ; on en déduit aussi, par exemple, que l'application $E \mapsto N_E$ est une mesure de Poisson d'espérance $\mu(E)$, où μ est la mesure produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ par la mesure n sur U.

PROCESSUS DE POISSON PONCTUELS ABSORBÉS

Nous allons maintenant caractériser certains processus ponctuels, qui s'obtiennent à partir de ppp en "rendant absorbants" les états d'une partie A de U.

Nous nous donnons donc comme plus haut un processus ponctuel σ-discret à valeurs dans U, adapté à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, et nous distinguons une partie $A \in \underline{\underline{U}}$, que nous appelons l'ensemble des <u>états absorbants</u>. Nous posons $S_A(\omega) = \inf \{ t \geqq 0 : X_t(\omega) \in A \}$, et nous imposons les deux axiomes suivants :

1) $X_t(\omega) = \partial$ pour tout $t > S_A(\omega)$ [en particulier, cela entraîne que $X_{S_A}(\omega) \in A$] ; $P\{S_A > 0\} = 1$.

2) Quels que soient l'entier n, les ensembles $B_1 \ldots B_n$ appartenant à $\underline{\underline{U}}$, tels que les v.a. $N_t^{B_i}$ soient toutes p.s. finies, les intervalles $]s_1, t_1], \ldots]s_n, t_n]$, les parties $H_1, \ldots, H_n$ de $\mathbb{N}$, le nombre $r > 0$, on a

(*) Remarque de J.WALSH.

$$P\{N_{]r+s_1,r+t_1]\times B_1}\in H_1 \ \dots\ N_{]r+s_n,r+t_n]\times B_n}\in H_n \mid \underline{\underline{F}}_r\} =$$

$$I_{\{S_A>r\}}P\{N_{]s_1,t_1]\times B_1}\in H_1 \ \dots\ N_{]s_n,t_n]\times B_n}\in H_n\} + I_{\{S_A\leq r\}}I_{H_1}(0)\dots I_{H_n}(0)$$

Nous ne chercherons pas à examiner si 2) entraîne 1). Voici quelques conséquences de ces deux axiomes.

Prenons d'abord $n=1$, $B_1=A$, $t_1=t$, $H_1=\{0\}$; il vient ,

$$P\{S_A>r+t\} = P\{S_A>r\ ,\ N_{]r,r+t]\times A}=0\} = P\{S_A>r\}P\{N_{]0,t]\times A}=0\}$$
$$= P\{S_A>r\}P\{S_A>t\}\ .$$

La variable aléatoire S_A a donc une loi exponentielle. En particulier, elle est p.s. finie, ou bien p.s. égale à $+\infty$. Dans le second cas, l'axiome 2) tient lieu des axiomes d'indépendance et d'homogénéité de la définition des ppp : ce cas a donc déjà été étudié, et nous le laissons de côté désormais.

<u>Nous allons maintenant nous placer dans le cas discret</u> (nous reviendrons plus tard au cas général). Posons $S_1=\inf\{\ t>0\ :\ X_t\neq\partial\}$. On a

$$P\{S_1>r+t\} = P\{S_1>r,\ N_{]r,r+t]\times U}=0\}$$

Comme $\{S_1>r\}$ est $\underline{\underline{F}}_r$-mesurable, et contenu dans $\{S_A>r\}$, le second membre est égal à $P\{S_1>r\}P\{N_{]0,t]\times U}=0\} = P\{S_1>r\}P\{S_1>t\}$. La v.a. S_1 admet donc, elle aussi, une loi exponentielle. Nous désignerons par n la mesure sur U définie par

$$P\{S_1>t\} = \exp[-tn(U)]$$
$$P\{X_{S_1}\in B\} = \frac{n(B)}{n(U)} \quad (B\in\underline{\underline{U}})\ .$$

Nous dirons que n est la <u>mesure caractéristique</u> du processus.

