SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Ensembles pavés et rabotages

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 103-126

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__103_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1969/70

ESPACES PAVES ET RABOTAGES

par C. DELLACHERIE

Cet exposé est consacré à une étude systématique des rabotages de SIERPINSKI que nous avons introduits dans [1] et utilisés dans [2], [3] et [4]. Après quelques généralités sur les espaces pavés, nous définissons la notion de rabotage global sur un tel espace. Il s'introduit alors naturellement une classe priviligiée d'éléments de l'espace pavé dont nous étudions les propriétés de stabilité pour diverses opérations : nous obtenons ainsi une théorie ayant de nombreux points communs avec celle des ensemble analytiques (voir MOKOBODZKI [6]). Mais avouons cependant que nous sommes loin d'avoir atteint l'élégance de la théorie des ensembles analytiques, et qu'il nous manque d'autre part l'analogue de l'idempotence de l'opération de SOUSLIN.

Nous ne parlerons pas ici des applications des rabotages aux problèmes d'approximation par en dessous (cf [3]), qui ont fait l'objet d'un exposé rédigé au Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY (1969/70). Signalons enfin que les développements de [1], [3] et [4] se retrouveront dans une monographie en cours d'achèvement qui paraitra sans doute chez SPRINGER en 1971 (et qui contiendra pas, par contre, les résultats trop techniques de cet exposé).

I GENERALITES SUR LES ESPACES PAVES

1 La notion d'espace pavé que nous allons définir est une extension naturelle de celle introduite par MEYER [5]. On se donne un ensemble ordonné $\underline{\underline{W}}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) il existe un plus petit élément, noté $\emptyset$, et un plus grand élément, noté E

b) toute suite d'éléments (A_n) admet une borne supérieure, notée $\bigcup A_n$, et une borne inférieure, notée $\bigcap A_n$

c) les opérations $\bigcup$ et $\bigcap$ sont dénombrablement distributives l'une par rapport à l'autre au sens suivant : si (A_n) est une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$, et si B appartient à $\underline{\underline{W}}$, alors $\bigcup(A_n \cap B) = (\bigcup A_n) \cap B$ et $\bigcap(A_n \cup B) = (\bigcap A_n) \cup B$.

Exemples : 1) $\underline{\underline{W}}$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E, muni de l'ordre habituel. Comme cet exemple est l'exemple "fondamental", nous adopterons le langage et l'écriture ensembliste pour tout ce qui concerne la relation d'ordre. 2) $\underline{\underline{W}}$ est l'ensemble des fonctions numériques positives (à valeurs finies ou non) définies sur un ensemble, et muni de l'ordre habituel (E désigne alors la fonction constante égale à $+\infty$, et $\emptyset$ la fonction constante égale à 0.)

2 Une pavage $\underline{\underline{E}}$ sur $\underline{\underline{W}}$ est un sous-ensemble de $\underline{\underline{W}}$ contenant $\emptyset$ et E, et stable pour $(\bigcup f, \bigcap d)$.*) Nous appellerons espace pavé le couple $(\underline{\underline{W}}, \underline{\underline{E}})$ formé par un ensemble ordonné $\underline{\underline{W}}$ vérifiant les conditions de 1 et un pavage $\underline{\underline{E}}$ sur $\underline{\underline{W}}$. Le pavage $\underline{\underline{E}}$ sur $\underline{\underline{W}}$ est dit semi-compact si toute suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ qui ne contient pas $\emptyset$ a une borne inférieure différente de $\emptyset$.

3 Soit $(\underline{\underline{W}}_i, \underline{\underline{E}}_i)$ une famille d'espaces pavés. Nous munirons $\prod \underline{\underline{W}}_i$ d'une structure d'espace pavé de la manière suivante : nous dirons que (A_i) est contenu dans (B_i) si A_i est contenu dans B_i pour tout i, et nous appellerons pavage produit $\prod \underline{\underline{E}}_i$

---

*) f = fini; d = dénombrable. Nous supposons que $E \in \underline{\underline{E}}$ et que $\underline{\underline{E}}$ est stable pour $(\bigcap d)$ au lieu de $(\bigcap f)$ pour simplifier. Ce n'est pas essentiel.

le sous-ensemble de $\Pi\, \underline{\underline{W}}_i$ formé par les (A_i) tel que $A_i \in \underline{\underline{E}}_i$ pour tout i. On vérifie immédiatement que $(\Pi\, \underline{\underline{W}}_i, \Pi\, \underline{\underline{E}}_i)$ est alors un espace pavé, appelé <u>produit</u> des espaces paves $(\underline{\underline{W}}_i, \underline{\underline{E}}_i)$

4 Soit $(\underline{\underline{W}}_i, \underline{\underline{E}}_i)$ une famille d'espaces pavés où $\underline{\underline{W}}_i$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E_i. Nous désignerons par $\otimes \underline{\underline{W}}_i$ l'ensemble des parties de $\Pi\, \underline{\underline{E}}_i$, que nous munirons du pavage $\otimes\, \underline{\underline{E}}_i$ défini de la manière suivante : c'est la plus petite classe de parties de $\Pi\, E_i$ stable pour $(\cup f, \cap d)$ et contenant les ensembles de la forme $\Pi\, A_i$ où $A_i \in \underline{\underline{E}}_i$ pour chaque i et $A_i = E_i$ sauf pour un nombre fini d'indices On vérifie immédiatement que $(\otimes\, \underline{\underline{W}}_i, \otimes\, \underline{\underline{E}}_i)$ est un espace pavé, appelé <u>produit tensoriel</u> des espaces pavés $(\underline{\underline{W}}_i, \underline{\underline{E}}_i)$.

5 <u>Enveloppes</u> :

Soit $(\underline{\underline{W}}, \underline{\underline{E}})$ un espace pavé, et désignons par Δ l'ensemble des suites*) décroissantes d'éléments de $\underline{\underline{W}}$. On munit Δ de la structure de préordre suivante : la suite décroissante (A_n) est dite <u>plus fine</u> que la suite décroissante (B_n) si pour tout n, il existe un p tel que A_p soit contenu dans B_n. Nous dirons que les deux suites (A_n) et (B_n) sont équivalentes si (A_n) est plus fine que (B_n) et (B_n) plus fine que (A_n) : cela revient à dire qu'il existe une suite décroissante (C_n) telle que (A_n) (resp (B_n)) ait une sous-suite commune avec (C_n). En particulier, (A_n) et (B_n) sont équivalentes dès qu'elles ont une sous-suite commune.

D6 DEFINITION.- <u>Soient</u> (A_n) <u>une suite décroissante d'éléments de</u> $\underline{\underline{W}}$. <u>Un élément</u> A <u>de</u> $\underline{\underline{W}}$ <u>est appelé une</u> enveloppe <u>de la suite</u> (A_n) <u>s'il existe une suite décroissante</u> (B_n) <u>d'éléments du pavage</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u>

a) (B_n) <u>est moins fine que</u> (A_n)

b) $\cap B_n$ <u>est contenu dans</u> A

---

*) dans tout cet exposé, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels commence par 1.

La proposition suivante donne quelques propriétés de l'ensemble des enveloppes d'une suite $(A_n) \in \Delta$.

T7 PROPOSITION.- 1) *Si* A *est une enveloppe de* $(A_n) \in \Delta$, *et si* B *contient* A, B *est une enveloppe de* (A_n).

2) *Soient* (A_n) *et* (B_n) *deux éléments de* Δ. *Si* (B_n) *est moins fine que* (A_n), *toute enveloppe de* (B_n) *est une enveloppe de* (A_n). *En particulier, si* (B_n) *et* (A_n) *sont équivalentes, elles admettent les mêmes enveloppes.*

3) *Si* A^k *est une enveloppe de* $(A_n) \in \Delta$ *pour chaque* k, $\cap A^k$ *est une enveloppe de* (A_n)

DEMONSTRATION.- Seul le point 3) n'est pas évident. Pour chaque k, soit (B^k_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$, moins fine que (A_n), et dont l'intersection est contenu dans A^k. Posons alors $B_n = B^1_n \cap B^2_n \cap \ldots \cap B^n_n$. Alors (B_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$, moins fine que (A_n), et dont l'intersection est contenue dans celle des A^k.

