BERNARD MAISONNEUVE

Ensembles régénératifs, temps locaux et subordinateurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 147-169
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__147_0>

ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS, TEMPS LOCAUX ET SUBORDINATEURS

par B. MAISONNEUVE

Nous associons à tout fermé droit aléatoire M sans point isolé un processus croissant prévisible, croissant exactement sur son adhérence $\overline{M}$, appelé son <u>temps local</u>. Dans le cas où M est un ensemble régénératif parfait d'intérieur vide, ce temps local est identique à celui que nous avions déjà défini dans [5] ; il est alors continu et possède une propriété d'additivité. Nous définissons ainsi directement le temps local d'un ensemble régénératif, sans utiliser le résultat principal de Hoffmann-Jørgensen suivant lequel tout ensemble régénératif peut-être considéré comme l'ensemble des instants de passage en 0 d'un processus de Markov.

Un ensemble régénératif est alors caractérisé par l'ensemble des valeurs prises par un <u>subordinateur</u>. Nous utilisons ce résultat pour reprendre l'étude des ensembles régénératifs de Hoffmann-Jørgensen et établir le caractère markovien du processus de l'âge. Nous donnons également les relations entre la représentation de Lévy du subordinateur, le noyau fondamental H introduit par Hoffmann-Jørgensen et les caractéristiques de Krylov-Yuskevich d'un ensemble régénératif [3] .

En appendice nous montrons que pour un processus de Markov convenable admettant x_o comme point régulier et pour lequel on a pu définir un temps local, ce temps local est identique à celui de l'ensemble régénératif M_{x_o} des temps de passage en x_o .

Les paragraphes I et II constituent une rédaction détaillée de la note [4] .

I. TEMPS LOCAL D'UN FERMÉ DROIT ALÉATOIRE

Soit $(\Omega , \mathfrak{F} , P)$ un espace probabilisé complet muni d'une famille $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ croissante et continue à droite de sous-tribus de $\mathfrak{F}$, chaque $\mathfrak{F}_t$ contenant tous les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$.

Soit M un fermé droit aléatoire mesurable que, pour simplifier les considérations qui suivent, nous supposerons sans point isolé et minimal : pour tout ω de Ω les extrémités gauches d'intervalles contigus à $M(\omega)$ n'appartiennent pas à $M(\omega)$; les intervalles contigus à $M(\omega)$ sont donc de la forme $[a , b[$.

Posons pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} D_t(\omega) &= \inf\{u > t : u \in M(\omega)\} \\ &= +\infty , \text{ si cet ensemble est vide.} \end{aligned}$$

Le processus (D_t) ainsi défini est croissant et continu à droite. La fonction $D(\omega)$ est constante sur tout intervalle $[a , b[$ contigu à $M(\omega)$, avec $D_{a-}(\omega) = a$, $D_a(\omega) = b$. Les points de $M(\omega)$ sont caractérisés par la propriété $D_t(\omega) = t$. Noter que le processus (D_t) n'est pas nécessairement adapté à la famille $(\mathfrak{F}_t)$, même si M l'est, et n'est pas nécessairement nul pour $t = 0$.

Nous désignons par $\Phi = (\Phi_t)_{t\geq 0}$ une version continue à droite de la surmartingale $(E[e^{-D_t} \mid \mathfrak{F}_t])_{t\geq 0}$.

Ce processus est bien une surmartingale, car (e^{-D_t}) est un processus décroissant, et elle admet une version continue à droite, car l'application $t \to E[e^{-D_t}]$ est continue à droite, ainsi que la famille de tribus $(\mathfrak{F}_t)$.

Noter que pour tout temps d'arrêt T de la famille $(\mathfrak{F}_t)$

$$\Phi_T = E[e^{-D_T} \mid \mathfrak{F}_T] \quad \text{p.s.}$$

DÉFINITION. - On appelle temps local du fermé droit aléatoire M le processus croissant naturel (ou prévisible) $L = (L_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$\Phi_t = E[\int_t^\infty e^{-s}\, dL_s \mid \mathcal{F}_t] \quad .$$

Pour construire L on considère le processus croissant naturel intégrable $(B_t)_{t\geq 0}$ engendrant le potentiel Φ et on pose

$$L_t = \int_0^t e^s\, dB_s \quad .$$

Avant d'énoncer le théorème 1, nous allons donner quelques notations et établir un lemme que nous utiliserons par la suite.

Désignons par D l'ensemble des points de M qui sont isolés à gauche, par M' l'ensemble $\overline{M} \setminus D$; pour tout $\varepsilon > 0$ désignons encore par $[U_n^\varepsilon , V_n^\varepsilon[$ le n-ième intervalle contigu à M dont la longueur dépasse strictement ε et posons $T_n^\varepsilon = U_n^\varepsilon + \varepsilon$. Rappelons que si $\overline{M}$ est progressivement mesurable les ensembles $\overline{M}$ et D sont bien mesurables et que T_n^ε et V_n^ε sont des temps d'arrêt (voir par exemple la thèse de Dellacherie).

LEMME 1. - Si l'ensemble $\overline{M}$ est progressivement mesurable, l'ensemble M' est prévisible.

En effet on peut écrire :

$$M' = R_+ \setminus \{ \bigcup_{\substack{\varepsilon>0 \\ \varepsilon \text{ rationnel}}} (\bigcup_n]T_n^\varepsilon , V_n^\varepsilon])\} \quad ,$$

et l'intervalle aléatoire $]T_n^\varepsilon , V_n^\varepsilon]$ est prévisible puisque ses bornes sont des temps d'arrêt (ce qui n'est pas le cas de U_n^ε).

THÉORÈME 1. - Si le fermé droit aléatoire M est progressivement mesurable (ou seulement si son adhérence $\overline{M}$ l'est), l'ensemble C des points de croissance

<u>de son temps local</u> L <u>est indistinguable de</u> $\overline{M}$, <u>et l'ensemble</u> C_d <u>des points de croissance à droite de</u> L <u>est indistinguable de</u> M .