Soient $B_1,\dots,B_n$ des éléments quelconques de $\underline{\underline{U}}$. Il résulte aisément des axiomes 1) et 2) que le processus $(N_t^A,N_t^{B_1},\ \dots\ ,N_t^{B_n})$ est une chaîne de Markov homogène dans le temps, dont les trajectoires sont des fonctions purement de saut continues à droite (il serait facile d'en écrire le générateur infinitésimal). Une telle chaîne satisfaisant à la propriété de Markov forte par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, un argument simple de classes monotones nous donne le résultat suivant :

soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ tel que $P\{T<S_A\}>0$, et soit $\hat{\Omega}=\{T<S_A\}$, muni de la loi $\hat{P}\ :\ B\longmapsto P(B)/P(\hat{\Omega})$ et de la famille des

tribus $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$ induites par $\underline{\underline{F}}_{T+t}$ sur $\hat{\Omega}$. Posons enfin $\hat{X}_t=X_{T+t}$ sur $\hat{\Omega}$. Alors le processus $(\hat{X}_t)$ satisfait aux axiomes 1) et 2) sur $\hat{\Omega}$, et les processus $(X_t)_{t>0}$ et $(\hat{X}_t)_{t>0}$ sont équivalents en loi , et en particulier ont la même mesure caractéristique.

On notera que ces deux processus n'ont pas nécessairement la même mesure initiale, de sorte que l'équivalence en loi n'a pas lieu pour $t\geq 0$. D'autre part, soit $C\in\underline{\underline{F}}_T$ contenu dans $\{T<S_A\}$, et soit H un élément de la tribu engendrée par les v.a. $\hat{N}_t^B$ sur $\hat{\Omega}$ ($t\in\mathbb{R}_+,B\in\underline{\underline{U}}$) ; le résultat précédent s'applique au temps d'arrêt T_C qui vaut $+\infty$ sur le complémentaire de C, et T sur C, et il vient $P(C\cap H)= P(C)\hat{P}(H)$

Définissons maintenant successivement $S_2=\inf\ \{t>S_1\ :\ X_t\neq\partial\}$, $S_3 = \inf\ \{t>S_2\ :\ X_t\neq\partial\}$, etc . Nous pouvons écrire $S_2=S_1+T_1$, où T_1 est une v.a. telle que

$$P\{T_1>t\} = \frac{n(A)}{n(U)} + [\ 1-\frac{n(A)}{n(B)}]e^{-n(U)t}$$

et T_1 est indépendante de $\underline{\underline{F}}_{S_1}$. De même, $S_3=S_2+T_2$, où T_2 a la même loi que T_1 et est indépendante de $\underline{\underline{F}}_{S_2}$. Nous n'insistons pas sur les détails : tout découle de la propriété de Markov forte des chaînes considérées plus haut. De plus, pour tout i on a $P\{X_{S_i}\in B,S_i<\infty\} = \frac{n(B)}{n(U)}P\{S_i<\infty\}$.

Considérons maintenant **les deux processus** (Z_t) et (Y_t^*) suivants, à **valeurs dans** $\mathbb{N}\times\hat{U}$. Le premier est défini par

$$Z_t = (0,X_0) \text{ pour } 0\leq t<S_1\ ,\ (1,X_{S_1}) \text{ pour } S_1\leq t<S_2\ ,\ (2,S_2)\ldots \text{ etc .}$$

Le second est ainsi défini : nous construisons sur un espace probabilisé **convenable** un ppp $(X_t^!)$ admettant la mesure caractéristique n, et la même loi initiale que (X_t). Puis nous construisons la chaîne de Markov de la remarque a) suivant le théorème 2, que nous désignons ici par $(Y_t^!)$. Enfin, (Y_t^*) s'obtient en <u>arrêtant</u> $(Y_t^!)$ à la rencontre de $\mathbb{N}\times A$. Il résulte des calculs précédents que les processus (Z_t) et (Y_t^*) sont équivalents en loi. En revenant aux processus ponctuels, nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME 3.- <u>Soit</u> (X_t) <u>un processus ponctuel discret satisfaisant aux axiomes</u> 1) <u>et</u> 2), <u>et soit</u> n <u>sa mesure caractéristique</u>. <u>Soit</u> $(X_t^!)$ <u>un ppp admettant la même loi initiale que</u> (X_t), <u>et la mesure caractéristique</u> n , <u>et soit</u> $S_A^!=\inf\ \{\ t\ :\ X_t^!\in A\}$. <u>Posons</u>