Exemple : prenons pour $\mathcal{W}$ l'ensemble des parties d'un espace topologique et pour $\mathcal{E}$ le pavage formé par les fermés. Alors A est une enveloppe de la suite décroissante (A_n) si et seulement si A contient $\cap \overline{A}_n$.

Capacitances

D8 DEFINITION.- *Soit* $(\mathcal{W},\mathcal{E})$ *un espace pavé. On dit qu'un sous-ensemble* $\mathcal{C}$ *de* $\mathcal{W}$ *est une* capacitance *s'il vérifie les conditions suivantes*

a) *si* A *appartient à* $\mathcal{C}$, *et si* B *contient* A, B *appartient à* $\mathcal{C}$

b) *si* (A_n) *est une suite* croissante *dont la réunion appartient à* $\mathcal{C}$, *il existe un entier* k *tel que* A_k *appartienne à* $\mathcal{C}$.

Exemples : 1) Soit I une fonction monotone croissante de $(\mathcal{W},\mathcal{E})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant la condition suivante : si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{W}$, $I(\cup A_n)$ est égal à $\sup I(A_n)$. Alors, pour tout nombre a, le sous-ensemble de $\mathcal{W}$ défini par $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{W} : I(A) > a\}$ est une capacitance. Inversement, toute capacitance peut être obtenue ainsi : il suffit de poser $I(A) = 1$ si $A \in \mathcal{C}$, et 0 sinon, et de prendre $a = 0$

2) soient $\underline{\underline{C}}$ une capacitance et A un élément de $\underline{\underline{W}}$. L'ensemble $\underline{\underline{C}}_A = \{B \in \underline{\underline{W}} : A \cap B \in \underline{\underline{C}}\}$ est encore une capacitance.

II RABOTAGES SUR UN ESPACE PAVE

Dans tout ce paragraphe, on se donne un espace pavé $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$, et nous désignerons par Γ l'ensemble des capacitances de $\underline{\underline{W}}$.

D9 DEFINITION.- Un rabotage global sur $\underline{\underline{W}}$ est une application F de $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ dans $\underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

a) si $[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ appartient à $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$, le k-ième terme de la suite $F[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ est contenu dans P_k pour tout entier k.

b) si $[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ appartient à $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$, et si P_k appartient à $\underline{\underline{C}}_k$ pour un entier k, le k-ième terme de la suite $F[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ appartient à $\underline{\underline{C}}_k$.

c) si $[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ et $[(\underline{\underline{C}}'_n),(P'_n)]$ appartiennent à $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ et ont les mêmes k premiers termes, alors $F[(\underline{\underline{C}}_n),(P_n)]$ et $F[(\underline{\underline{C}}'_n),(P'_n)]$ ont les mêmes k premiers termes.

L'exemple le plus simple de rabotage est le rabotage identique, i.e. la projection de $\Gamma^{\mathbb{N}} \times \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ sur $\underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$; c'est aussi un exemple important car il permet de construire d'autres rabotages. Mais avant d'aller plus loin, nous allons commenter la définition D9, qui semble assez compliquée au premier abord. Soit F un rabotage global; fixons l'argument $(\underline{\underline{C}}_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ et regardons l'application partielle ainsi obtenue de $\underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ dans $\underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$. Pour cela, désignons par f_k la composée de cette application partielle avec l'application coordonnée de rang k de $\underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$. D'après la condition c), si (P_n) appartient à $W^{\mathbb{N}}$, $f_k[(P_n)]$ ne dépend que de $P_1, P_2, \dots, P_k$. Autrement dit, on peut considérer que f_k est une application de $\underline{\underline{W}}^k$ dans $\underline{\underline{W}}$. Pour la suite (f_n) - où f_n est considérée comme une application de $\underline{\underline{W}}^n$ dans $\underline{\underline{W}}$, les propriétés a) et b) se traduisent alors de la manière suivante :

a) $f_n(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ est contenu dans P_n pour tout n

b) si P_n appartient à $\underline{\underline{C}}_n$, $f_n(P_1,\ldots,P_n)$ appartient à $\underline{\underline{C}}_n$

Si la suite de capacitances $(\underline{\underline{C}}_n)$ est constante et égale à $\underline{\underline{C}}$, on retrouve la notion de $\underline{\underline{C}}$-rabotage introduite dans [1] et [4]. Appelons donc <u>$(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotage</u> une suite d'application (f_n), où f_n est une application de $\underline{\underline{W}}^n$ dans $\underline{\underline{W}}$, vérifiant les conditions a) et b) ci-dessus. On peut alors considérer qu'un rabotage global est une application de $\Gamma^{\mathbb{N}}$ dans l'ensemble des rabotages telle que à chaque suite de capacitances $(\underline{\underline{C}}_n)$ corresponde un $\underline{\underline{C}}_n$-rabotage et que, si deux suites de capacitances $(\underline{\underline{C}}_n)$ et $(\underline{\underline{C}}'_n)$ ont les mêmes k premiers termes, les deux rabotages correspondants aient aussi les mêmes k premiers termes. Par la suite, nous aurons souvent l'occasion de construire des rabotages à partir d'autres rabotages. Nous procèderons de la manière suivante : les suites $(\underline{\underline{C}}_n) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ et $(P_n) \in \underline{\underline{W}}^{\mathbb{N}}$ étant fixées, nous définirons pour chaque entier k l'élément $f_k(P_1,\ldots,P_k)$ de $\underline{\underline{W}}$. Nous vérifierons que $f_k(P_1,\ldots,P_k)$ est contenu dans P_k, et qu'il appartient à $\underline{\underline{C}}_k$ si P_k appartient à $\underline{\underline{C}}_k$. Enfin nous regarderons si la définition de $f_k(P_1,\ldots,P_k)$ ne fait intervenir que $\underline{\underline{C}}_1,\ldots,\underline{\underline{C}}_k$ et $\underline{\underline{P}}_1,\ldots,\underline{\underline{P}}_k$: s'il en est ainsi, il est clair que nous aurons défini un rabotage global sur $\underline{\underline{W}}$.

D10 DEFINITION.- <u>Soit</u> F <u>un rabotage global</u>, <u>et soit</u> $(\underline{\underline{C}}_n)$ <u>une suite de capacitances</u>. <u>Une suite</u> (P_n) <u>d'éléments de</u> $\underline{\underline{W}}$ <u>est dite</u> $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée <u>si</u>

a) P_n <u>appartient à</u> $\underline{\underline{C}}_n$ <u>pour tout</u> n

b) P_{n+1} <u>est inclus dans</u> $f_n(P_1,\ldots,P_n)$ <u>pour tout</u> n (<u>où</u> (f_n) <u>est le</u> <u>$(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotage associé à</u> $(\underline{\underline{C}}_n)$ <u>par</u> F).

Une telle suite est évidemment décroissante. Par la suite, il nous arrivera souvent de parler de suite $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotée (resp de suite F-rabotée) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité possible sur le rabotage global F (resp la suite de capacitances $(\underline{\underline{C}}_n)$).

Ensembles polis

D11 DEFINITION.- *On dit qu'un rabotage global* F *est* compatible *avec* $A \in \underline{\underline{W}}$ *si, pour toute suite de capacitances* $(\underline{\underline{C}}_n)$, A *est une enveloppe de toute suite* $(\underline{\underline{C}}_n)$*-rabotée dont* A *contient le premier terme*. *L'élément* A *de* $\underline{\underline{W}}$ *est dit* poli *s'il existe un rabotage compatible avec* A.

Exemple : il est facile de voir que $A \in \underline{\underline{E}}$ si et seulement si A est une enveloppe de la suite constante égale à A. On en déduit que $A \in \underline{\underline{E}}$ si et seulement s'il est compatible avec le rabotage identique. En particulier, *tous les éléments de* $\underline{\underline{E}}$ *sont polis*.