DÉMONSTRATION. - Si C **est parfait, le fermé droit** C_d **est minimal et** $\overline{C}_d = C$, **donc le** théorème sera entièrement établi si nous montrons que $C \doteq \overline{M}$ (le point signifie que C et $\overline{M}$ sont indistinguables). Nous ferons la démonstration en trois étapes :

a) $\underline{C \overset{\bullet}{\subset} \overline{M}}$.

En effet

$$E[B_{V_n^\varepsilon} - B_{T_n^\varepsilon}] = E[\Phi_{T_n^\varepsilon} - \Phi_{V_n^\varepsilon}] = E[e^{-D_{T_n^\varepsilon}} - e^{-D_{V_n^\varepsilon}}] = 0$$

donc $L_{V_n^\varepsilon} = L_{T_n^\varepsilon}$ p.s. et comme $\overline{M}^c$ est la réunion des intervalles $]T_n^\varepsilon , V_n^\varepsilon[$ pour ε rationnel et n entier, on a $C \overset{\bullet}{\subset} \overline{M}$.

b) $\underline{D \overset{\bullet}{\subset} C}$.

Comme D et C sont bien mesurables il suffit de montrer que tout temps d'arrêt passant dans $D \setminus C$ est p.s. infini.

Posons pour tout $t \geq 0$ $R_t = \inf\{u > t : L_u > L_t\}$. Le processus (R_t) est continu à droite et

$$C_d(\omega) = \{(t , \omega) : R_t(\omega) = t\} \quad .$$

Si T est un temps d'arrêt passant dans $D \setminus C$ ou dans $D \setminus C_d$ on a $R_T > T$ sur l'ensemble $\{T < \infty\}$. R_T étant un temps d'arrêt l'intervalle $]T , R_T[$ est bien mesurable, donc il existe un temps d'arrêt U tel que $T < U < R_T$ sur $\{T < \infty\}$. On a alors $L_U = L_T$ donc $D_U = D_T$ p.s., ce qui implique que sur $\{T < \infty\}$ T est p.s. origine d'un intervalle contigu. Or T passant dans D est point d'accumulation de points de M sur l'ensemble $\{T < \infty\}$. Il en résulte que $T = \infty$ p.s. .

c) $\underline{M' = \overline{M} \setminus D \stackrel{\bullet}{\subset} C_g}$.

Les ensembles M' et C_g étant prévisibles, il suffit de montrer que tout t.a. T prévisible passant dans M' passe aussi dans C_g . Or si le temps d'arrêt prévisible T passe dans M' et est "annoncé" par une suite (T_n) de temps d'arrêt (c'est-à-dire que $T_n \uparrow T$, $T_n < T$ sur $\{T > 0\}$), il est également annoncé par la suite (D_{T_n}) . Comme D_{T_n} passe dans D , il est point de croissance de L sur $\{T < \infty\}$ d'après b). Il en résulte que T est point de croissance à gauche sur ce même ensemble.

Le théorème résulte des points a) b) c).

Remarque. - On peut préciser que $C_g \doteq M'$, car $D = \Sigma[V_n^\varepsilon]$ et V_n^ε est p.s. point de continuité de L d'après la démonstration de a).

II. CAS D'UN ENSEMBLE REGENÉRATIF

Nous supposerons maintenant que M est un ensemble régénératif sans point isolé contenant 0 et réalisé canoniquement sur l'espace des fonctions en dents de scie. Voici d'abord quelques rappels à ce sujet :

Rappels et notations.- Une fonction continue à droite ω de $\overline{R}_+$ dans $\overline{R}_+$ est appelée fonction en dents de scie si l'ensemble $\overline{M}(\omega) = \{t : \omega(t) = 0\}$ est fermé dans R_+ , si la fonction ω est linéaire de pente 1 dans tout intervalle contigu à $M(\omega)$ et si $\omega(+\infty) = +\infty$.

Nous désignons par Ω l'ensemble des fonctions en dents de scie, par $(A_t)_{t\geq 0}$ les applications coordonnées de Ω , par $(\theta_t)_{t\geq 0}$ les opérateurs de translation habituels, par M le fermé droit minimal admettant pour adhérence l'ensemble $\{t : A_t = 0\}$, par $\mathcal{F}^o$ la tribu $\mathcal{C}\{A_t , t \geq 0\}$. Etant donnée une loi de probabilité P sur $(\Omega , \mathcal{F}^o)$, nous lui associons la plus petite famille continue à droite $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, telle que pour tout t la tribu $\mathcal{F}_t$ contienne

$\mathcal{T}\{A_s\ , s \leq t\}$ et tous les ensembles P-négligeables. Les temps d'arrêt envisagés par la suite seront relatifs à la famille $(\mathcal{F}_t)$.

Le fermé aléatoire $\overline{M}$ est progressivement mesurable (donc bien mesurable) par rapport à la famille $(\mathcal{F}_t)$ puisque $\overline{M} = \{t : A_t = 0\}$ et que (A_t) est un processus continu à droite. Si M est p.s. sans point isolé le théorème 1 permet donc de lui associer un temps local L .

DÉFINITION. - <u>On dit que le fermé droit aléatoire</u> M <u>est un ensemble régénératif</u> (<u>contenant</u> 0) <u>pour la loi</u> P <u>si</u> $A_0 = 0$ <u>p.s. et s'il satisfait la propriété de régénération</u> :

<u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>passant dans</u> M, <u>tout</u> $A \in \mathcal{F}_T$ <u>contenu dans</u> $\{T < \infty\}$, <u>tout</u> $B \in \mathcal{F}$, <u>on a</u> :

$$P(A \cap \theta_T^{-1}(B)) = P(A)\ P(B) \quad .$$

Si N est un fermé droit aléatoire contenant 0 défini sur un espace $(W , \mathcal{G} , Q)$, on désigne par ψ l'application de W dans Ω qui à w associe la trajectoire en dents de scie admettant $N(w)$ comme ensemble de zéros.