$$\xi_t= X_t^! \text{ si } t\leq S_A^!\ ,\quad \xi_t=\partial \text{ si } t>S_A^!$$

Alors les processus (X_t) et (ξ_t) sont équivalents en loi.

Plus précisément, il faut noter que si (X'_t) est un ppp tel que les processus (X_t) et (ξ_t) soient équivalents en loi, sa mesure caractéristique est nécessairement égale à n. On en déduit le résultat suivant : soit V une partie de U contenant A, et soit $(Y_t)=(X^V_t)$: c'est un processus ponctuel discret qui satisfait aux axiomes 1) et 2), désignons par n_V sa mesure caractéristique . Considérons d'autre part le ppp (X'^V_t), de mesure caractéristique $I_V.n$: il est clair qu'en l'"arrêtant" à la rencontre de A on obtient un processus équivalent en loi à (Y_t). Nous avons donc $n_V=I_V.n$.

Nous allons maintenant étendre le théorème 3 (et la définition des mesures caractéristiques) au cas σ-discret . Soit (X_t) un processus (non nécessairement discret) satisfaisant aux axiomes 1) et 2), et soit (U_i) une suite croissante de parties mesurables contenant A telles que les processus $(X^{U_i}_t)$ soient discrets, et que la réunion des U_i soit U. Les processus ainsi construits satisfont aux axiomes, leurs mesures caractéristiques n_i s'induisent bien d'après ce qui précède, et il existe donc une mesure σ-finie n sur U telle que $n_i=I_{U_i}.n$ pour tout i. Nous l'appellerons la mesure caractéristique de (X_t), et nous laisserons au lecteur le soin de vérifier qu'elle a une signification intrinsèque, indépendante de la suite (U_i). Il est immédiat de vérifier que si (X'_t) est un ppp de mesure caractéristique n, ayant la même loi initiale que (X_t), le processus (ξ_t) défini dans l'énoncé du théorème 3 est équivalent en loi à (X_t).

Pour finir, nous poserons une définition :

DEFINITION.- Soit (X_t) un processus ponctuel σ-discret à valeurs dans U, adapté à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, et soit A une partie de U. Nous dirons que (X_t) est un ppp absorbé en A, de mesure caractéristique n, si

i) $X_t=\partial$ pour $t>S_A$

ii) La restriction du processus à $\{S_A>0\}$ satisfait aux axiomes 1) et 2), et admet n pour mesure caractéristique.

La condition ii) est vide si $S_A=0$ p.s. : dans ce cas la mesure caractéristique est arbitraire. Dans tous les cas, si l'on construit le ppp (X'_t) du théorème 3, les processus (X_t) et (ξ_t) sont équivalents en loi. Les ppp absorbés en A sont donc exactement les processus obtenus en arrêtant en A les ppp ordinaires.

§ 2 . APPLICATION AUX PROCESSUS DE MARKOV

Considérons un processus de Markov (X_t) à valeurs dans un espace d'états E, continu à droite et fortement markovien. Soit a un état <u>non semi-polaire</u> . Nous poserons $E'=E-\{a\}$. Nous utiliserons la version continue à droite canonique $(\Omega,\underline{\underline{F}},\ldots,\theta_t)$ du processus, avec les tribus usuelles. Le semi-groupe de transition sera noté (P_t) (*).

