PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur un article de Dubins

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 170-176
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__170_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969/70

SUR UN ARTICLE DE DUBINS

par P.A. Meyer

Soit $(X_n)_{n\in N}$ une martingale ; on peut supposer sans restreindre la généralité que X_0 est une constante e. Soit $(B_t)_{t\geqq 0}$ un mouvement brownien issu de e. On se propose de trouver une suite de temps d'arrêt $0=S_0\leqq S_1 \ldots \leqq S_n \ldots$ telle que les processus (X_n) et (B_{S_n}) aient même loi.

Si l'on n'impose aucune restriction aux S_n, la remarque suivante (communiquée par DOOB) résout trivialement le problème. Considérons la tribu $\underline{\underline{F}}_1=\underline{\underline{T}}(B_t, t\leqq 1)$; la loi induite sur la tribu séparable $\underline{\underline{F}}_1$ étant sans atomes, cette tribu est suffisamment riche pour que l'on puisse construire une suite (Z_n) de variables aléatoires $\underline{\underline{F}}_1$-mesurables, identique en loi à la suite (X_n). Posons alors $S_0=0$ et

$$S_1(\omega)= \inf \{ t>1 : B_t(\omega)=Z_1(\omega) \}$$

$$S_2(\omega)= \inf \{ t>S_1(\omega) : B_t(\omega)=Z_2(\omega) \} \text{ , etc.}$$

Il est clair que les S_n sont des temps d'arrêt (p.s. finis en vertu du comportement à l'infini des trajectoires du mouvement brownien, qui sera rappelé plus loin), et que les processus (B_{S_n}) et (Z_n) sont égaux. Noter que la propriété de martingale du processus (X_n) n'a pas été utilisée, et que $E[S_1]=+\infty$ si l'on n'a pas p.s. $Z_1=B_1$.

On se propose donc de trouver une construction naturelle des S_n qui satisfasse à la propriété suivante : si les X_n ont des moments du second ordre, les S_n doivent être intégrables. On doit ce problème, et sa première solution dans un cas particulier, à SKOROKHOD [1], puis une extension à STRASSEN [2] ; leurs méthodes utilisent malheureusement des variables aléatoires auxiliaires adjointes au mouvement brownien. Nous suivons ici DUBINS [3], en précisant quelques points de son exposé qui nous ont semblé obscurs à la lecture. Une démonstration récente est due à ROOT [4]. A vrai dire, le point qui nous semble le plus intéressant dans l'article de DUBINS est , plutôt que le résultat final sur les S_n, la remarquable approximation discrète d'une mesure μ sur $\mathbb{R}$ qui figure au § 1 ci-dessous .

§ 1 . RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Les résultats de ce paragraphe sont simples, et ne font pas intervenir le mouvement brownien : nous considérons une mesure μ sur $\mathbb{R}$, ayant un moment du premier ordre, et nous nous proposons de l'approcher par une suite remarquable de mesures à support fini. Malheureusement, le système de notations est long à exposer.

Soit H une partie finie de $\mathbb{R}$ (éventuellement vide) : $H=\{a_1,\dots,a_n\}$ où $a_1 \leqq a_2 \dots \leqq a_n$. Nous poserons $a_0=-\infty$, $a_{n+1}=+\infty$, $A_i=]a_i,a_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n)$; les A_i forment une partition de $\mathbb{R}$, qui engendre une tribu finie $\underline{\underline{H}}$.

Nous construisons une nouvelle subdivision $\hat{H}$ de la manière suivante : si la mesure $\mu.I_{A_i}$ n'est pas nulle, nous désignons par p_i sa masse totale, et nous posons

$$\mu_i = \frac{1}{p_i} I_{A_i}.\mu \qquad ; \quad e_i = \text{espérance de } \mu_i$$

Si la mesure est nulle, nous posons $p_i=0$, $\mu_i=\varepsilon_{a_i}$, $e_i=a_i$. Dans ces conditions, la nouvelle partie finie $\hat{H}$ est formée des points $a_1,\dots,a_n$ et $e_0,e_1,\dots,e_n$. Nous rangeons alors ces points par ordre croissant, et nous définissons les points $\hat{a}_i$, la partition $\hat{A}_i$, la tribu $\hat{\underline{\underline{H}}}$.

Nous désignons par X l'application identique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par Y la variable aléatoire $E[X|\underline{\underline{H}}]$ (espérance conditionnelle pour la loi μ : Y vaut e_i sur A_i), par $\hat{Y}$ la variable aléatoire $E[X|\hat{\underline{\underline{H}}}]$. Voici alors un résultat auxiliaire (proche d'un lemme utilisé, indépendamment de nous, par Gordon SIMONS [5])

LEMME 1.- $E[|X-Y|] = E[|\hat{Y}-Y|]$.