DÉFINITION. - <u>On dit que le fermé droit aléatoire</u> N <u>est un ensemble régénératif si sa forme canonique</u> $(M , Q \circ \psi^{-1})$ <u>est un ensemble régénératif</u>.

<u>Deux ensembles régénératifs sont dits équivalents s'ils admettent la même forme canonique</u>.

Rappelons qu'un ensemble régénératif est ou bien p.s. <u>discret</u> ou bien p.s. <u>sans point isolé</u>, à cause de la propriété de régénération. C'est surtout le deuxième type qui nous intéressera par la suite.

THÉORÈME 2. - <u>Si le fermé droit aléatoire</u> M <u>est un ensemble régénératif sans point isolé, son temps local</u> L <u>est continu et satisfait la propriété d'additivité suivante</u> :

$$L_{T+t} = L_T + L_t \circ \theta_T \quad \text{p.s. sur } \{T < \infty\}$$

<u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>passant dans</u> M.

DÉMONSTRATION

1) Pour établir la continuité de L commençons par démontrer le lemme suivant :

LEMME 2. - Si T est un temps d'arrêt prévisible passant dans $M' = \bar{M} \setminus D$, on a $D_{T-} = D_T$ p.s..

Soit en effet T un temps d'arrêt prévisible passant dans M' : T est point d'accumulation à gauche de points de M, donc si (T_n) est une suite de t.a. annonçant T, la suite (D_{T_n}) annonce également T ; quitte à remplacer T_n par D_{T_n} on peut donc supposer que T_n passe dans M pour tout n.

Pour tout $a > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ posons

$\alpha_a = P\{T$ est origine d'un intervalle contigu de longueur $> a\}$

$\alpha^n_{a\varepsilon} = P\{T$ est origine d'un intervalle contigu de longueur $> a$ et $T_n > T - \varepsilon\}$

$\pi_{a\varepsilon} = P\{$un intervalle contigu de longueur $> a$ commence avant l'instant $\varepsilon\}$.

D'après la propriété de régénération à l'instant T_n

$$\alpha^n_{a\varepsilon} \leq P\{T_n < \infty\}\pi_{a\varepsilon}$$

d'où $\alpha_a \leq \pi_{a\varepsilon}$ puisque $\alpha_a = \lim_n \uparrow \alpha^n_{a\varepsilon}$. Cette inégalité, vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$, montre que $\alpha_a = 0$, et ceci pour tout $a > 0$. La conclusion du lemme résulte alors de ce que

$$P\{D_{T-} \neq D_T\} = \lim_{a \to 0} \alpha_a = 0 \quad .$$

Revenons au théorème 2. - Comme le processus (D_t) est continu sur M'^c et que M' est prévisible (lemme 1) la conclusion du lemme $D_{T-} = D_T$ p.s. vaut encore pour tout temps d'arrêt prévisible T. Par suite $E[B_{T-}] = E[B_T]$ pour tout temps d'arrêt prévisible T et le processus prévisible B est donc continu. Il en est de même de $L = \int_0^{\cdot} e^s \, dB_s$.

2) Pour établir la propriété d'additivité de L nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 3. - Soit $t \geq 0$ fixé. Si Z et Z' sont deux variables aléatoires telles que $E(Z \mid \mathcal{F}_t) = E(Z' \mid \mathcal{F}_t)$ p.s. et si T est un temps d'arrêt passant dans M, on a aussi :

$$E[Z \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_{T+t}] = E[Z' \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_{T+t}] \text{ p.s. sur } \{T < \infty\} .$$

DÉMONSTRATION. - Pour tout $A \in \mathcal{F}_T$ contenu dans $\{T < \infty\}$ et tout $B \in \mathcal{F}_t^o$, on a d'après la propriété de régénération appliquée au temps d'arrêt T :

$$\int_{A \cap \theta_T^{-1}(B)} Z \circ \theta_T \, dP = P(A) \int_B Z \, dP$$

$$\int_{A \cap \theta_T^{-1}(B)} Z' \circ \theta_T \, dP = P(A) \int_B Z' \, dP$$

et les seconds membres sont égaux à cause de l'hypothèse faite sur Z et Z'. Comme la classe des $A \cap \theta_T^{-1}(B)$ envisagés est stable par intersection finie et engendre $\mathcal{F}_{T+t}$ aux ensembles négligeables près, le lemme est donc démontré.

La relation $D_{T+t} = T + D_t \circ \theta_T$ vraie si T passe dans M et le lemme 3 appliqué à $Y = e^{-D_t}$ et $Z = \int_t^\infty e^{-s} \, dL_s$ donnent :

$$\Phi_{T+t} = E[e^{-D_{T+t}} \mid \mathcal{F}_{T+t}] = e^{-T} E[e^{-D_t} \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_{T+t}]$$
$$= e^{-T} E[\int_t^\infty e^{-s} \, dL_s \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_{T+t}] .$$

Comme par ailleurs

$$\Phi_{T+t} = E[\int_{T+t}^{\infty} e^{-s}\, dL_s \mid \mathcal{F}_{T+t}] = e^{-T} E[\int_{t}^{\infty} e^{-s}\, d(L_{T+s} - L_T) \mid \mathcal{F}_{T+t}]$$

l'unicité du processus croissant prévisible engendrant la surmartingale $(\Phi_{T+t})_{t\geq 0}$ (adaptée à la famille $(\mathcal{F}_{T+t})_{t\geq 0}$) impose que

$$L_{T+s} - L_T = L_s \circ \theta_T \quad \text{p.s. sur } \{T < \infty\} \ .$$

III. CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS À L'AIDE DES SUBORDINATEURS

Rappelons qu'un processus croissant $(Z_t)_{t\geq 0}$ (continu à droite et tel que $Z_o = 0$) est appelé <u>subordinateur</u> s'il est à accroissements indépendants et stationnaires, à cela près qu'il peut avoir un saut égal à $+\infty$.