Nous désignerons par T le temps d'entrée du processus dans $\{a\}$, par ϕ la fonction 1-excessive

$$\phi(x)=E^x[e^{-T}] \quad \text{sur } E$$

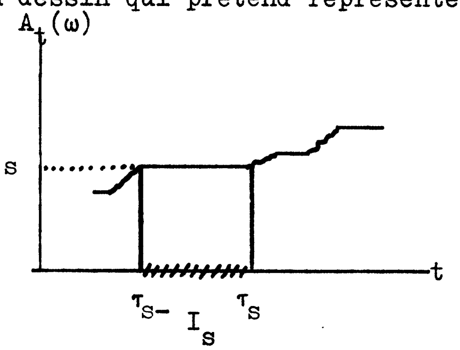
par (A_t) le temps local de a : fonctionnelle additive continue parfaite sur Ω telle que

$$E^{\cdot}[\int_0^\infty e^{-s}dA_s] = \phi(\cdot) \qquad \text{(temps local 'normalisé')}$$

Pour $\omega\in\Omega$, nous noterons $R(\omega)$ l'ensemble fermé à droite $\{ t : X_t(\omega)=a\}$, par $L(\omega)$ l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à $R(\omega)$; ces intervalles forment le complémentaire du support de la mesure $dA_{\cdot}(\omega)$. Nous désignerons par $\tau_{\cdot}$ la " fonction inverse du temps local"

$$\tau_t(\omega) = \inf \{ r : A_r(\omega) > t \}$$

Voici un dessin qui prétend représenter le graphe de $A_{\cdot}(\omega)$



Nous avons $\tau_{s-}(\omega)\in L(\omega)$
L'intervalle $[\tau_{s-},\tau_s[= I_s$ est contigu à $R(\omega)$.

Si I est un intervalle contigu à $R(\omega)$, $I=[u,u+h[$ (l'extrémité gauche u peut appartenir ou ne pas appartenir à $R(\omega)$; h peut éventuellement être égal à $+\infty$), nous appellerons <u>excursion</u> de ω pendant I l'application e de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$ définie par

$$\begin{aligned} e(t) &= X_{u+t}(\omega) \text{ si } 0\leqq t<h \\ &= \partial \text{ si } t\geqq h \end{aligned}$$

Le nombre h est la <u>durée</u> de l'excursion. Noter que $e(t)\in E'\cup\{\partial\}$ pour $t>0$.

(*) Nous supposerons que le semi-groupe (P_t) est <u>markovien</u> (cela ne restreint pas la généralité

Nous désignerons par W l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $E\cup\{\partial\}$, à valeurs dans $E'\cup\{\partial\}$ pour $t>0$, absorbées en ∂. En particulier, nous noterons $[\partial]$ l'application constante égale à ∂. Nous noterons X_t les applications coordonnées, $\underline{\underline{W}}$ la tribu naturelle. Nous définissons maintenant un processus ponctuel (e_s) sur Ω, à valeurs dans W ($[\partial]$ jouant le rôle du point adjoint à l'espace d'états) de la manière suivante :

- si s est une valeur-palier de $A_\bullet(\omega)$, autrement dit un instant de saut du processus $\tau_\bullet(\omega)$, nous désignons par $e_s(\omega)$ l'excursion de ω pendant l'intervalle $I_s=[\tau_{s-}(\omega),\tau_s(\omega)[$.
- si s n'est pas une telle valeur, $e_s(\omega)=[\partial]$.

Ce processus sera appelé le <u>processus ponctuel des excursions de</u> (X_t). Nous distinguerons la partie M de W constituée par les excursions de durée infinie : $e_s(\omega)$ appartient à M si et seulement si la trajectoire $X_\bullet(\omega)$ ne rencontre plus jamais a après l'instant $\tau_{s-}(\omega)$. On a alors $e_t(\omega)=[\partial]$ pour tout $t>s$.