12 Soient F un rabotage global, $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances et (f_n) le $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotage associé à $(\underline{\underline{C}}_n)$ par F. Si A est un élément de $\underline{\underline{W}}$, on appelle $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$*-suite déduite de* A la suite (P_n) définie par récurrence de la manière suivante :

$$P_1 = A,\ P_2 = f_1(P_1),\ \dots\ ,\ P_{n+1} = f_n(P_1,P_2,\dots,P_n),\ \dots$$

On remarquera que les n+1 premiers termes de cette suite ne dépendent que de $\underline{\underline{C}}_1,\dots,\underline{\underline{C}}_n$ et $P_1,\dots,P_n$. Cette suite joue un rôle important pour la raison suivante : si la suite $(\underline{\underline{C}}_n)$ est croissante (pour l'inclusion) et si A appartient à $\underline{\underline{C}}_1$, alors la suite (P_n) est $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotée, et son premier terme est inclus dans A. Pour illustrer ce fait, nous allons donner la version du théorème de SION [7] pour les éléments polis de $\underline{\underline{W}}$.

T13 THEOREME.- *Soient* $\underline{\underline{C}}$ *une capacitance et* A *un élément poli appartenant à* $\underline{\underline{C}}$. *Il existe une suite décroissante* (B_n) *d'éléments de* $\underline{\underline{E}} \cap \underline{\underline{C}}$ *telle que* A *contienne* $\bigcap B_n$

DEMONSTRATION.- Soient F un rabotage global compatible avec A et $(\underline{\underline{C}}_n)$ la suite constante de capacitances égale à $\underline{\underline{C}}$. Désignons par (P_n) la suite $(\underline{\underline{C}}_n)$-déduite de A. C'est une suite $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotée; A est donc une enveloppe de (P_n). Il suffit alors de prendre pour (B_n) une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, moins fine que (P_n), et dont l'intersection est contenue dans A.

14 Rappelons qu'une fonction numérique I définie sur $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ est une capacité de CHOQUET si elle vérifie les conditions suivantes :

a) I est monotone croissante

b) si (A_n) est une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{W}}$, $I(\bigcup A_n) = \sup I(A_n)$

c) si (B_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, $I(\bigcap B_n) = \inf I(B_n)$

Un élément A de $\underline{\underline{W}}$ est dit capacitable si $I(A) = \sup I(B)$ où B parcourt l'ensemble des éléments de $\underline{\underline{E}}$ contenu dans A. Le théorème de capacitabilité des éléments polis résulte alors immédiatement de T13

T15 THEOREME.- Soit I une capacité sur $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$. Tout élément poli est capacitable.

DEMONSTRATION.- Soit A un élément poli. Si $I(A) = -\infty$, $I(A) = I(\emptyset)$. Si $I(A) > -\infty$, nous devons montrer que si $I(A) > a$, il existe un élément B de $\underline{\underline{E}}$ contenu dans A tel que $I(B) \geq a$. Désignons par $\underline{\underline{C}}^a$ l'ensemble des éléments A' de $\underline{\underline{W}}$ tels que $I(A') > a$. Comme $\underline{\underline{C}}^a$ est une capacitance, il résulte de T13 qu'il existe une suite décroissante (B_n) d'éléments de $\underline{\underline{C}}^a \cap \underline{\underline{E}}$ dont l'intersection est contenue dans A. Il suffit alors de prendre pour B l'intersection des B_n.

Opérations sur les rabotages

16 Nous allons d'abord définir le décalage d'un rabotage global F'. Soient $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances et (P_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$. Désignons par $(\underline{\underline{C}}'_n)$ (resp (P'_n)) la suite décalée de $(\underline{\underline{C}}_n)$ (resp (P_n)) (i.e. $\underline{\underline{C}}'_n = \underline{\underline{C}}_{n+1}$, $P'_n = P_{n+1}$), et par (f'_n) le $(\underline{\underline{C}}'_n)$-rabotage associé à $(\underline{\underline{C}}'_n)$ par F'. Posons alors

$$f_1(P_1) = P_1$$

$$f_{n+1}(P_1,\dots,P_{n+1}) = f'_n(P'_1,\dots,P'_n) \quad \text{pour tout entier } n$$

Il est clair que l'on définit ainsi un nouveau rabotage global F, que nous appelerons rabotage décalé de F'. La démonstration de la proposition suivante est laissée au lecteur.

T17 THEOREME.- Soient F' un rabotage global et F le décalé de F'. Tout élément de $\underline{\underline{W}}$ compatible avec F' est compatible avec F.

18 Nous allons définir maintenant une autre opération beaucoup plus importante : le mélange d'une suite de rabotages. Nous désignerons par $(p,q) \to p*q$ une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ qui soit strictement croissante par rapport à chacune de ses variables (par exemple, on peut poser $p*q = 2^{p-1}(2q-1)$)*). Soit (F^k) une suite de rabotages globaux. Si $(\underline{\underline{C}}_n)$ est une suite de capacitances et (P_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$, désignons par (f_n^k) la suite de rabotages associée par F^k à la suite de capacitances $(\underline{\underline{C}}_n^k)$, où $\underline{\underline{C}}_n^k = \underline{\underline{C}}_{k*n}$, et posons

$$f_n(P_1,P_2,\dots,P_n) = f_q^p(P_{p*1},P_{p*2},\dots,P_{p*q}) \quad \text{où } n = p*q$$

On vérifie sans peine qu'on définit ainsi un nouveau rabotage global F appelé le mélange des rabotages F^k. L'importance de cette opération résulte du théorème suivant.

T19 THEOREME.- Soient (F^k) une suite de rabotages globaux et F le mélange des F^k. Pour qu'un élément A de $\underline{\underline{W}}$ soit compatible avec F, il suffit qu'il soit compatible avec l'un des F^k.

DEMONSTRATION.- Soit A un élément de $\underline{\underline{W}}$ compatible avec le rabotage global F^k. Soit d'autre-part $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances et désignons par (P_n) une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée (si une telle suite existe), dont le premier terme est inclus dans A. Posons alors

$$Q_n = P_{k*n} \qquad \text{pour tout } n$$

Nous allons montrer que (Q_n) est $[(\underline{\underline{C}}_n^k),F^k]$-rabotée. Comme Q_1 est inclus dans A, il en résultera que A est une enveloppe de (Q_n), et comme (Q_n) est une sous-suite de (P_n), A sera aussi une enveloppe de (P_n). Nous aurons donc démontré ainsi que A est compatible avec F. Or, comme P_n appartient à $\underline{\underline{C}}_n$ pour tout n, il est clair

---

*) l'idée de remplacer cette bijection particulière utilisée dans [1] et [4] par n'importe quelle bijection strictement croissante m'a été communiquée par Mlle DEHEN, Mrs DERMENJIAN et St-RAYMOND qui ont fait un exposé sur les rabotages au Séminaire CHOQUET (séminaire d'initiation à l'analyse - Paris).

que Q_n appartient à $\underline{\underline{C}}_n^k$ pour tout n . Il nous reste donc à vérifier que Q_{n+1} est inclus dans $f_n^k(Q_1,\dots,Q_n)$: cela résulte du fait que (P_n) est rabotée. En effet

$$Q_{n+1} = P_{k*(n+1)} \subset P_{1+(k*n)} \subset f_{k*n}(P_1,\dots,P_{k*n}) = f_n^k(Q_1,\dots,Q_n)$$

(la première inclusion résultant du fait que $k*(n+1) > k*n$).

Il résulte immédiatement de T19 que, si (A^k) est une suite d'éléments polis de $\underline{\underline{W}}$, il existe un rabotage global F qui est compatible avec tous les A^k : en effet, si F^k est un rabotage global compatible avec A^k pour chaque k, il suffit de prendre pour F le mélange des rabotages F^k. Voici alors en application de T19, deux propriétés de stabilité des éléments polis.