DEMONSTRATION.- Il suffit de prouver que pour $i=0,1\dots,n$

$$\int_{]a_i,e_i]} |X-Y|\, d\mu = \int_{]a_i,e_i]} |\hat{Y}-Y|\, d\mu \quad ; \quad \int_{]e_i,a_{i+1}]} |X-Y|\, d\mu = \int_{]e_i,a_{i+1}]} |\hat{Y}-Y|\, d\mu$$

Regardons par exemple le premier intervalle : Y y vaut e_i, donc $|X-Y|$ y vaut e_i-X . Nous pouvons nous borner à étudier le cas où l'intervalle n'est pas μ-négligeable. Posons alors

$$q = \mu(]a_i,e_i]) \neq 0$$

$$f = \frac{1}{q} \int_{]a_i,e_i]} X\, d\mu \leqq e_i$$

Alors $\hat{Y}$ vaut f sur $]a_i,e_i]$, et $|\hat{Y}-Y|$ y vaut e_i-f. L'égalité à démontrer se réduit donc à

$$\int_{]a_i,e_i]} (e_i-X)\, d\mu = \int_{]a_i,e_i]} (e_i-f)\, d\mu$$

ou à $\int_{]a_i,e_i]} X\, d\mu = f.\mu(]a_i,e_i])$, qui est vraie. Le lemme est établi.

Nous allons maintenant considérer une suite particulière de subdivisions. Désignons par D l'ensemble des mots dyadiques, et définissons pour tout mot $m\in D$, une mesure μ_m, un point e_m, un coefficient p_m de la manière suivante, par récurrence sur la longueur $|m|$ de m .

$\mu_\emptyset=\mu$, $p_\emptyset=1$, $e_\emptyset$ = espérance de μ

$p_0=\mu(]-\infty, e_\emptyset])$, $p_1=\mu(]e_\emptyset,+\infty[)$

$\mu_0=\frac{1}{p_0}I_{]-\infty,e_\emptyset]}\cdot\mu$, $\mu_1=\frac{1}{p_1}I_{]e_\emptyset,+\infty[}\cdot\mu$ (ou $\varepsilon_{e_\emptyset}$ si $p_1=0$)

e_0= espérance de μ_0 , e_1= espérance de μ_1 .

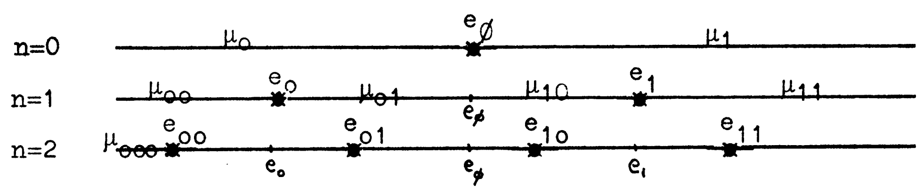
Ensuite, si les définitions ont été données pour les mots de longueur n, et si $|m|=n$, nous passons à la longueur n+1 de la manière suivante

$p_{m0}=\mu_m(]-\infty, e_m])$, $p_{m1}=\mu_m(]e_m,+\infty[)$ (e_m espérance de μ_m)

$\mu_{m0}=(\mu_m)_0=\frac{1}{p_{m0}}I_{]-\infty,e_m]}\cdot\mu$, de même $\mu_{m1}=(\mu_m)_1$

e_{mi} = espérance de μ_{mi} (i=1,0)

Nous désignerons par K_n l'ensemble des e_m pour $|m|=n$, et par H_n l'ensemble des e_m pour $|m|\leq n$. Voici des dessins qui indiquent ce qui se passe pour les petites valeurs de n. Les ✱ désignent les éléments de K_n .



REMARQUES.- 1) La donnée des ensembles K_n détermine uniquement les points e_m et les coefficients p_m. Nous savons que $e_\emptyset$ est l'unique élément de K_0, et que $p_\emptyset=1$; supposons déterminés les e_m et p_m pour tous les mots de longueur n. Alors

si $e_m \in K_{n+1}$, on a $e_{m0}=e_{m1}=e_m$, $p_{m0}=1$, $p_{m1}=0$

si $e_m \notin K_{n+1}$, e_{m0} est le point de K_{n+1} situé immédiatement à gauche de e_m , e_{m1} celui qui est situé immédiatement à droite, et p_{m0} et p_{m1} sont déterminés par les relations $p_{m0}+p_{m1}=1$, $p_{m0}e_{m0}+p_{m1}e_{m1}=e_m$.