Voici le premier résultat fondamental d'ITO :

THEOREME 4.- <u>Si</u> Ω <u>est muni de la loi</u> P^a, <u>le processus des excursions est un ppp absorbé en</u> M, <u>par rapport à la famille de tribus</u> $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{\tau_t}$. <u>On a</u> $P^a\{e_0=[\partial]\}=1$.(*)

DEMONSTRATION.- Remarquons d'abord que le processus des excursions est un processus ponctuel σ-discret . Soit en effet $S_M(\omega)=\inf\{s:e_s(\omega)\in M\}$ ($S_M(\omega)=A_\infty(\omega)$; c'est aussi $\inf\{s:\tau_s(\omega)=+\infty\}$). On sait que τ_{s-} est p.s. fini sur l'ensemble $\{S_M<\infty\}$: voir par exemple BLUMENTHAL et GETOOR, Markov processes, p.218-219. Je dis alors que le processus ponctuel des <u>excursions de durée</u> $\geq$ h est discret pour tout $h>0$: en effet, soit $s>0$; ou bien on a $S_M>s$, et donc $\tau_s<\infty$, et il y a alors au plus τ_s/h excursions de durée $\geq h$ sur $[0,s]$, ou bien on a $S_M\leq s$, donc $\tau_{s-}<\infty$ et le nombre des excursions sur $[0,s]$ est au plus $1+\tau_{s-}/h$.

Soit B une partie mesurable de W : nous dirons pour abréger que " e_s est de type B" si $e_s\in B$. Choisissons B tel que le processus (N_t^B) soit discret. La v.a. N_t^B est le nombre d'excursions de type B de $X_\bullet$ avant l'instant τ_t , elle est donc $\underline{\underline{F}}_{\tau_t}$-mesurable. Calculons $N_{]r+s,r+t]\times B}$:

(*) On aurait le même énoncé en remplaçant P^a par P^x, à l'exception de cette dernière propriété.

c'est le nombre d'excursions du type B de la trajectoire $X_{\cdot}$ sur l'intervalle $]\tau_{r+s}, \tau_{r+t}]$. Si l'on a $S_M \leq r$, c'est 0 ; si l'on a $S_M > r$, on a aussi $\tau_r < \infty$, et par conséquent $\tau_{r+s} = \tau_r + \tau_s \circ \Theta_{\tau_r}$, $\tau_{r+t} = \tau_r + \tau_t \circ \Theta_{\tau_r}$, et $N_{]r+s,r+t]\times B} = N_{]s,t]\times B} \circ \Theta_{\tau_r}$. L'axiome 2) des ppp absorbés résulte alors aussitôt de la propriété de Markov forte du processus (X_t), si l'on note que $X_{\tau_r} = a$ sur $\{\tau_r < \infty\}$.

<u>Nous noterons</u> H(dw) <u>la mesure caractéristique</u> de ce ppp absorbé en M . Nous avons vu que (la loi initiale étant connue) la mesure H détermine entièrement la structure du processus des excursions, et nous allons chercher à la déterminer. A cet effet, nous désignerons par (Q_t) le semi-groupe sous-markovien obtenu en tuant (P_t) à l'instant de la première rencontre de $\{a\}$.

Nous donnerons deux théorèmes, dont le second seul figure dans l'article d'ITO : la différence est mince entre les deux : on peut dire si l'on veut que le second est plus explicite.

Nous supposons Ω muni de la mesure P^a.

THEOREME 5.- <u>Lorsque</u> W <u>est muni de la mesure caractéristique</u> H(dw), <u>le processus</u> $(x_t)_{t>0}$ <u>est un processus de Markov admettant</u> (Q_t) <u>comme semi-groupe de transition. Soit</u> $(n_t)_{t>0}$ <u>la loi d'entrée de ce processus</u> ; n_t <u>est une mesure bornée pour tout</u> $t>0$, <u>et le 1-potentiel</u> μ <u>de la loi d'entrée</u>

$$\mu = \int_0^\infty e^{-t} n_t dt$$

<u>a une masse totale</u> ≤ 1.

