CATHERINE DOLÉANS-DADE

Intégrales stochastiques par rapport à une famille de probabilités

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 141-146
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__141_0>

Université de Strasbourg

Séminaire de Probabilités 1969-70

INTÉGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT À UNE FAMILLE DE PROBABILITÉS

par C. DOLÉANS-DADE

Sur un espace probabilisé $(\Omega , \mathfrak{F} , P)$, considérons une martingale continue à droite $X = (X_t)_{t\geq 0}$, et un processus $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$; si Y et X satisfont à quelques conditions simples, on sait définir l'intégrale stochastique $Z = Y . X$ $(Z_t = \int_0^t Y_s \, d X_s)$, au moyen d'une méthode de prolongement dans L^2 . Cette méthode fait intervenir explicitement la loi de probabilité P , contrairement à ce qui se produit lorsque X est un processus à variation bornée.

On sait maintenant définir (voir [2]) des intégrales stochastiques par rapport à des processus beaucoup plus généraux que les martingales : il suffit par exemple que X soit une semi-martingale locale, et que Y soit un processus localement borné. On utilise pour cela des décompositions du processus X en somme de plusieurs processus, dont les uns sont des martingales de carré intégrable, les autres des processus à variation bornée. Ces décompositions dépendent essentiellement de la loi P .

Il est naturel de se poser le problème suivant, qui se présente par exemple en théorie des processus de Markov. Considérons sur un espace mesurable $(\Omega , \mathfrak{F})$ deux processus Y et X , et toute une famille de lois de probabilités $(P^{\mu})_{\mu\in\mathcal{M}}$. Supposons que pour chacune de ces lois Y soit un processus prévisible localement borné, et X une semi-martingale locale. Est-il alors possible de trouver un <u>même</u> processus Z qui, pour chaque μ , soit une version de l'intégrale stochastique $Y . X$?

Nous répondons ci-dessous à cette question par l'affirmative. La démonstration repose de manière essentielle sur l'emploi des "filtres rapides" de Mokobodzki ([3]) . Cela sera rappelé plus bas, mais nous supposerons que le lecteur est familier avec la théorie des intégrales stochastiques telle qu'elle est exposée dans [2] .

1. QUELQUES LEMMES SUR LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Nous nous plaçons ici sur un espace $(\Omega , \mathcal{F})$ muni d'une famille de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, croissante et continue à droite. Nous nous donnons aussi une loi P , et nous notons $\overline{\mathcal{F}}$ la tribu obtenue en complétant $\mathcal{F}$ pour P , et $\overline{\mathcal{F}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\mathcal{F}_t$ tous les ensembles P-négligeables.

Nous noterons par $\mathcal{H}$ l'espace des <u>processus élémentaires</u> : un processus Y est élémentaire s'il est borné, adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et s'il existe une subdivision finie de la droite $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < +\infty$, telle que sur chaque intervalle $]0 , t_1],]t_1 , t_2], \dots,]t_n , +\infty]$, $Y_\circ(\omega)$ ne dépend que de ω et non du temps.

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{H}}$ l'espace des processus P-indistinguables de processus élémentaires.

Nous dirons qu'un processus est P-<u>prévisible</u> s'il est indistinguable d'un processus de la tribu engendrée par les processus adaptés par rapport à la famille $\overline{\mathcal{F}}_t$, et à trajectoires continues à gauche.

LEMME 1. - <u>La tribu des processus</u> P-<u>prévisibles est engendrée par les éléments de</u> $\overline{\mathcal{H}}$.

DÉMONSTRATION. - La démonstration de ce lemme est triviale.

Nous donnons maintenant une semi-martingale locale X adaptée à la famille $(\overline{\mathcal{F}}_t)$.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $(Y^n_t)_{t\geq 0}$ <u>une suite de processus</u> P-<u>prévisibles, uniformément bornée, qui converge</u> (<u>sur</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega$) <u>vers un processus</u> (Y_t) . <u>Posons</u> $Z^n_t = \int_0^t Y^n_s \, dX_s$, $Z_t = \int_0^t Y_s \, dX_s$; <u>alors pour tout</u> t <u>fini, on a</u> $\lim_{n\to\infty} Z^n_t = Z_t$ <u>en probabilité</u>.

DÉMONSTRATION. - D'après [2], § 3, lemme 3 et proposition 4, il existe une suite (T_p) de temps d'arrêt tels que

a) $\lim_p T_p = +\infty$ p.s.

b) pour chaque p , il existe deux processus H et B (dépendants de p) , à trajectoires continues à droite, arrêtés à l'instant T_p , tels que H soit une martingale de carré intégrable, B soit un processus à variation bornée sur tout intervalle fini, et que

$$X_{t\wedge T_p} = H_t + B_t \quad .$$

Les intégrales $\int_0^{t\wedge T_p} Y_{n,s} \, dH_s$ convergent alors dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers $\int_0^{t\wedge T_p} Y_s \, dH_s$, et les intégrales $\int_0^{t\wedge T_p} Y_{n,s} \, dB_s$ convergent P-p.s. vers $\int_0^{t\wedge T_p} Y_s \, dB_s$. Les variables aléatoires $Z^n_{t\wedge T_p}$ convergent donc en probabilité vers $Z_{t\wedge T_p}$, et on obtient le résultat cherché en faisant tendre p vers $+\infty$.