Meyer a montré dans [6] que tout subordinateur ne prenant que des valeurs finies admet pour image un ensemble régénératif minimal. Sa démonstration repose sur les propriétés de mesurabilité de l'image $I_Z = Z_{\mathbb{R}_+}$ et sur la propriété de Markov forte de Z ; elle s'étend donc facilement à tout subordinateur.

Voici maintenant la réciproque de ce résultat :

THÉORÈME 3. - <u>Tout ensemble régénératif est équivalent à l'image d'un subordinateur</u>.

On peut supposer l'ensemble régénératif M canoniquement défini par une probabilité P sur $(\Omega , \mathcal{F}^o)$. Si M est <u>discret</u>, la construction d'un subordinateur admettant une image équivalente à M (au sens des ensembles régénératifs) est classique.

Si M est <u>sans point isolé</u>, il admet un temps local continu L possédant la propriété d'additivité du théorème 2. Posons pour tout $t \geq 0$:

$$Z_t = \inf\{u : L_u > t\} \quad .$$

Le processus Z ainsi défini est continu à droite, tel que $Z_o = 0$, et vérifie la relation :

$$Z_{t+s} = Z_s + Z_t \circ \theta_{Z_s} \quad \text{p.s.} \quad \text{sur} \quad \{Z_s < \infty\} \quad .$$

Il résulte alors de la propriété de régénération appliquée au temps d'arrêt Z_s passant dans M que Z est un <u>subordinateur</u>. L'image de Z est indistinguable de l'ensemble $C_d \doteq M$ des points de croissance à droite de L , et le théorème 3 est démontré.

IV. ÉTUDE DES ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS À L'AIDE DES SUBORDINATEURS

Dans ce paragraphe nous supposons encore l'ensemble régénératif canonique et minimal. Nous lui associons un subordinateur Z , tel que I_Z et M soient équivalents. Lorsque M est **sans point isolé** nous prenons pour Z l'inverse continu à droite de son temps local ; on a alors $I_Z \doteq M$.

Le processus Z admet la décomposition :

$$Z_t = at + \int_{]0,\infty]} x \, \nu(t , dx)$$

où a est une constante ≥ 0 et où $\nu(t , B)$ est le nombre de sauts de Z se produisant avant l'instant t et ayant une amplitude dans le borélien B $(0 \notin \bar{B})$. La mesure de Lévy de Z est la mesure positive λ sur $]0 , + \infty]$ définie par $\lambda(B) = E[\nu(1 , B)]$ pour tout borélien B de $]0 , + \infty[$ et telle que $\lambda(\{+ \infty\})$ soit le paramètre de la loi exponentielle de la durée de vie de Z . Elle vérifie $\int_0^\infty (x \wedge 1) \lambda(dx) < \infty$. Notons aussi que l'instant du premier saut de Z ayant une amplitude dans le borélien B est une variable exponentielle de paramètre $\lambda(B)$.

A. STRUCTURE DES ENSEMBLES RÉGÉNÉRATIFS

THÉORÈME 4. -

1) M est p.s. borné ou p.s. non borné selon que $\lambda\{+\infty\} > 0$ ou $= 0$.

2) La mesure de Lebesgue de M est p.s. nulle ou p.s. > 0 selon que $a = 0$ ou $a > 0$.

3) M est p.s. d'intérieur vide ou p.s. d'intérieur non vide selon que $\frac{\lambda]0\,,\,\infty]}{a} = +\infty$ ou $< +\infty$.

4) M est p.s. discret ou p.s. sans point isolé selon que ($a = 0$ et $\lambda]0\,,\,\infty] < +\infty$) ou que l'une de ces conditions n'est pas vérifiée.

DÉMONSTRATION. - Le premier point résulte de ce que la durée de vie de Z est une variable exponentielle de paramètre $\lambda\{+\infty\}$. On sait déjà que M est ou bien p.s. discret, ou bien p.s. sans point isolé. Si M est discret, il a un intérieur vide et une mesure de Lebesgue nulle ; il en est de même de I_Z , donc $a = 0$ et $\lambda]0\,,\,+\infty] < +\infty$ ($\lambda]0\,,\,+\infty]$ est le paramètre de la loi exponentielle du premier instant de saut de Z). Si M est sans point isolé, $M \doteq I_Z$ et d'après un résultat connu $m(M \cap [0\,,\,t]) = m(I_Z \cap [0\,,\,t]) = at$ p.s., où m désigne la mesure de Lebesgue de R . Le point 2) de la proposition en résulte. Si $\lambda]0\,,\,+\infty] = +\infty$, I_Z est p.s. d'intérieur vide, puisque Z saute instantanément et si $\lambda]0\,,\,+\infty] < +\infty$, il faut aussi que $a > 0$ puisque M n'est pas discret ; M est alors réunion d'une suite d'intervalles disjoints. Les points 3) et 4) sont ainsi établis.

THÉORÈME 5. - Soient M_t et $\overline{M}_t$ les coupes en t des ensembles M et $\overline{M}$. Alors pour tout $t \geq 0$

$$P(\overline{M}_t \setminus M_t) = 0 \quad . \tag{1}$$

DÉMONSTRATION. - Il n'y a rien à montrer si M est p.s. discret. Si M est p.s. sans point isolé, $M \doteq I_Z$ et $P(\overline{M}_t \setminus M_t) = P(Z_{L_{\overline{t}}} = t\ ,\ Z_{L_t} > t)$. Comme L_t est le temps d'entrée du processus Z dans le fermé $[t\ ,\ \infty]$ et que Z est un processus de Hunt, cette expression est nulle d'après un résultat de Weil [7] généralisé par Dellacherie [1] .

Remarque. - La relation (1) faisait partie des hypothèses de Hoffmann-Jørgensen [2] .