DEMONSTRATION.- Soit $r>0$, et soit A une partie borélienne de E' (ne contenant donc pas ∂ !). Soit $C = \{x_r \in A\} \subset W$: toute excursion de type C ayant une durée > r, le processus des excursions de type C est discret (cf. le début de la démonstration du th.1). Autrement dit, on a $H(C) < \infty$.

Soit B une partie mesurable de W, et soit Θ_r l'opérateur de translation sur W. D'après la définition de la mesure caractéristique d'un ppp absorbé, on voit aussitôt que

$$\frac{H[\Theta_r^{-1}(B) \cap \{x_r \in A\}]}{H\{x_r \in A\}} = P^a\{\text{ la première excursion telle que } x_r \in A \text{ est de type } \Theta_r^{-1}(B)\ \}$$

Définissons $G(\omega)$ comme le plus petit nombre possédant les propriétés suivantes : $G(\omega)>r$; $G(\omega)-r$ est l'extrémité gauche d'un intervalle contigu à $R(\omega)$ de longueur $>r$; $X_{G(\omega)}(\omega)\in A$. Il est facile de vérifier que G est un temps d'arrêt . Soit ϕ l'application de Ω dans W qui associe à $\omega\in\Omega$ l'application $\theta_{G(\omega)}(\omega)$, tuée à l'instant où elle rencontre a : la probabilité au second membre vaut $P^a(\phi^{-1}(B))$.

Munissons W des lois Q^x associées au semi-groupe (Q_t) et aux mesures initiales ε_x , $x\in E'$. On vérifie aisément (en prenant pour B des événements de forme simple) que $P^a[\phi^{-1}(B)|\underline{\underline{F}}_G] = Q^{X_G}(B)$. Autrement dit, si γ désigne la loi de la v.a. X_G, la définition de la mesure caractéristique devient

$$H[\theta_r^{-1}(B)\cap\{\chi_r\in A\}] = H\{\chi_r\in A\}.\int_{E'}\gamma(dx)Q^x(B)$$

(comme d'habitude, nous convenons que $X_G=\partial$ sur $\{G=\infty\}$, ; on a $Q^{\partial}(B)=0$, puisque B ne contient pas $[\partial]$).

Prenons $B=\{\chi_0\in K\}$; la formule précédente nous donne

$$n_r(K\cap A) = H[\theta_r^{-1}(B)\cap\{\chi_r\in A\}] = n_r(A)\int\gamma(dx)I_K(x)$$

d'où l'on déduit la mesure γ, et la formule

$$H[\theta_r^{-1}(B)\cap\{\chi_r\in A\}] = \int_A n_r(dx)Q^x(B) \qquad (1)$$

Prenant pour B des ensembles de la forme $\{\chi_{t_1}\in A_1\ldots\chi_{t_n}\in A_n\}$, un raisonnement par récurrence immédiat montre le caractère markovien du processus (χ_t) pour la mesure $H(dw)$, et le fait que les n_r forment une loi d'entrée pour le semi-groupe (Q_t). Noter que la masse de n_r , finie pour tout $r>0$, tend en général vers $+\infty$ lorsque $r\to0$ - nous verrons dans un instant un résultat plus précis.

Il est bien connu (cf. BLUMENTHAL-GETOOR, Markov processes, p.218-219) que le processus (τ_t) est un <u>subordinateur</u>, c.à.d. un processus à accroissements indépendants et positifs, homogène dans le temps, à cela près qu'il peut avoir un saut égal à $+\infty$ (après lequel, bien entendu, il garde la valeur $+\infty$). Sa loi est donnée par la formule de LEVY :

$$E^a[\exp(-p\,\tau_t)] = \exp(-tg(p))$$

où
$$g(p)= mp + \int_0^{\infty} (1-e^{-pu})\lambda(du)$$
m est une constante $\geqq 0$, et λ (la mesure de LEVY du subordinateur) est une mesure positive sur $]0,+\infty]$ telle que $\int_0^{\infty}(x\wedge 1)\lambda(dx) < \infty$. Si l'on désigne par S_u l'instant où se produit le premier saut de (τ_t) dont l'amplitude dépasse (strictement) u, il est bien connu que S_u a une loi exponentielle de paramètre $\lambda(]u,+\infty])$.