T20 THEOREME.- <u>L'ensemble des éléments polis est stable pour</u> $(\cup md, \cap d)$.*)

DEMONSTRATION.- a) démontrons d'abord la stabilité pour $(\cap d)$. Soit (A^k) une suite d'éléments polis et soit F un rabotage global compatible avec tous les A^k. Si $(\underline{\underline{C}}_n)$ est une suite de capacitances et (P_n) est une suite $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotée dont le premier terme est inclus dans $\cap A^k$, ce premier terme P_1 est aussi inclus dans tous les A^k. Par conséquent, chaque A^k est une enveloppe de (P_n); il en est donc de même de $\cap A^k$ d'après T7-3). Il en résulte que F est compatible avec $\cap A^k$, et ainsi $\cap A^k$ est poli.

b) soit maintenant (A^k) une suite croissante d'éléments polis de $\underline{\underline{W}}$ et soit encore F un rabotage global compatible avec tous les A^k. L'argument utilisé ci-dessus ne convient plus puisque P_1 peut-être contenu dans $\cup A^k$ sans être contenu dans un des A^k. Aussi allons nous modifier le rabotage F de la manière suivante.

Soit $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances et (f_n) le $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotage associé à $(\underline{\underline{C}}_n)$ par F. Soit d'autre part (P_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$ et posons, si $A = \cup A^k$,

---

*) m = monotone, d = dénombrable

si $A \cap P_1 \notin \underline{\underline{C}}_1$ $\quad f'_n(P_1,\dots,P_n) = P_n$

si $A \cap P_1 \in \underline{\underline{C}}_1$ $\quad f'_n(P_1,P_2,\dots,P_n) = f_n(A^k \cap P_1,P_2,\dots,P_n)$ où k est le plus petit entier tel que $A^k \cap P_1$ appartienne à $\underline{\underline{C}}_1$ (un tel entier existe d'après la définition d'une capacitance). Il est clair que l'on définit ainsi un rabotage global F'. Nous allons vérifier que celui-ci est compatible avec A. Soit (P_n) une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F']$-rabotée dont le premier terme P_1 est inclus dans A. Puisque $A \cap P_1 = P_1$ appartient à $\underline{\underline{C}}_1$, $f'_n(P_1,P_2,\dots,P_n) = f_n(A^k \cap P_1,P_2,\dots,P_n)$ pour tout n. Il en résulte aussitôt que la suite $A^k \cap P_1$, P_2, $\dots,P_n$, ... est une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée, dont le premier terme est inclus dans A^k. Donc A^k est une enveloppe de cette suite, et donc de la suite (P_n) qui lui est équivalente. Il en résulte que A est aussi une enveloppe de (P_n) (cf T7-1)) : donc A est compatible avec F'. Ainsi A est poli.

21 <u>Remarque</u>: Désignons par $\hat{\underline{\underline{E}}}$ le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d, \cap d)$. Comme $\underline{\underline{E}}$ est stable pour $(\cup f, \cap d)$, il résulte d'un théorème de classes monotones que $\hat{\underline{\underline{E}}}$ est aussi le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup md, \cap d)$. Donc, en vertu de T20, <u>tous les éléments de $\hat{\underline{\underline{E}}}$ sont polis</u>. En fait, nous verrons plus loin que l'ensemble des éléments polis est aussi stable pour $(\cup d)$.

III PROPRIETES DE STABILITE DES ELEMENTS POLIS

Le premier théorème concerne la stabilité des éléments polis pour l'opération produit :

T22 THEOREME.- <u>Soit $((\underline{\underline{W}}_n,\underline{\underline{E}}_n))$ une suite d'espaces pavés. Si pour chaque n, A^n est un élément poli de $(\underline{\underline{W}}_n,\underline{\underline{E}}_n)$, la suite (A^n) est un élément poli de $(\Pi\,\underline{\underline{W}}_n, \Pi\,\underline{\underline{E}}_n)$</u>

DEMONSTRATION.- Soit E^n le plus grand élément de $\underline{\underline{W}}_n$. Comme les éléments polis d'un espace pavé sont stables pour $(\cap d)$, il suffit de montrer que pour tout k, la suite (B^n), où $B^n = E^n$ pour $n \neq k$ et $B^k = A^k$, est un élément poli du produit. Fixons l'indice k et soit F^k un rabotage global de $\underline{\underline{W}}_k$ compatible avec A^k. Si $(\underline{\underline{C}}_q)$ est une suite de capacitances sur le produit, et (P_q) une suite d'éléments du produit, posons pour tout entier q

$$\underline{\underline{C}}_q^k = \{X^k \in \underline{\underline{W}}_k \ : \ (X^n) \in \underline{\underline{C}}_q \quad \text{où } X^n = P_q^n \text{ pour } n \neq k\}$$

On vérifie immédiatement que $\underline{\underline{C}}_q^k$ est une capacitance de $\underline{\underline{W}}_k$. Désignons alors par (f_q^k) le $(\underline{\underline{C}}_q^k)$-rabotage associé à la suite $(\underline{\underline{C}}_q^k)$ par le rabotage global F^k et posons

$$f_q(P_1,\ldots,P_q) = P_q^1,\ldots,P_q^{k-1}, f_q^k(P_1^k,\ldots,P_q^k), P_q^{k+1},\ldots$$

Il est facile de voir qu'on définit ainsi un rabotage global F du produit compatible avec (B^n). Il en résulte que (B^n) est un élément poli, et donc que (A^n) est un élément poli.

23 Remarque : 1) soit p^k l'application de $(\underline{\underline{W}}_k, \underline{\underline{E}}_k)$ dans $(\Pi \underline{\underline{W}}_n, \Pi \underline{\underline{E}}_n)$ qui à $B^k \in \underline{\underline{W}}_k$ associe la suite (B^n), où $B^n = E^n$ pour $n \neq k$. L'application p^k est un morphisme d'espaces pavés (voir la définition un peu plus loin). Il résulte alors d'un théorème général, que nous démontrerons plus loin, que l'image directe par p^k d'un élément poli est poli : cela fournit une autre démonstration de la seconde partie.

2) on peut aussi démontrer directement T22 sans l'aide de T20, au moyen de l'opération de décalage. Nous allons esquisser cette autre démonstration.
Pour tout k, soit F^k un rabotage global de $\underline{\underline{W}}_k$ obtenu en décalant k fois un rabotage global compatible avec A^k : F^k est encore compatible avec A^k. Si $(\underline{\underline{C}}_q)$ est une suite de capacitances sur le produit, et si (P_q) est une suite d'éléments du produit, posons pour tout entier q

$$\underline{\underline{C}}_q^1 = \{X^1 \in \underline{\underline{W}}_1 \ : \ (X^n) \in \underline{\underline{C}}_q \ , \ \text{où } X^n = P_q^n \text{ pour } n \neq 1\}$$

Supposons maintenant que la suite $(\underline{\underline{C}}_q^n)$ de capacitances de $\underline{\underline{W}}_n$ est définie pour $n \leq k$, et désignons par (f_q^n) le (C_q^n)-rabotage associé à la suite (C_q^n) par F^n pour $n \leq k$.

Nous poserons alors, pour tout entier q,

$\underline{\underline{C}}_q^{k+1} = \{X^{k+1} \in \underline{\underline{W}}_{k+1} : (X^n) \in \underline{\underline{C}}_q$ où $X^n = f_q^n(P_1^n,\dots,P_q^n)$ pour $n \leq k$ et $X^n = P_q^n$ pour $n > k+1\}$

et nous désignerons par (f_q^{k+1}) le $(\underline{\underline{C}}_q^{k+1})$-rabotage associé à la suite de capacitances $(\underline{\underline{C}}_q^{k+1})$ par le rabotage global F^{k+1}. Enfin, posons

$$f_q(P_1,\dots,P_q) = f_q^1(P_1^1,\dots,P_q^1),\dots,f_q^k(P_1^k,\dots,P_q^k),\dots$$

Nous laissons au lecteur le plaisir de vérifier qu'on définit ainsi un rabotage global F sur le produit, compatible avec (A^k) (remarquer que, d'après l'hypothèse faite sur les décalages, $f_q^n(P_1^n,\dots,P_q^n) = P_q^n$ si $q \leq n$).

Morphismes d'espaces pavés

D24 DEFINITION.- Soient $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ et $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ deux espaces pavés. Une application p de $\underline{\underline{W}}'$ dans $\underline{\underline{W}}$ est un morphisme si les conditions suivantes sont vérifiées

a) p est monotone croissante

b) si (A'_n) est une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{W}}'$, $p(\bigcup A'_n) = \bigcup p(A'_n)$

c) la restriction de p à $\underline{\underline{E}}'$ est à valeurs dans $\underline{\underline{E}}$, et si (B'_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}'$, $p(\bigcap B'_n) = \bigcap p(B'_n)$.