B. ÉTUDE DU PROCESSUS DES ÂGES (A_t)

Nous supposerons dans ce paragraphe que l'ensemble régénératif canonique M est p.s. <u>sans point isolé.</u>

DÉFINITION. - <u>Pour tout</u> $x \geq 0$ <u>posons</u>

$$T^x = \inf\{t > 0 : A_t = x\} \quad .$$

PROPOSITION 1. - <u>Supposons</u> $\lambda]0\ ,\ \infty] \neq 0$ <u>et soit</u> $c = \inf\{x > 0 : \lambda]x\ ,\ \infty] = 0\}$.

<u>On a</u> $T^x < \infty$ p.s. <u>pour</u> $x < c$,

<u>et</u> $T^x = \infty$ p.s. <u>pour</u> $x \geq c$.

DÉMONSTRATION. - L'instant L_{T^x} du premier saut de Z ayant une amplitude dans l'intervalle $]x\ ,\ \infty]$ est une variable exponentielle de paramètre $\lambda]x\ ,\ \infty]$.

Si $x < c$, $\lambda]x\ ,\ \infty] > 0$ donc $L_{T^x} < \infty$ p.s. et $T^x < \infty$ p.s.

Si $x \geq c$, $\lambda]x\ ,\ \infty] = 0$ donc $L_{T^x} = \infty$ p.s. et $T^x = \infty$ p.s. .

DÉFINITIONS. - <u>Pour tout borélien</u> B <u>de</u> $\overline{R}_+$ <u>et tout</u> $t \geq 0$ <u>posons</u>

1) $F(t\ ,\ B) = P(A_t \in B)$

2) $P_t(x\ ,\ B) = P(A_{T^x+t} \in B)$ si $0 \leq x < c$

$P_t(x\ ,\ B) = I_B(x + t)$ si $x \geq c$

3) $R(x\ ,\ B) = P(D_{T^x} - T^x \in B)$ si $x \geq 0$.

On notera que P_t et R sont des noyaux sur $\overline{R}_+$, que $P_t(0, B) = F(t, B)$ et $R(0, B) = I_B(0) = F(0, B)$. Pour $x > 0$ la mesure $R(x, .)$ est portée par $\overline{R}^+ \setminus \{0\}$ et pour $x = 0$ elle est concentrée en 0. Le noyau R est lié au noyau H de Hoffmann-Jørgensen par la relation

$$R(x, B) = H(x, x + B) \quad .$$

PROPOSITION 2. - <u>Le noyau</u> R <u>est lié à la mesure de Lévy</u> λ <u>par la relation</u>

$$R(x, B) = \frac{\lambda(x + B)}{\lambda]x, \infty]} \quad \underline{\text{pour}} \quad x \in]0, c[$$

<u>et pour tout borélien</u> B <u>de</u> $\overline{R}_+ \setminus \{0\}$.

DÉMONSTRATION. - Soit $x \in]0, c[$ et B borélien de $\overline{R}_+ \setminus \{0\}$. Posons $C =]x, \infty] \setminus (x + B)$. Le temps $S_{B'}$ du premier saut de Z d'amplitude appartenant à $B' = x + B$ est une variable exponentielle de paramètre $\lambda(B')$, et de même pour S_C avec $\lambda(C)$. On a $R(x, B) = P(S_{B'} < S_C)$ puisque $x + D_{T^x} - T^x$ est la longueur du premier intervalle contigu à M dont l'amplitude dépasse x. Comme les variables $S_{B'}$ et S_C sont indépendantes, un calcul classique donne alors le résultat cherché.

Rappelons les deux propositions suivantes, démontrées dans l'article de Hoffmann-Jørgensen à l'aide de la propriété régénérative :

PROPOSITION 3. -

$$P_h(x, B) = I_B(x+h)R(x,]h, \infty]) + \int_{[0,h]} F(h-u, B)R(x, du) \quad .$$

PROPOSITION 4. -

$$P(A_{t+h} \in B \mid \mathcal{F}_{D_t}) = I_B(A_t + h)\, I_{\{D_t - t > h\}} + F(h - D_t + t, B)\, I_{\{D_t - t \leq h\}} \, .$$

La propriété 4 ainsi que la suivante peuvent être énoncées indifféremment avec la variable $D_t = \inf(u \geq t : u \in M)$ <u>ou la variable</u> $S_t = \inf(u \geq t , u \in \overline{M})$, car $\{D_t \neq S_t\} = \overline{M}_t \setminus M_t$ et à cause du théorème 5 . Nous donnons chaque fois l'énoncé qui est vrai sans utiliser ce théorème.

Voici rapidement la <u>démonstration</u> de la proposition 4 :

Sur l'ensemble $\{D_t - t > h\}$ on a $A_{t+h} = A_t + h$, d'où le premier terme du second membre. Posons ensuite

$$G(\omega , \omega') = I_B(A_{t+h-S_t(\omega)}(\omega')) \, I_{\{D_t - t \leq h\}}(\omega) \quad .$$

La fonction G est $\mathcal{F}_{D_t} \otimes \mathcal{F}$ mesurable et D_t est un temps d'arrêt <u>passant dans</u> M , donc d'après une généralisation de la propriété de régénération (lemme 3 de l'exposé de Meyer [6])

$$\begin{aligned} P(A_{t+h}(\omega) \in B , D_t - t \leq h \mid \mathcal{F}_{D_t}) &= E[G(\omega , \theta_{D_t}(\omega)) \mid \mathcal{F}_{D_t}] \\ &= E[I_B(A_{t+h-D_t(\omega)})] \, I_{\{D_t - t \leq h\}}(\omega) \\ &= F(t + h - D_t(\omega)., B) \, I_{\{D_t - t \leq h\}}(\omega) \quad . \end{aligned}$$

Avant d'énoncer la proposition cruciale qui suit rappelons qu'un subordinateur est un processus de Hunt et qu'il admet un <u>système de Lévy</u> constitué de la mesure de Lebesgue et du noyau de convolution N lié à la mesure de Lévy λ par la relation

$$N(x , B) = \lambda(B - x) \ .$$

Ceci nous permettra d'appliquer la formule de Weil de conditionnement par rapport au passé strict (voir [7] ou l'exposé qui figure dans le présent volume).