Soit ζ la durée de vie sur W. Appliquons la formule (1) en prenant $A=E'$, $B=\{\zeta>v\}$; alors $Q^x(B) = P^x\{T>v\}$, et il vient
$$H\{\zeta>r+v\} = \int n_r(dx)P^x\{T>v\}$$
Mais le premier membre est, par définition, le paramètre de la loi exponentielle de la v.a. $S'_{r+v}= \inf \{ s : \text{durée de } e_s > r+v\}$. Autrement dit,
$$\lambda(]r+v,\infty]) = \int n_r(dx)P^x\{T>v\} = < n_r , Q_v 1 > = < n_{r+v}, 1 >$$
ou, plus simplement , pour $u>0$
$$\lambda(]u,\infty]) = < n_u, 1 > .$$
Considérons maintenant la condition de normalisation du temps local : $E^a[\int_0^{\infty} e^{-s}dA_s] = 1$, ou $E^a[\int_0^{\infty} e^{-\tau_t} dt]=1$; on a $E[\exp(-\tau_t)]= \exp(-tg(1))$, donc cette intégrale vaut $1/g(1)$, et la condition de normalisation s'écrit simplement $g(1)=1$, soit
$$m + \int_0^{\infty}(1-e^{-u})\lambda(du) = 1$$
ou enfin
$$m + \int_0^{\infty} e^{-v}< n_v, 1> dv = 1$$
Cela achève la démonstration du théorème 5.

Voici le second théorème. Nous dirons que le processus (X_t) <u>sort p.s. de</u> a <u>par un saut</u> si, pour presque tout ω, on a $X_t(\omega)\neq a$ pour tout $t\in L(\omega)$ (extrémité gauche d'intervalle contigu).

THEOREME 6.- <u>Lorsque le processus</u> (X_t) <u>sort de</u> a <u>par un saut, la mesure</u> $n_0 : F \mapsto H\{\chi_0\in F\}$ <u>est σ-finie sur</u> E , <u>et on a</u> $n_r=n_0Q_r$ <u>pour tout</u> $r>0$.

DEMONSTRATION.- E est réunion d'une suite (A_k) d'ensembles tels que $H\{\chi_0\in A_k\}< \infty$ pour tout k : d'abord $\{a\}$ pour k=0, d'après l'hypothèse.

Pour $k>0$, nous prendrons $A_k=\{\varphi< 1 - \frac{1}{k}\}$: en effet, si la trajectoire ω saute à l'instant t de a dans cet ensemble, la surmartingale $(e^{-s}\varphi\circ X_s)$ subit à cet instant un " downcrossing" d'au moins e^{-t}/k, et l'inégalité de DOOB est là pour dire que ces sauts forment un ensemble discret. Le processus des excursions telles que $\chi_0\in A_k$ est donc discret, et cela signifie précisément que $H\{\chi_0\in A_k\}<\infty$.

Le reste de la démonstration est simplement une reprise de la preuve du théorème 5, avec $r=0$.

REMARQUE.- Lorsque le processus (X_t) sort <u>continûment</u> de a , la mesure n_0 comporte en général une masse égale à $+\infty$ au point a, et l'on n'a pas $n_r=n_0Q_r$.

BIBLIOGRAPHIE

Outre l'article cité en page 1, le lecteur pourra consulter un autre travail récent d'ITO : <u>Poisson point processes attached to Markov point processes</u> , Proceedings 6th Berkeley Symposium, 1970. Cet article contient la construction de tous les processus de Markov qui coincident avec un processus donné X jusqu'au temps d'entrée dans $\{a\}$.