2) Reprenons les notations du début : il est clair que $H_{n+1} = \hat{H}_n$. Posons $Y_n=E[X|\underline{\underline{H}}_n]$; nous avons $Y_{n+1}=\hat{Y}_n$. Les variables aléatoires Y_n forment (pour la loi μ) une martingale uniformément intégrable. La loi de Y_0 est portée par $K_1=\{e_0,e_1\}$; elle vaut $p_0\varepsilon_{e_0}+p_1\varepsilon_{e_1}$. Nous la noterons λ_1 . Plus généralement, nous noterons λ_{n+1} la loi de Y_n ; on vérifie aisément qu'elle est portée par K_{n+1} et qu'elle vaut

$$\lambda_{n+1} = \sum_{|m|=n+1} q_m \varepsilon_{e_m}$$

où il est facile de calculer q_m : si le mot m s'écrit $m_1m_2\ldots m_{n+1}$, on a

$$q_m=p_{m_1}p_{m_1m_2}\cdots\, p_{m_1m_2\ldots m_{n+1}} \quad .$$

3) Un point $x\in K_n$ peut admettre plusieurs représentations $x=e_m$ ($|m|=n$), mais il existe <u>un seul</u> m pour lequel $x=e_m$, $q_m\neq 0$. Noter aussi que les points de K_{n+1} les plus proches de e_m ($|m|=n$) sont e_{m0} et e_{m1} (éventuellement confondus tous deux avec e_m), et que si $e_m<e_{m'}$, (m et m' de longueur n) on a $e_{m1}<e_{m'0}$.

Le lemme suivant conclut le paragraphe :

LEMME 2.- <u>Les mesures λ_n convergent étroitement vers</u> μ .

DÉMONSTRATION.- Les Y_n forment une martingale uniformément intégrable, qui converge donc μ-p.s. et dans $L^1(\mu)$. On a donc $\lim_{n\to\infty} E[|Y_{n+1}-Y_n|]=0$. D'après le lemme 1 cela entraîne $\lim_{n\to\infty} E[|X-Y_n|]=0$, donc $Y_n\to X$ p.s.. La convergence p.s. entraînant la convergence en loi, le lemme est prouvé.

§ 2 . UTILISATION DU MOUVEMENT BROWNIEN

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur le mouvement brownien.

Désignons par Ω l'ensemble de toutes les applications ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \omega(t) = -\infty \quad , \quad \overline{\lim}_{t\to\infty} \omega(t) = +\infty$$

Nous posons $\omega(t)=B_t(\omega)$, $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{T}}(B_s,\ s\leq t)$, $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_\infty$. Si ν est une loi su: $\mathbb{R}$, P_ν est l'unique loi sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ pour laquelle le processus (B_t) est un mouvement brownien de loi initiale ν .

Nous désignerons en particulier par P la loi du mouvement brownien issu de 0. Nous utiliserons les résultats suivants :

a) Le processus (X_t^2-t) est une martingale (pour la loi P). Si T est un temps d'arrêt p.s. fini, on a $E[B_T^2] \leq E[T]$, avec égalité si le second membre est fini.

b) Si $a\neq 0$, le temps d'entrée dans $\{a\}$ est p.s. fini (d'après le c‹ portement des trajectoires lorsque $t\to\infty$), mais son espérance est in- fi

c) Si $a<0<b$, le temps d'entrée T dans l'ensemble $\{a,b\}$ est (pour loi P) une variable aléatoire pourvue de moments de tous les ordres, on a $P\{B_T=a\} = p$, $P\{B_T=b\}= q$, où p et q sont déterminés par

$$p+q=1 \quad , \quad pa+qb = 0 \quad .$$

Ceci étant, donnons nous d'abord une loi μ d'espérance e . Nous noter‹ P_e la loi P_{ε_e} . Nous définissons des temps d'arrêt R_n^μ (nous omettron: provisoirement la mention de μ) de la manière suivante :

$$R_0 = \inf \{ t:\ B_t \in K_0 \}$$

$$R_1 = \inf \{ t \geq R_0 :\ B_t \in K_1 \} \ \ldots \ R_{n+1} = \inf \{ t \geq R_n :\ B_t \in K_n \}$$

où $K_0, K_1 \ldots$ sont les ensembles associés à μ au paragraphe 1. Noter qu‹ ces temps d'arrêt sont finis, croissent avec n, et que $R_0=0$ P_e-p.s..