25 Exemples : 0) si $\underline{\underline{W}} = \overline{\mathbb{R}}$ et si $\underline{\underline{E}} = \overline{\mathbb{R}}$, on retrouve la notion de capacité.

1) soit $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et soit $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}') = (\underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{E}})$. L'application qui à $(A^1,A^2) \in \underline{\underline{W}} \times \underline{\underline{W}}$ associe $A^1 \cup A^2$ (resp $A^1 \cap A^2$) est un morphisme.

2) soient $(\underline{\underline{W}}_1,\underline{\underline{E}}_1)$ et $(\underline{\underline{W}}_2,\underline{\underline{E}}_2)$ deux espaces pavés où $\underline{\underline{W}}_i$ $(i=1,2)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E_i. Posons $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}') = (\underline{\underline{W}}_1 \times \underline{\underline{W}}_2,\underline{\underline{E}}_1 \times \underline{\underline{E}}_2)$ et $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}}) = (\underline{\underline{W}}_1 \otimes \underline{\underline{W}}_2,\underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_2)$ L'application qui à $(A^1,A^2) \in \underline{\underline{W}}_1 \times \underline{\underline{W}}_2$ associe $A^1 \times A^2 \in \underline{\underline{W}}_1 \otimes \underline{\underline{W}}_2$ est un morphisme.

3) soient encore $(\underline{\underline{W}}_1,\underline{\underline{E}}_1)$ et $(\underline{\underline{W}}_2,\underline{\underline{E}}_2)$ deux espaces pavés où $\underline{\underline{W}}_i$ $(i=1,2)$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E_i. On suppose de plus que le pavage $\underline{\underline{E}}_2$ est semi-compact. Posons $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}') = (\underline{\underline{W}}_1 \otimes \underline{\underline{W}}_2,\underline{\underline{E}}_1 \otimes \underline{\underline{E}}_2)$ et $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}}) = (\underline{\underline{W}}_1,\underline{\underline{E}}_1)$. L'application qui à $A' \in \underline{\underline{W}}'$ associe la projection de A' sur E_1 est un morphisme.

On a alors le théorème de stabilité pour les images directes :

T26 THEOREME.- Soient $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ et $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ deux espaces pavés, et soit p un morphisme de $\underline{\underline{W}}'$ dans $\underline{\underline{W}}$. Si H' est un élément poli de $\underline{\underline{W}}'$, $H = p(H')$ est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$.

DEMONSTRATION.- Soient $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances de $\underline{\underline{W}}$ et (P_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$. Posons pour tout n

$$\underline{\underline{C}}'_n = \{A' \in \underline{\underline{W}}' : P_n \cap p(A') \in \underline{\underline{C}}_n\}$$

Il est clair que $(\underline{\underline{C}}'_n)$ est une suite de capacitances de $\underline{\underline{W}}'$ (cf D24-a) et b)). Désignons alors par F' un rabotage global de $\underline{\underline{W}}'$ compatible avec H', et par (f'_n) le $(\underline{\underline{C}}'_n)$-rabotage associé à la suite $(\underline{\underline{C}}'_n)$ par F'. Soit (P'_n) la suite $[(\underline{\underline{C}}'_n),F']$-déduite de H' : $P'_1 = H', P'_2 = f'_1(P'_1),\dots,P'_{n+1} = f'_n(P'_1,P'_2,\dots,P'_n),\dots$
et posons, pour tout n,

$$\text{si } P'_n \notin \underline{\underline{C}}'_n \qquad f_n(P_1,\dots,P_n) = P_n$$

$$\text{si } P'_n \in \underline{\underline{C}}'_n \qquad f_n(P_1,\dots,P_n) = P_n \cap p(P'_{n+1})$$

Comme P'_{n+1} appartient à $\underline{\underline{C}}'_n$ dès que P'_n appartient à $\underline{\underline{C}}'_n$, il est clair que $f_n(P_1,\dots,P_n)$ appartient à $\underline{\underline{C}}_n$ si P_n appartient à $\underline{\underline{C}}_n$. On vérifie alors aisément que l'on a défini ainsi un rabotage global de $\underline{\underline{W}}$ (remarquer que cette construction ne fait pas intervenir la propriété D24-c)). Désignons par F ce rabotage. Nous allons montrer que si (P_n) est une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée dont le premier terme P_1 est inclus dans H, alors la suite (P'_n) est une suite $[(\underline{\underline{C}}'_n),F']$-rabotée dont le premier terme $P'_1 = H'$ est inclus dans H', et P_n est inclus dans $p(P'_n)$ pour tout
Comme P_1 est inclus dans H, $P'_1 = H'$ appartient à $\underline{\underline{C}}'_1$ et $p(P'_1) = H$ contient P_1.
Supposons démontré que pour l'entier n, P'_n appartienne à $\underline{\underline{C}}'_n$ et $p(P'_n)$ contienne P_n. Alors $f_n(P_1,\dots,P_n) = P_n \cap p(P'_{n+1})$; comme P_{n+1} est inclus dans $f_n(P_1,\dots,P_n)$, P_{n+1} est inclus dans $p(P'_{n+1})$: cela entraine que P'_{n+1} appartient à $\underline{\underline{C}}'_{n+1}$, puisque P_{n+1} appartient à $\underline{\underline{C}}_{n+1}$.

Vérifions maintenant que F est compatible avec H : c'est ici que va intervenir la propriété c) de D24. En reprenant les notations précédentes, nous devons montrer que H est une enveloppe de la suite rabotée (P_n). Comme (P'_n) est alors rabotée, H' est une enveloppe de (P'_n). Il existe donc une suite décroissante (E'_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}}'$, moins fine que (P'_n) telle que H' contienne $\bigcap E'_n$. Soit $E_n = p(E'_n)$; la suite (E_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, et cette suite est moins fine que (P_n) puisque P_n est contenu dans $p(P'_n)$. Pour démontrer que H est une enveloppe de (P_n), il suffit donc de démontrer que H contient $\bigcap E_n$, ce qui résulte immédiatement de D24-c). Il s'ensuit que F est compatible avec H; ainsi H est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$.

Nous allons appliquer maintenant ce théorème aux exemples 25. Evidemment, l'exemple 0) ne donne rien. L'exemple 1) nous dit que l'ensemble des éléments polis d'un espace pavé est stable pour les réunions finies. Cela nous permet de compléter l'énoncé de T20

T27 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ <u>un espace pavé. L'ensemble des éléments polis de</u> $\underline{\underline{W}}$ <u>est stable pour</u> $(\cup d, \cap d)$.

L'exemple 2) associé à T20 et T22 va nous permettre de démontrer la stabilité des éléments polis pour les produits dénombrables.

T28 COROLLAIRE.- <u>Soit</u> $((\underline{\underline{W}}_n,\underline{\underline{E}}_n))$ <u>une suite d'espaces pavés, où</u> $\underline{\underline{W}}_n$ <u>est l'ensemble des parties d'un ensemble</u> E^n. <u>Si, pour chaque</u> n, H^n <u>est un élément poli de</u> $\underline{\underline{W}}_n$, $\prod H^n$ <u>est un élément poli de</u> $(\otimes \underline{\underline{W}}_n, \otimes \underline{\underline{E}}_n)$

DEMONSTRATION.- Il résulte d'abord de T22 que (H^n) est un élément poli de $(\prod \underline{\underline{W}}_n, \prod \underline{\underline{E}}_n)$. Soit d'autre part p_k l'application de $(\prod \underline{\underline{W}}_n, \prod \underline{\underline{E}}_n)$ dans $(\otimes \underline{\underline{W}}_n, \otimes \underline{\underline{E}}_n)$ qui à la suite (A_n) fait correspondre $\prod B^n$, où $B^n = A^n$ si $n \leq k$ et $B^n = E^n$ pour $n > k$. L'application p_k étant un morphisme, il résulte de T20 et T26 que $\prod H^n = \bigcap_k p_k[(H^n)]$ est un élément poli du produit tensoriel.