PROPOSITION 5. - Pour tout borélien de $\overline{R}_+$

$$P(S_t - t \in B \mid \mathcal{F}_t) = R(\Lambda_t , B) \qquad \text{p.s.} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Sur l'ensemble $\{\Lambda_t = 0\}$ les deux membres sont p.s. égaux à $I_B(0)$. Sur l'ensemble $\{\Lambda_t > 0\}$ on a $S_t = D_t = Z_{L_t} > t$ p.s. et L_t est le temps d'entrée de Z dans l'intervalle $]t , \infty]$. La formule de Weil appliquée à ce temps d'arrêt donne pour tout borélien de $\overline{R}_+ \setminus \{0\}$:

$$P(S_t \in t + B \mid \mathcal{G}_{L_t^-}) = \frac{\lambda(t + B - Z_{L_t^-})}{\lambda]t - Z_{L_t^-} , \infty]} \quad \text{p.s. sur } \{\Lambda_t > 0\} \quad ,$$

où $(\mathcal{G}_t)$ est la famille de tribus relative au subordinateur. En remarquant que $t - Z_{L_t^-} = \Lambda_t$ p.s. et que $\mathcal{G}_{L_t^-} \subset \mathcal{F}_t$, il vient alors :

$$P(S_t - t \in B \mid \mathcal{F}_t) = \frac{\lambda(\Lambda_t + B)}{\lambda]\Lambda_t , \infty]} = R(\Lambda_t , B) \quad \text{p.s. sur } \{\Lambda_t > 0\} \ .$$

Comme sur $\{\Lambda_t > 0\}$ la mesure $R(\Lambda_t , .)$ ne charge pas 0 et que $S_t > t$, la formule reste vraie pour tout borélien de $\overline{R}_+$.

Remarque. - On peut utiliser de façon analogue la formule de Weil de conditionnement par rapport à $\mathcal{G}_{L_{T^x}^-}$ pour démontrer la proposition 3.

THÉORÈME 6. - Pour tout borélien B de R_+

$$P(\Lambda_{t+h} \in B \mid \mathcal{F}_t) = P_h(\Lambda_t , B) \qquad \text{p.s.} \quad .$$

DÉMONSTRATION. - D'après la proposition 4

$$P(\Lambda_{t+h} \in B \mid \mathcal{F}_t) = E^{\mathcal{F}_t}[I_B(\Lambda_t + h)I_{\{D_t - t > h\}} + F(h - D_t + t , B)I_{\{D_t - t \leq h\}}] \quad .$$

D'après le théorème 5 , $D_t = S_t$ p.s. , donc le second membre peut s'écrire (proposition 5) :

$$I_B(A_t + h)R(A_t\ ,\ ]h\ ,\ \infty]) + \int_{[0,h]} F(h - u\ ,\ B)R(A_t\ ,\ du) = P_h(A_t\ ,\ B)\ .$$

Nous renvoyons à l'exposé de Meyer pour la démonstration de ce que les noyaux P_t forment un <u>semi-groupe de Markov</u> sur R_+ et que, si $\lambda]0\ ,\ \infty] = +\infty$, le semi-groupe (P_t) est fellérien pour la topologie droite de R_+ ; dans ce dernier cas le processus des âges est donc <u>fortement markovien.</u>

RETOUR SUR LE TEMPS LOCAL.

THÉORÈME 7. - <u>Le temps local</u> L <u>d'un ensemble régénératif canonique sans point isolé peut être choisi adapté à la famille</u> $(\mathcal{F}_t^o)$, <u>continu, additif et parfait</u> :

$$L_{t+s} = L_t + L_s \circ \theta_t \quad \forall\ s,t \qquad P\ \text{p.s.}\quad .$$

DÉMONSTRATION. - Il résulte du théorème 5 que

$$\Phi_t = E[e^{-S_t} \mid \mathcal{F}_t] \quad .$$

En utilisant la proposition 5 il vient :

$$\begin{aligned}\Phi_t &= e^{-t}\, E[e^{-(S_t-t)} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-t} \int_0^\infty e^{-u}\, P(S_t - t \leq u \mid \mathcal{F}_t)du \\ &= e^{-t} \int_0^\infty e^{-u}\, R(A_t\ ,\ [0\ ,\ u])du \\ &= e^{-t}\, \Phi \circ A_t\end{aligned}$$

où l'on a posé $\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-u}\, R(x\ ,\ [0\ ,\ u])du \;=\; \int_0^\infty e^{-u}R(x,du)$.

On utilise alors la fonction Φ et les processus additifs

$$B_t^{(h)} = \int_0^t e^{-s}\ \frac{\Phi - e^{-h}\, P_h\Phi}{h} \circ A_s\ ds$$

comme dans l'exposé [5] .

V. RELATION ENTRE LES CARACTÉRISTIQUES DE KRYLOV-YUSHKEVICH ET LE SUBORDINATEUR ASSOCIÉS À UN ENSEMBLE RÉGÉNÉRATIF SANS POINT ISOLÉ D'INTÉRIEUR VIDE

RAPPELS. - LES CARACTÉRISTIQUES DE KRYLOV-YUSHKEVICH

Pour un ensemble régénératif canonique (M , P) tel que le processus de l'âge (Λ_t) soit fortement markovien de semi-groupe (P_t) et admette l'intervalle $[0 , c[$ comme ensemble des états accessibles, Krylov et Yushkevich définissent deux caractéristiques de la façon suivante :

1) soit $x_o \in]0 , c[$ fixé. Posons

$$g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq c$$
$$g(x) = P_{x-x_o}(x_o , \{x\}) \quad \text{si} \quad x_o \leq x < c$$
$$g(x) = 1/P_{x_o-x}(x , \{x_o\}) \quad \text{si} \quad 0 < x < x_o$$

(ce dénominateur est > 0 car tous les points de $]0 , c[$ sont accessibles).