Nous désignerons par S_1^μ (ou simplement S_1 pour l'instant) la li: te des R_n. Montrons (d'après une communication de I.MEILIJSON*) que S_1 est <u>fini</u> sur Ω . Soit $N(\omega)$ le premier instant où la trajectoire ω

(*) La démonstration de la rédaction précédente donnait seulement un résul· p.s., et la possibilité du résultat plus fort était mise en doute.

revient en e, après avoir rencontré e une première fois, puis K_1 (en e_1 par exemple). Avant l'instant $N(\omega)$, la trajectoire a rencontré dans cet ordre $e=e_\emptyset$, e_1, e_{10}, e_{100}, e_{1000} , donc aussi $K_0, K_1, K_2 \dots$ dans cet ordre ; on a donc $S_1 \leqq N$, et $S_1 < \infty$.

LEMME 3.- <u>Si</u> Ω <u>est muni de la mesure</u> P_e, <u>la loi de</u> B_{R_n} <u>est égale à</u> λ_n.

DÉMONSTRATION.- Nous désignons par λ'_n cette loi. Nous raisonnons par récurrence, en supposant que pour tout mot m de longueur n tel que $q_m \neq 0$ on a $P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m$. Nous allons prouver que la même propriété a lieu pour les mots de longueur n+1.

Soit m' un mot de longueur n+1 tel que $q_{m'} \neq 0$. On a alors m'=mi, avec $q_m \neq 0$, donc $P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m$. Si e_m appartient à K_{n+1}, nous avons $P\{B_{R_{n+1}} = e_{m0}\} = P\{B_{R_n} = e_m\} = q_m = q_m p_{m0} = q_{m0}$, tandis que $e_{m1} = e_m$, $q_{m1} = q_m p_{m1} = 0$, de sorte que i=0 et que la propriété est vraie. Si e_m n'appartient pas à K_{n+1} , e_{m0} et e_{m1} sont les deux points de K_{n+1} situés immédiatement de part et d'autre de e_m et on a, d'après la propriété c) du mouvement brownien rappelée plus haut

$$P\{R_{n+1} = e_{mi} \mid B_{R_n} = e_m\} = p_{mi}$$

Donc $\lambda'_{n+1}(e_{mi}) \geqq q_m p_{mi} = q_{mi} = q_{m'}$. Comme la somme des $q_{m'}$ tels que $q_{m'} \neq 0$ vaut 1, et que les $e_{m'}$ correspondants sont tous distincts, λ'_{n+1} ne peut charger d'autres points, et nous en déduisons que $\lambda'_{n+1} = \lambda_{n+1}$.

Utilisant maintenant la continuité des trajectoires, nous déduisons du lemme 2 que :

COROLLAIRE.- <u>Si</u> Ω <u>est muni de</u> P_e , <u>la loi de</u> $B_{S_1^\mu}$ <u>est</u> μ .

Enfin, nous avons le résultat :

LEMME 4.- $E[S_1^\mu] = \mathrm{Var}(\mu)$.

DÉMONSTRATION.- Nous nous ramenons au cas où e=0, et nous appliquons les propriétés a) et c) du mouvement brownien rappelées plus haut : comme les R_n sont intégrables, on a $E[R_n] = \int x^2 \lambda_n(dx) \leqq \int x^2 \mu(dx)$ (x^2 étant une fonction convexe), donc à la limite $E[S_1^\mu] \leqq \mathrm{Var}(\mu)$. Si le second membre est fini, le premier l'est aussi et on a l'égalité d'après a) ; si le premier membre est fini, de même. On a donc l'égalité dans tous les cas.

Il nous reste l'extension aux martingales. Nous nous bornerons à traiter le cas d'une martingale réduite à deux variables aléatoires X_0, X_1 , en laissant le cas général au lecteur. Nous noterons λ la loi de X_0 , et nous munirons Ω de P_λ. D'autre part, nous choisirons une répartition conditionnelle $x \mapsto \mu_x$ de X_1 relativement à X_0 , telle que pour tout x, μ_x ait une espérance finie égale à x. Nous poserons alors sur Ω

$$S_1(\omega) = S_1^{\mu_x}(\omega) \text{ si } X_0(\omega)=x$$

Il est facile de vérifier que S_1 est un temps d'arrêt, et que le couple (B_0, B_{S_1}) a même loi que (X_0, X_1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.V. SKOROKHOD.- Studies in theory of random processes (traduction américaine). Addison-Wesley 1965 (p.163).

[2] V.STRASSEN .- Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. Proceedings of the 5th Berkeley Symposium, Vol.II, part 1 (p.334).

[3] L.E.DUBINS. - On a theorem of Skorohod. Ann. M. Stat., 1968, 2094-2097.

[4] D.H. ROOT. - The existence of certain stopping times on brownian motion. Ann. M. Stat., 1969, 715-718.

[5] G.SIMONS.- A martingale decomposition theorem. Ann.M.Stat., 41, 1970, 1102-1104.