Notons enfin l'application de T26 à l'exemple 25-3)

T29 COROLLAIRE.- Soient $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ et $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ deux espaces pavés, où $\underline{\underline{W}}$ (resp $\underline{\underline{W}}'$) est l'ensemble des parties d'un ensemble E (resp E'). Supposons le pavage $\underline{\underline{E}}'$ semi-compact, et désignons par p la projection de $\underline{\underline{W}}\otimes\underline{\underline{W}}'$ sur $\underline{\underline{W}}$. Si X est un élément poli de $\underline{\underline{W}}\otimes\underline{\underline{W}}'$, p(X) est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$.

30 Gardons les hypothèses et notations du corollaire. On sait qu'un élément Y de $\underline{\underline{W}}$ est dit $\underline{\underline{E}}$-analytique s'il existe un espace pavé $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ (où $\underline{\underline{E}}'$ est semi-compact) tel que Y soit la projection d'un élément de $(\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}')_{\sigma\delta}$ (cf MEYER [5]). Comme d'après T27, tous les éléments de $(\underline{\underline{E}}\otimes\underline{\underline{E}}')_{\sigma\delta}$ sont polis (car tous les éléments du pavage sont polis), il résulte de T29 le corollaire suivant

T31 COROLLAIRE.- Soit $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ un espace pavé, où $\underline{\underline{W}}$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E. Tout élément $\underline{\underline{E}}$-analytique est poli.

Remarque : en suivant le dédale des démonstrations de T20 et T26, on peut voir facilement qu'on a de plus le résultat suivant : si A est un élément $\underline{\underline{E}}$-analytique, il existe un rabotage global compatible avec A tel que si f_n est un rabotage "partiel" défini par F, et si $P_1,\dots,P_n$ sont $\underline{\underline{E}}$-analytiques, alors $f_n(P_1,\dots,P_n)$ soit encore $\underline{\underline{E}}$-analytique. Etant donnée la définition des éléments polis, il ne semble pas possible d'avoir le résultat analogue en remplaçant "analytique" par "poli". On peut cependant considérer une classe plus restreinte d'éléments polis : ceux pour lesquels il existe un rabotage global compatible tel que $f_n(P_1,\dots,P_n)$ soit poli si $P_1\dots P_n$ le sont. On peut vérifier que cette classe a encore toutes les propriétés de stabilité énoncées.

Voici encore une analogie entre éléments polis et éléments analytiques : en nous inspirant de SION [7], nous allons démontrer un théorème de séparation pour les éléments polis.

32 Soit $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ un espace pavé. Rappelons que nous désignons par $\hat{\underline{\underline{E}}}$ le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d, \cap d)$. Deux éléments A^1 et A^2 de $\underline{\underline{W}}$ sont dits <u>séparables</u> par $\hat{\underline{\underline{E}}}$ s'il existe deux éléments disjoints B^1 et B^2 de $\hat{\underline{\underline{E}}}$ tels que B^i $(i=1,2)$ contienne A^i. Une condition nécessaire pour que A^1 et A^2 soient séparables est évidemment que A^1 et A^2 soient disjoints. Nous allons voir que cette condition est suffisante si A^1 et A^2 sont polis lorsque $\underline{\underline{E}}$ est semi-compact.

T33 THEOREME.- <u>Soient</u> A^1 <u>et</u> A^2 <u>deux éléments polis disjoints d'un espace pavé</u> $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$, <u>où</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est un pavage semi-compact</u>. <u>Alors</u> A^1 <u>et</u> A^2 <u>sont séparables par</u> $\hat{\underline{\underline{E}}}$.

DEMONSTRATION.- Soit $\underline{\underline{C}} = \{(H^1,H^2) \in (\underline{\underline{W}}\times\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{E}}) : H^1$ et H^2 ne sont pas séparables par $\hat{\underline{\underline{E}}}\}$

Alors $\underline{\underline{C}}$ est une capacitance de $(\underline{\underline{W}}\times\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{E}})$. En effet soit $((H^1_n,H^2_n))$ une suite croissante d'éléments du produit n'appartenant pas à $\underline{\underline{C}}$. Il existe alors pour chaque n deux éléments B^1_n et B^2_n de $\hat{\underline{\underline{E}}}$, disjoints, tel que B^i_n $(i=1,2)$ contienne H^i_n. Posons $B^1 = \lim_n \inf B^1_n$ et $B^2 = \lim_n \inf B^2_n$. Il est clair que B^1 et B^2 sont disjoints et appartiennent à $\hat{\underline{\underline{E}}}$. D'autre part, comme les suite (H^1_n) et (H^2_n) sont croissantes, B^i $(i=1,2)$ contient $H^i = \cup H^i_n$. Donc H^1 et H^2 sont séparables, i.e. $(H^1,H^2) = \cup(H^1_n,H^2_n)$ n'appartient pas à $\underline{\underline{C}}$. Enfin, il est évident que tout élément du produit qui contient un élément de $\underline{\underline{C}}$ appartient encore à $\underline{\underline{C}}$. Considérons maintenant un élément (H^1,H^2) de $\underline{\underline{C}}$, où H^1 et H^2 sont des éléments polis de $\underline{\underline{W}}$. Comme (H^1,H^2) est alors un élément poli du produit (cf T22), il existe en vertu de T13 une suite décroissante $K_n = (K^1_n,K^2_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{C}}\cap(\underline{\underline{E}}\times\underline{\underline{E}})$ dont l'intersection $K = (K^1,K^2)$ est inclus dans $H = (H^1,H^2)$. Mais, si K^1_n et K^2_n ne sont pas séparables, cela veut dire qu'ils ne sont pas disjoints. Comme $\underline{\underline{E}}$ est semi-compact, cela entraine que K^1 et K^2 ne sont pas disjoints non plus; donc, à fortiori H^1 et H^2 ne peuvent être disjoints. Par conséquent, deux éléments polis disjoints de $\underline{\underline{W}}$ sont séparables par $\hat{\underline{\underline{E}}}$.

T34 COROLLAIRE.- *Soit* $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ *un espace pavé, où* $\underline{\underline{W}}$ *est l'ensemble des parties d'un ensemble* E, *et* $\underline{\underline{E}}$ *est un pavage semi-compact. Si* $A \in \underline{\underline{W}}$ *est poli ainsi que son complémentaire* A^c, *alors* A *et* A^c *appartiennent à* $\hat{\underline{\underline{E}}}$

Remarque

35 Soit $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ un espace pavé. Un élément H' de $\underline{\underline{W}}'$ est dit *universellement capacitable* s'il est capacitable pour toute capacité sur $\underline{\underline{W}}'$(nous avons vu que les éléments polis sont universellement capacitables-cf T15). Soit maintenant p un morphisme de $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ dans un autre espace pavé $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$. Si H' est un élément universellement capacitable de $\underline{\underline{W}}'$, $H = p(H')$ est un élément universellement capacitable de $\underline{\underline{W}}$: cela résulte immédiatement du fait que, si I est une capacité sur $\underline{\underline{W}}$, $I \circ p$ est une capacité sur $\underline{\underline{W}}'$ (la composée de deux morphismes étant évidemment un morphisme). D'autre part, il est facile de voir que la réunion d'une suite croissantes d'éléments universellement capacitables est encore universellement capacitable. Malheureusement, on ne connait aucune propriété de stabilité de ces ensembles pour les intersections.

Chaînes monotones

Soient $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ et $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ deux espaces pavés, et soit (p_n) une suite monotone (pour l'ordre évident) de morphismes de $\underline{\underline{W}}'$ dans $\underline{\underline{W}}$. Pour tout élément H' de $\underline{\underline{W}}'$, posons alors $p_\infty(H') = \bigcup_n p_n(H')$ si (p_n) est croissante, et $p_\infty(H') = \bigcap_n p_n(H')$ si (p_n) est décroissante. Il résulte de T26 et T27 que $p_\infty(H')$ est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$ si H' est un élément poli de $\underline{\underline{W}}'$. Nous allons étendre ce résultat à des suites monotones (p_n) d'applications de $\underline{\underline{W}}'$ dans $\underline{\underline{W}}$, où p_n sera encore une application croissante, mais pas nécessairement un morphisme : nous demanderons que les propriétés b) et c) de D24 soient alternativement vérifiées par les termes de la suite.