LEMME 3. - <u>Soit</u> $(Y_t)_{t\geq 0}$ <u>un processus</u> P-<u>prévisible, localement borné, et soit</u> (Y^n_t) <u>le processus</u> P-<u>prévisible borné obtenu en tronquant</u> Y <u>à</u> $n \in \mathbb{N}$; Z^n_t <u>et</u> Z_t <u>ayant la même définition que dans l'énoncé précédent, on a encore</u> $Z_t = \lim_{n\to\infty} Z^n_t$ <u>en probabilité</u>.

DÉMONSTRATION. - Le processus Y étant localement borné, il existe des temps d'arrêt T_n tel que

a) $\lim T_n = +\infty$ p.s.

b) $Y_s(\omega)$ est borné par n si $s \in \,]0 , T_n]$.

Les variables aléatoires $Z^p_{t\wedge T_n}$ et $Z_{t\wedge T_n}$ sont donc égales p.s. pour $p \geq n$, et par suite $Z_t = \lim_n Z^n_t$ en probabilité.

2. APPLICATION DU THÉORÈME DE MOKOBODZKI

Mokobodzki a démontré en s'appuyant sur l'hypothèse du continu, l'existence d'un ultra-filtre $\underline{r}$ sur $\mathbb{N}$ possédant la propriété suivante :

si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité complet, et si des variables aléatoires f_n réelles sur Ω convergent en probabilité vers f, alors les f_n convergent p.s. vers f suivant $\underline{r}$.

Nous allons appliquer ce théorème à la situation suivante : $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante et continue à droite de tribus ; $(P^\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}$ est une famille de lois de probabilité sur Ω ; pour tout μ, nous pouvons définir $\overline{\mathcal{F}}_t$, $\overline{\mathcal{N}}$ pour la loi P^μ, que nous noterons $\mathcal{F}^\mu_t$, $\mathcal{N}^\mu$, et nous noterons $\hat{\mathcal{F}}_t$ <u>l'intersection</u> des $\mathcal{F}^\mu_t$.

THÉORÈME. - <u>Soit</u> X <u>un processus continu à droite, adapté à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, <u>qui est pour tout</u> μ <u>une semi-martingale locale pour la loi</u> P^μ. <u>Soit</u> Y <u>un processus adapté à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, <u>qui est pour tout</u> μ P^μ<u>-indistinguable d'un processus</u> P^μ<u>-prévisible pour la famille</u> $(\mathcal{F}^\mu_t)$. <u>Il existe alors un processus continu à droite</u> Z, <u>adapté à la famille</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, <u>qui est pour tout</u> μ <u>une version de l'intégrale stochastique</u> $(\int_0^t Y_s\,dX_s)$ <u>pour la loi</u> P^μ.

DÉMONSTRATION. - Nous commencerons par le cas d'un processus Y borné. Nous dirons qu'un processus Y borné possède la propriété (I) s'il existe Z comme ci-dessus.

1) Si des processus Y^n uniformément bornés convergent partout sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ vers Y et si les Y^n possèdent la propriété (I), il en est de même de Y : en effet soient (Z^n_t) l'intégrale stochastique correspondant à

Y^n et (Z_t^μ) celle qui correspond à Y pour la loi P^μ. D'après le lemme 2, Z_t^n converge en probabilité (pour la loi P^μ) vers Z_t^μ, donc si nous posons

$$Z'_t = \lim_{\underline{r}} Z_t^n$$

Z'_t est $\mathcal{F}_t^\mu$-mesurable pour tout μ, et est égale P^μ-p.s. à Z_t^μ. Le processus (Z_t) défini par

$$Z_t = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \text{ rationnel}}} \inf Z'_s$$

est un processus à trajectoires continues à droite, P^μ- indistinguable du processus (Z_t^μ). C'est le processus cherché.

2) Tout processus élémentaire possède la propriété (I), donc aussi par approximation tout processus borné continu à gauche et adapté pour la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. Soit Y un processus borné indistinguable pour tout μ d'un processus Y^μ continu à gauche et adapté pour la famille $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. L'ensemble des ω tels que $Y_\cdot(\omega)$ ne soit pas continu à gauche est P^μ-mesurable, et négligeable pour toute loi P^μ. Le processus Y possède donc aussi la propriété (I). Tout processus borné Y qui est pour tout μ, P^μ-indistinguable d'un processus P^μ-prévisible possède donc la propriété (I).

3) On passe maintenant au cas localement borné par le lemme 3, et le même procédé que ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CHOQUET Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\mathbb{N}$, Bull. Soc. Math. Série 2, t.92 (1968), p. 143-153.

[2] C. DOLÉANS-DADE & P.A. MEYER. - Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 124, Springer Heidelberg (1970) .

[3] G. MOKOBODZKI Ultrafiltres rapides sur $\mathbb{N}$. Construction d'une densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel). 12e année (1967-68).