La fonction g ainsi définie sur $]0 , + \infty]$ est positive, décroissante, continue à droite et telle que $g(x_o) = 1$.

2) Pour tout x de $]0 , + \infty[$, posons $\sigma_x = m(\{t : \Lambda_{t\wedge T_x} = 0\})$ où m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et T_x le temps d'entrée du processus (Λ_t) dans l'état x ; T_x est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{F}_t)$.

L'application $(t , \omega) \to \Lambda_{t\wedge T_x(\omega)}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}_{T_x}$-mesurable à cause de la continuité à droite de (Λ_t) , donc d'après le théorème de Fubini σ_x est $\mathcal{F}_{T_x}$-mesurable.

Par un usage répété de la formule de "régénération" généralisée

$$P^x(\Lambda \cap \theta_T^{-1}(B)) = P^x(\Lambda)\ P^y(B) \quad ,$$

vraie pour tous x , y de $[0 , c[$, tout temps d'arrêt T de $\mathcal{F}_t$ tel que $\Lambda_T = y$ p.s. sur $\{T < \infty\}$, tout $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ contenu dans $\{T < \infty\}$ et tout

B de $\mathcal{F}$, on démontre successivement que pour $x \in]0\,,\,c[$

$$E(T_x) < +\infty$$
$$E(T_x - \sigma_x) = \frac{1}{g(x)} \int_0^{\infty} g(y)dy \quad (g \text{ est intégrable à l'origine})$$
$$g(x)\, E(\sigma_x) = \alpha \quad \text{constante} \quad .$$

Inversement Krylov et Yushkevich montrent que le couple $(\alpha\,,\,g)$, défini à une constante multiplicative près, d'une constante $\alpha \geq 0$ et d'une fonction g définie sur $]0\,,\,+\infty]$, positive, décroissante, continue à droite et intégrable à l'origine détermine de manière unique un ensemble régénératif canonique et permet de le construire.

Nous supposons que $(M\,,\,P)$ est un ensemble régénératif canonique parfait d'intérieur vide. L'inverse continu à droite (Z_t) du temps local (L_t) de $(M\,,\,P)$ est un subordinateur ; soit a sa constante de translation et λ sa mesure de Lévy. Enfin nous désignons par $(\alpha\,,\,g)$ les caractéristiques de Krylov - Yushkevich telles que $g(x_o) = 1$.

PROPOSITION 6. - <u>On a les relations suivantes entre</u> $(a\,,\,\lambda)$ <u>et</u> $(\alpha\,,\,g)$:

i) $g = \lambda(].\,,\,\infty])\,/\,\lambda(]x_o\,,\,\infty])$

ii) $\alpha = \dfrac{a}{\lambda(]x_o\,,\,\infty])}$.

DÉMONSTRATION.-

i) Si $x \geq x_o$
$$\begin{aligned} g(x) &= P_{x-x_o}(x_o\,,\,\{x\}) \\ &= P(x_o + D_{T^{x_o}} - T^{x_o} > x) \\ &= R(x_o\,,\,]x - x_o\,,\,\infty]) \end{aligned}$$

donc d'après la proposition 2

$$g(x) = \frac{\lambda(]x\,,\,\infty])}{\lambda(]x_o\,,\,\infty])} \quad .$$

On démontrerait de même la formule pour $0 < x < x_0$.

ii) Nous avons vu que

$$m(M \cap [0\ ,\ t]) = a\, L_t \quad \text{p.s.} \ ;$$

par suite $\sigma_x = m(M \cap [0\ ,\ T_x]) = a\, L_{T_x}$ p.s. . Comme L_{T_x} est l'instant du premier saut de Z d'amplitude $> x$, la relation de définition de α : $g(x)\, E(\sigma_x) = \alpha$ s'écrit donc :

$$\alpha = \frac{\lambda(]x\ ,\ \infty])}{\lambda(]x_0\ ,\ \infty])} \ \frac{a}{\lambda(]x\ ,\ \infty])} = \frac{a}{\lambda(]x_0\ ,\ \infty])} \ .$$

Remarque. - La construction d'un ensemble régénératif à partir de ses caractéristiques $(\alpha\ ,\ g)$ est alors équivalente à celle d'un subordinateur de paramètres $(a\ ,\ \lambda)$ où $a = K\alpha$ et $\lambda(]\cdot\ ,\ \infty]) = Kg$, la constante K étant telle que $1 = a + \int_0^\infty (1 - e^{-u})\, \lambda(du)$.

VI. LE PROCESSUS DE POISSON PONCTUEL ASSOCIÉ À UN ENSEMBLE RÉGÉNÉRATIF (SANS POINT ISOLÉ D'INTÉRIEUR VIDE)

C'est le processus des excursions associé à l'état 0 du processus de l'âge (nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Meyer pour les différentes définitions intervenant dans ce paragraphe). Nous allons expliciter dans ce cas simple les différentes caractéristiques du processus des excursions à l'aide de la mesure de Lévy du subordinateur Z .

Supposons que Ω comprenne, en plus des applications en dents de scie, les applications ω_0^a définies par

$$\begin{aligned} \omega_0^a(t) &= t \quad \text{si} \quad 0 \le t < a \\ &= +\infty \quad \text{si} \quad t \ge a \ . \end{aligned}$$

Soient alors $(U, \mathcal{U})$ une copie de $(\Omega, \mathcal{F}^o)$ et (X_t) les applications coordonnées de U .

La mesure caractéristique H du P.P.P. est l'application qui à $V \in \mathcal{U}$ associe l'espérance du nombre de sauts de Z dans l'intervalle de temps 1 ~~et~~ tels que l'amplitude a vérifie $\omega_o^a \in V$.

