CLAUDE DELLACHERIE

Potentiels de Green et fonctionnelles additives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 73-75

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__73_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
SEMINAIRE DE PROBABILITES 1968/69

POTENTIELS DE GREEN ET FONCTIONNELLES ADDITIVES

par C. DELLACHERIE

Nous nous plaçons sous les hypothèses de KUNITA-WATANABE, hypothèses qui sont rappelées dans [2] et la réalisation canonique du semi-groupe (P_t) est notée avec les symboles habituels. Soit μ une mesure (de RADON) qui ne charge pas les ensembles polaires et dont le potentiel $U\mu$ soit fini presque-partout. Nous allons montrer que $U\mu$ est le potentiel d'une fonctionnelle additive " généralisée" . Nous rappelons d'abord le théorème établi par MEYER dans [2] :

THEOREME 1.- <u>Soit μ une mesure ne chargeant pas les ensembles polaires. Il existe alors une mesure ν équivalente à μ dont le potentiel est borné</u>.

Le potentiel $U\nu$ de ν est alors un potentiel de la classe (D). Il existe donc une fonctionnelle additive naturelle (au sens des processus de Markov : sans discontinuité commune avec le processus) unique (A_t) telle que :

$$U\nu^x = E^x[A_\infty] \qquad \text{pour tout } x$$

Si f est une densité borélienne de μ par rapport à ν, on a alors (cf [2])

$$U\mu^x = U(f.\nu)^x = E^x[\int_0^\infty f\circ X_s \, dA_s] \qquad \text{pour tout } x$$

Posons

$$B_t = \int_0^t f\circ X_s \, dA_s$$

Il est clair que le processus (B_t), à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est adapté et que ses trajectoires sont croissantes. D'autre part on vérifie aisément que l'on a pour tout temps d'arrêt T :

a) $B_{T+t} = B_T + B_t\circ\theta_T$ p.s. car la fonctionnelle (A_t) vérifie la propriété de markov forte.

b) $I_{\{B_T \neq B_{T-}\}} \cdot I_{\{X_T \neq X_{T-}\}} = 0$ p.s. car la fonctionnelle (A_t) est naturelle.

Pour que le processus (B_t) soit une fonctionnelle additive naturelle, il faudrait encore qu'il vérifie :

c) la continuité à droite des trajectoires : d'après le théorème de LEBESGUE, on ne peut avoir $B_t(\omega) \neq B_{t+}(\omega)$ que si $B_{t+}(\omega) = +\infty$

d) en particulier $B_{0+} = 0$ p.s.

Le théorème suivant précise le comportement de (B_t) par rapport aux conditions c) et d) quand le potentiel $U\mu$ de μ est fini presque-partout :

THEOREME 2.- <u>Supposons que</u> $U\mu$ <u>soit fini presque-partout et désignons par</u> G <u>l'ensemble polaire</u> $\{U\mu = +\infty\}$. <u>Alors</u>

1) <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>p.s.</u> strictement <u>positif</u>, $B_\infty \circ \theta_T$ <u>est p.s. fini</u>.

2) <u>on a les inclusions d'ensembles suivantes</u> :

$$\{B_{0+} = +\infty\} \underset{p.s}{=} \{B_\infty = \infty\} \underset{p.s}{\subset} \{X_0 \in G\}$$

DEMONSTRATION.- Soit η une loi initiale et soit $\xi = \eta P_T$. Comme T est strictement positif, la mesure ξ ne charge pas l'ensemble polaire G. Donc

$$P^\eta\{B_\infty \circ \theta_T = \infty\} = P^\xi\{B_\infty = \infty\} = \int P^x\{B_\infty = \infty\}\, d\xi(x) = 0$$

puisque $E^x[B_\infty] = U\mu^x$ est fini si $x \notin G$. D'autre part on a pour tout $t \geq 0$

$$B_\infty = B_t + B_\infty \circ \theta_t \qquad \text{p.s.}$$

Comme $B_\infty \circ \theta_t$ est p.s. fini pour $t > 0$, il s'ensuit que

$$\{B_{0+} = \infty\} \underset{p.s}{=} \{B_\infty = \infty\}$$

Enfin si $x \notin G$, $P^x\{B_\infty = \infty\} = 0$ puisque $E^x[B_\infty] < \infty$, et donc

$$\{B_\infty = \infty\} \underset{p.s}{\subset} \{X_0 \in G\}$$

On peut donc dire que $B(.,\omega)$ n'est pas continue à droite seulement si $B(0+,\omega) = +\infty$ et que la fonctionnelle additive " généralisée" (B_t) ne peut exploser qu'au départ de l'ensemble polaire G. Nous allons donner deux exemples de cette situation.

EXEMPLES.- 1) considérons le processus de la translation uniforme, de vitesse unité, sur la demi-droite positive. Prenons pour ν la restriction de la mesure de LEBESGUE à $[0,1]$ et soit $\mu = (x^{-1}.\nu)$. Alors $U\mu^x$ est fini si $x \neq 0$ et vaut $+\infty$ pour $x = 0$. D'autre part,

$$B_t = \int_0^t (X_s)^{-1} I_{\{X_s \leq 1\}} \, ds$$

et donc $\{B_{0+} = \infty\} \underset{p.s}{=} \{X_0 = 0\}$

2) Considérons le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Prenons pour ν la restriction de la mesure de LEBESGUE à la boule unité et soit $\mu = (\|x\|^{-2}.\nu)$. On vérifie facilement que $U\mu^x$ est fini si $x \neq 0$ et vaut $+\infty$ pour $x = 0$. On a d'autre part

$$B_t = \int_0^t \|X_s\|^{-2} I_{\{\|X_s\| \leq 1\}} \, ds$$

D'après la loi du logarithme itéré (cf [1])

$$P^0\{\limsup_{t \to 0} \frac{\|X_t\|^2}{2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t)} = 1\} = 1$$

soit encore

$$\liminf_{t \to 0} \|X_t\|^{-2} \, 2t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t) = 1 \qquad P^0\text{- p.s.}$$

Pour P^0- presque-tout ω, il existe donc un $\varepsilon(\omega) > 0$ tel que l'on ait

$$\|X_t\|^{-2} > (4t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t))^{-1} \quad \text{si } t < \varepsilon(\omega)$$

Comme la fonction $t \to (4t \operatorname{Log}(\operatorname{Log} 1/t))^{-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, il en résulte que l'on a encore

$$\{B_{0+} = \infty\} \underset{p.s}{=} \{X_0 = 0\}$$

REMARQUE.- Dans les deux exemples, les ensembles $\{B_{0+} = \infty\}$ et $\{X_0 \in G\}$ sont p.s. égaux. Il est naturel de se demander si cette égalité est toujours vérifiée : dans l'affirmative, cela entrainerait que le potentiel d'une vraie fonctionnelle additive naturelle est fini partout dès qu'il est fini presque-partout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ITO (K.) et McKEAN (H.P.) : Diffusion Processes and their Sample Paths (Springer, Berlin, 1965)

[2] MEYER (P.A.) : Un résultat de théorie du potentiel (Séminaire de Probabilités III, Lecture Notes in Mathematics n°88, Springer, Berlin, 1969)