D36 DEFINITION.- Soient $(\mathbb{W}', \mathbb{E}')$ et $(\mathbb{W},\mathbb{E})$ deux espaces pavés. Une suite d'applications (p_k) de $\mathbb{W}'$ dans $\mathbb{W}$ est une chaine monotone si les conditions suivantes sont vérifiées

a) pour chaque k, p_k est une application monotone croissante

b) quel que soit l'entier N, il existe un entier $r \geq N$ tel que , si (A'_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathbb{W}'$, l'on ait $p_r(\bigcup A'_n) = \bigcup_n p_r(A'_n)$

c) quel que soit l'entier N, il existe un entier $s \geq N$ tel que la restriction de p_s à $\mathbb{E}'$ soit à valeurs dans $\mathbb{E}$, et que, si (B'_n) est une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{E}'$, l'on ait $p_s(\bigcap B'_n) = \bigcap_n p_s(B'_n)$

d) la suite (p_k) est monotone (pour l'ordre évident)

La chaine est dite croissante (resp décroissante) si (p_k) est une suite croissante (resp décroissante).

37 Soit (p_k) une chaine monotone de $(\mathbb{W}',\mathbb{E}')$ dans $(\mathbb{W},\mathbb{E})$. On appelle élément terminal de la chaîne l'application p_∞ de $\mathbb{W}'$ dans $\mathbb{W}$ définie par $p_\infty(H') = \bigcup_k p_k(H')$ si (p_k) est croissante, et par $p_\infty(H') = \bigcap_k p_k(H')$ si (p_k) est décroissante. L'application p_∞ est encore une application monotone croissante. D'autre part il est facile de voir que p_∞ vérifie b) (resp c)) si la chaîne est croissante (resp décroissante), mais ne vérifie pas engénéral c) (resp b)), même si les p_k sont des morphismes.

38 Exemple : Soit $(\mathbb{W},\mathbb{E})$ un espace pavé, où $\mathbb{W}$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E Désignons par $\mathbb{W}'$ l'ensemble des fonctions numériques positives définies sur E (muni de l'ordre habituel), par $\mathbb{E}'$ le pavage sur $\mathbb{W}'$ constitué par les fonctions f telles que $\{f \geq t\}$ appartienne à $\mathbb{E}$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, soient p^t et q^t les applications de $\mathbb{W}'$ dans $\mathbb{W}$ définies de la manière suivante :

$$p^t(f) = \{x \in E : f(x) > t\} \qquad \text{si f appartient à } \mathbb{W}'$$
$$q^t(f) = \{x \in E : f(x) \geq t\}$$

Si l'on pose
$$p_k^t(f) = \begin{cases} p^{t+(1/k)}(f) & \text{si k est impair} \\ q^{t+(1/k)}(f) & \text{si k est pair} \end{cases}$$

alors (p_k^t) est une chaine croissante, dont l'élément terminal est égal à p^t.

Si l'on pose
$$q_k^t(f) = \begin{cases} q^{t-(1/k)}(f) & \text{si k est impair} \\ p^{t-(1/k)}(f) & \text{si k est pair} \end{cases}$$

alors (q_k^t) est une chaîne décroissante, dont l'élément terminal est égal à q^t.

T39 THEOREME.- <u>Soient</u> $(\underline{\underline{W}}',\underline{\underline{E}}')$ <u>et</u> $(\underline{\underline{W}},\underline{\underline{E}})$ <u>deux espaces pavés</u>, <u>et soit</u> (p_k) <u>une chaîne monotone de</u> $\underline{\underline{W}}'$ <u>dans</u> $\underline{\underline{W}}$, <u>d'élément terminal</u> p_∞. <u>Si</u> H' <u>est un élément poli de</u> $\underline{\underline{W}}'$, $H = p_\infty(H')$ <u>est un élément poli de</u> $\underline{\underline{W}}$.

DEMONSTRATION.- Nous désignerons par R (resp S) le sous-ensemble infini des entiers r (resp s) tels que p_r (resp p_s) vérifie la condition b) (resp c)) de D36. Nous allons d'abord reprendre la démonstration de T26. Soit $\overset{*}{F}$ un rabotage global de $\underline{\underline{W}}'$ compatible avec H', et soit $r \in R$. Si $(\underline{\underline{C}}_n^r)$ est une suite de capacitances de $\underline{\underline{W}}$ et (P_n^r) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$, posons pour tout n

$$\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r = \{A' \in \underline{\underline{W}}' : P_n^r \cap p_r(A') \in \underline{\underline{C}}_n\}$$

Il est clair que $(\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r)$ est une suite de capacitances de $\underline{\underline{W}}'$. Soit $(\overset{*}{P}{}_n^r)$ la suite $[(\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r),\overset{*}{F}]$-déduite de H', et posons, pour tout n,

$$\text{si } \overset{*}{P}{}_n^r \notin \overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r \qquad f_n^r(P_1^r,\dots,P_n^r) = P_n^r$$
$$\text{si } \overset{*}{P}{}_n^r \in \overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r \qquad f_n^r(P_1^r,\dots,P_n^r) = P_n^r \cap p_r(\overset{*}{P}{}_{n+1}^r)$$

Nous avons vu au cours de la démonstration de T26 que l'on définit ainsi un rabotage global F^r de $\underline{\underline{W}}$, et que F^r vérifie la propriété suivante :

soit (P_n^r) une suite $[(\underline{\underline{C}}_n^r),F^r]$-rabotée, dont le premier terme est inclus dans $p_r(H')$; alors $(\overset{*}{P}{}_n^r)$ est une suite $[(\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r),\overset{*}{F}]$-rabotée dont le premier terme est inclus dans H' (il lui est égal), et P_n^r est inclus dans $p_r(\overset{*}{P}{}_n^r)$ pour tout n. Désignons par F un mélange des rabotages globaux F^r lorsque r parcourt R (cf 18). On sait que, si (P_n) est une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée, il existe, pour chaque r, une sous-suite $(\underline{\underline{C}}_n^r)$ de $(\underline{\underline{C}}_n)$ et une sous-suite (P_n^r) de (P_n) telles que (P_n^r)) soit une suite $[(\underline{\underline{C}}_n^r),F^r]$-rabotée (cf la démonstration de T19). Nous allons reprendre maintenant la démonstration de T20 en distinguant les deux cas de monotonie de (p_k).

a) (p_k) <u>est décroissante</u> :

Nous allons montrer que F est compatible avec $H = p_\infty(H') = \bigcap_{r\in R} p_r(H') = \bigcap_{s\in S} p_s(H')$. Soit (P_n) une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée dont le premier terme est inclus dans H. Nous devons vérifier que H est une enveloppe de (P_n). D'après T7, il suffit pour cela que $p_s(H')$ soit une enveloppe de (P_n) pour tout $s\in S$. Mais comme, pour tout $r\in R$, (P_n^r) (défini ci-dessus) est une sous-suite de (P_n), cela revient à montrer que $p_s(H')$ est une enveloppe de (P_n^r) dès que $r>s$. Fixons donc $s\in S$ et $r\in R$ tel que $r>s$. La suite (P_n^r) est $[(\underline{\underline{C}}_n^r),F^r]$-rabotée et son premier terme est inclus dans $p_r(H')$. Donc la suite $(\overset{*}{P}{}_n^r)$ est $[(\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}_n^r),\overset{*}{F}]$-rabotée. Comme $\overset{*}{P}{}_1^r = H'$ et que $\overset{*}{F}$ est compatible avec H', il existe une suite décroissante $(\overset{*}{E}{}_n^r)$ d'éléments de $\underline{\underline{E}}'$, moins fine que $(\overset{*}{P}{}_n^r)$, telle que H' contienne $\bigcap_n \overset{*}{E}{}_n^r$. Posons

$$E_n^s = p_s(\overset{*}{E}{}_n^r)$$

La suite (E_n^s) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, et cette suite est moins fine que la suite (P_n^r) : en effet, $(\overset{*}{E}{}_n^r)$ est moins fine que $(\overset{*}{P}{}_n^r)$, et, pour chaque n, P_n^r est contenu dans $p_r(\overset{*}{P}{}_n^r)$, qui est lui-même contenu dans $p_s(\overset{*}{P}{}_n^r)$. Enfin, d'après la propriété c) de D36,

$$\bigcap_n E_n^s = \bigcap_n p_s(\overset{*}{E}{}_n^r) = p_s(\bigcap_n \overset{*}{E}{}_n^r)$$