Soit (Q_t) le semi-groupe obtenu en tuant le semi-groupe (P_t) du processus de l'âge (Λ_t) au temps d'entrée S dans l'état 0 ; nous avons pour tout borélien B

$$Q_t(x , B) = I_B(x + t) \frac{\lambda(]x + t , + \infty])}{\lambda(]x , + \infty])} \quad .$$

PROPOSITION 7. - Pour tout borélien A de R_+ posons

$$\eta_t(A) = I_A(t) \; \lambda(]t , + \infty]) \quad .$$

La famille de mesures (η_t) est alors une loi d'entrée pour le semi-groupe (Q_t) ; sur l'espace $(U , \mathcal{U} , H)$, le processus (X_t) est un processus de Markov admettant (Q_t) pour semi-groupe de transition et (η_t) pour loi d'entrée.

APPENDICE

Identité du temps local en un point régulier d'un processus de Markov et du temps local de l'ensemble régénératif correspondant.

Soit $(W , \mathcal{G} , \mathcal{G}_t , X_t , Q^x , \eta_t)$ une réalisation continue à droite canonique à opérateurs de translation d'un semi-groupe fortement markovien (Q_t) sur un espace d'états E et soit x_o un point régulier pour (X_t) pour lequel on sait définir un temps local par les procédés classiques, c'est-à-dire comme l'unique fonctionnelle additive continue dont le 1-potentiel est la fonction $E^\bullet[e^{-T_{x_o}}]$.

Nous désignerons par M_{x_o} l'ensemble $\{t : X_t = x_o\}$ et par ψ l'application de W dans Ω qui à une trajectoire w de W associe la trajectoire en dents de scie admettant $M_{x_o}(w)$ comme ensemble de zéros et prenant la valeur $-\infty$ sur $[0 , T_{x_o}(w)[$ (*) . Remarquons qu'avec cette définition $\psi \circ \eta_t = \theta_t \circ \psi$.

Nous savons que M_{x_o} est un ensemble régénératif sur l'espace $(W , \mathcal{G} , Q^{x_o})$. Sa forme canonique $Q^{x_o} \circ \psi^{-1}$ admet un temps local L_t parfait et adapté à $(\mathcal{F}^o_t)$ et permet de définir sur W le temps local de l'ensemble régénératif M_{x_o} par la formule

$$\Lambda_t = L_t \circ \psi \quad .$$

THÉOREME. - La fonctionnelle Λ_t est identique au temps local du processus (X_t) en x_o .

DÉMONSTRATION. - Il s'agit d'établir que (Λ_t) est une fonctionnelle additive parfaite continue et dont le 1-potentiel est $E^\bullet[e^{-T_{x_o}}]$.

Tout d'abord (Λ_t) est adapté à $(\mathcal{G}_t)$ car ψ est une application mesurable de $(W , \mathcal{G}_t)$ dans $(\Omega , \mathcal{F}^o_t)$ et L_t est $\mathcal{F}^o_t$-mesurable.

(*) Ce type de trajectoires ne figurait pas dans Ω, mais nous le supposons maintenant.

L'égalité d'additivité parfaite

$$L_{t+s} = L_t + L_s \circ \theta_t \quad \forall\, s,t \quad , \quad Q^{x_o} \circ \psi^{-1} \text{ - p.s.}$$

s'écrit, compte tenu de la relation $\theta_t \circ \psi = \psi \circ \eta_t$:

$$\Lambda_{t+s} = \Lambda_t + \Lambda_s \circ \eta_t \quad \forall\, s,t \quad , \quad Q^{x_o} \text{ - p.s.} \quad .$$

Cette égalité est encore vraie Q^x - p.s. pour tout x , puisque $\Lambda_t = 0$ si $t < T_{x_o}$ et que $Q^{x_o} = Q^x \circ \eta_{T_{x_o}}^{-1}$ sur $\{T_{x_o} < +\infty\}$.

La continuité de (Λ_t) résulte de celle de (L_t) . Calculons enfin le 1-potentiel de (Λ_t) :

$$E^x[\int_0^\infty e^{-s}\, d\Lambda_s] = E^x[\int_{T_{x_o}}^\infty e^{-s}\, d\Lambda_s] \; .$$

$$= E^x[e^{-T_{x_o}}]\, E^{x_o}[\int_0^\infty e^{-s}\, d\Lambda_s] \; .$$

$$= E^x[e^{-T_{x_o}}] \quad .$$

Car $E^{x_o}[\int_0^\infty e^{-s}\, d\Lambda_s] = E[\int_0^\infty e^{-s}\, dL_s] = 1$, où E désigne l'espérance par rapport à $Q^{x_o} \circ \psi^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE Au sujet des sauts d'un processus de Hunt. Seminaire de Probabilités IV - Strasbourg - Lecture Notes in Mathematics - Springer.

[2] H. HOFFMANN-JØRGENSEN - Markov Sets. Mathematica Scandinavia, 24, fasc. 2, 1969.

[3] KRYLOV et YUSHKEVICH - Markov Random Sets. Trans. Moscow Math. Soc. 13 (1965), pp. 127-153.

[4] B. MAISONNEUVE Comptes-Rendus A.S. Paris, 270, Série A, 1970, P. 1526.

[5] B. MAISONNEUVE et Ph. MORANDO - Temps locaux pour les ensembles régénératifs. Mêmes références que [1].

[6] P.A. MEYER Ensembles régénératifs, d'après Hoffmann-Jørgensen. Mêmes références que [1].

[7] M. WEIL Comptes-Rendus, 268, Série A, 1969, p. 1032.

[8] M. WEIL Comptes-Rendus, 270, Série A, 1970, p. 1523.

(Les résultats de [7] et [8] sont généralisés par l'exposé de Weil qui figure dans le présent volume).

<u>N.B.</u> Pour les questions de théorie générale des processus on pourra consulter le Guide détaillé de la théorie générale des processus de P.A. MEYER dans le Séminaire de Probabilités II (Lecture Notes in Mathematics, 51) ou la thèse de C. DELLACHERIE.