Donc $\bigcap_n E_n^s$ est contenu dans $p_s(H')$. Ainsi, $p_s(H')$ est une enveloppe de (P_n^r). Il en résulte que F est compatible avec H, et donc H est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$.

b) (p_k) est croissante :

Comme dans la démonstration de T20, nous allons modifier le rabotage F pour obtenir un rabotage global compatible avec $H = p_\infty(H') = \bigcup_{r\in R} p_r(H') = \bigcup_{s\in S} p_s(H')$. Soient $(\underline{\underline{C}}_n)$ une suite de capacitances de $\underline{\underline{W}}$ et (Q_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{W}}$, et désignons par (f_n) le $(\underline{\underline{C}}_n)$-rabotage associé à $(\underline{\underline{C}}_n)$ par F. Posons, pour tout n,

si $H\cap Q_1 \notin \underline{\underline{C}}_1$ $\quad f'_n(Q_1,\ldots,Q_n) = Q_n$

si $H\cap Q_1 \in \underline{\underline{C}}_1$ $\quad f'_n(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n) = f_n(p_r(H')\cap Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)$ où r est le plus petit entier appartenant à R tel que $p_r(H')\cap Q_1$ appartienne à $\underline{\underline{C}}_1$.

Il est clair que l'on définit ainsi un rabotage global F' de $\underline{\underline{W}}$. Nous allons vérifier qu'il est compatible avec H. Soit (Q_n) une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F']$-rabotée dont le premier terme Q_1 est inclus dans H. Puisque $H\cap Q_1 = Q_1$ appartient à $\underline{\underline{C}}_1$, $f'_n(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n) = f_n(p_r(H')\cap Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)$. Il en résulte aussitôt que la suite (P_n), où $P_1 = p_r(H')\cap Q_1$ et $P_n = Q_n$ pour $n\geq 2$, est une suite $[(\underline{\underline{C}}_n),F]$-rabotée dont le premier terme est inclus dans $p_r(H')$. Nous allons montrer que H est une enveloppe de (P_n); comme (P_n) et (Q_n) sont équivalentes, cela entrainera que H est une enveloppe de (Q_n). La suite (P^r_n) est $[(\underline{\underline{C}}^r_n),F^r]$-rabotée et P^r_1 est inclus dans $p_r(H')$. Donc la suite $(\overset{*}{P}{}^r_n)$ est $[(\overset{*}{\underline{\underline{C}}}{}^r_n),\overset{*}{F}]$-rabotée, et $p_r(\overset{*}{P}{}^r_n)$ contient P^r_n pour tout n. Comme $\overset{*}{F}$ est compatible avec H' et que $\overset{*}{P}{}^r_1 = H'$, H' est une enveloppe de $(\overset{*}{P}{}^r_n)$: il existe une suite décroissante $(\overset{*}{E}{}^r_n)$ d'éléments de $\underline{\underline{E}}'$, moins fine que $(\overset{*}{P}{}^r_n)$, telle que H' contienne $\bigcap_n \overset{*}{E}{}^r_n$. Soit $s\in S$ tel que $s\geq r$ et posons

$$E^s_n = p_s(\overset{*}{E}{}^r_n)$$

La suite (E^s_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, et cette suite est moins fine que la suite (P^r_n) : en effet, $(\overset{*}{E}{}^r_n)$ est moins fine que $(\overset{*}{P}{}^r_n)$, et, pour chaque n, P^r_n est contenu dans $p_r(\overset{*}{P}{}^r_n)$, qui est lui-même contenu dans $p_s(\overset{*}{P}{}^r_n)$. D'autre part, d'après D36-c), $\bigcap_n E^s = \bigcap_n p_s(\overset{*}{E}{}^r_n) = p_s(\bigcap_n \overset{*}{E}{}^r_n)$. Donc $\bigcap_n E^s_n$ est contenu dans $p_s(H')$, qui est lui-même contenu dans $H = p_\infty(H')$. Ainsi, H est une enveloppe de (P^r_n), et de (P_n) qui est équivalente à (P^r_n). Il en résulte que F' est compatible avec H, et donc H est un élément poli de $\underline{\underline{W}}$.

IV FONCTIONS POLIES

Arrivé ici, le rédacteur connait une défaillance subite et se contentera d'indiquer les grandes lignes. Le lecteur qui aura eu le courage de nous suivre jusqu'ici n'aura aucune difficulté à combler l'exercice à trous que nous allons lui proposer.

Nous désignerons par $(W,\underline{\underline{W}})$ un espace pavé où $\underline{\underline{W}}$ est l'ensemble des parties d'un ensemble E et par ϕ l'ensemble des fonctions positives (à valeurs finies ou non) définies sur E. On peut considérer sur ϕ trois pavages "raisonnables"

a) le pavage engendré par les combinaisons linéaires positives de fonctions caractéristiques d'éléments de $\underline{\underline{W}}$

b) le pavage formé par les fonctions φ telles que $\{\varphi \geq t\}$ appartienne à $\underline{\underline{W}}$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

c) le pavage formé par les fonctions φ telles que l'ensemble

$$\Gamma_\varphi = \{(x,t) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times E \;:\; \varphi(x) \geq t\}$$

appartienne à $\underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{W}}$ (où $\underline{\underline{F}}$ désigne le pavage constitué par les parties fermées de $\overline{\mathbb{R}}_+$).

Un premier exercice consiste à démontrer que ces trois pavages sont identiques : cela est évidemment très comparable à des résultats classiques de la théorie de la mesure, mais il faut, ici, se passer de l'usage du "complémentaire".

Désignons maintenant par $\underline{\underline{\phi}}$ ce pavage sur ϕ défini par a), b) ou c). On a alors trois manières naturelles de définir les fonctions polies. On peut considérer

a) les fonctions polies définies par le pavage $\underline{\underline{\phi}}$

b) les fonctions φ telles que $\{\varphi \geq t\}$ soit poli dans $(W,\underline{\underline{W}})$ pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

c) les fonctions φ telles que l'ensemble Γ_φ défini ci-dessus soit un élément poli de $[\mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}_+) \otimes W,\ \underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{W}}]$

Le deuxième exercice consiste à montrer que ces trois définitions sont équivalentes : b) <=> c) se déduit facilement de T26 et de la stabilité des éléments polis pour $(\cup d, \cap d)$; c) => a) peut encore se déduire de T26, mais c'est déjà un peu plus compliqué. Quant à a) => b), cela résulte de T39 : on a l'air d'employer un marteau-pilon pour écraser une noisette ! (surtout si l'on compare avec l'établissement des propriétés analogues lorsqu'on remplace dans b) et c) "poli" par "analytiques" et dans a) "fonctions polies" par "fonctions noyaux d'un schéma de SOUSLIN sur Φ).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELLACHERIE C. : Ensembles aléatoires II (Séminaire de probabilités III Lecture Notes n° 88, Springer, Heidelberg 1969)

[2] : Quelques résultats sur les capacités (C.R. série A, t269, p 576-579, Paris 1969)

[3] : Ensembles minces associés à une capacité (C.R. série A, t269, p766-769, Paris 1969)

[4] : Contributions à la théorie générale des processus (Thèse, Strasbourg 1970)

[5] MEYER P.A. : Probabilités et potentiel (Hermann, Paris 1966)

[6] MOKOBODZKI G. : Ensembles analytiques (cours fait à l'I.H.P., à paraître)

[7] SION M. : On capacitability and measurability (Ann. Inst. Fourier, t13, p88-99, Grenoble 1963)