SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE CARTIER

Sur certaines variables aléatoires associées au réarrangement croissant d'un échantillon

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 28-36

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__28_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG 1968-69

- Séminaire de Probabilités -

SUR CERTAINES VARIABLES ALÉATOIRES ASSOCIÉES AU RÉARRANGEMENT CROISSANT D'UN ÉCHANTILLON

par P. CARTIER

I. RÉARRANGEMENTS CROISSANTS.

On suppose donnés un espace probabilisé $(\Omega , \underset{\sim}{F} , P)$ et une suite finie de variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ (avec $n \geq 2$) , en dépendance symétrique. Pour toute suite $a_1, \ldots, a_n$ de nombres réels, on note $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ son réarrangement croissant : c'est la suite croissante (au sens large) qui ne diffère de la suite $a_1, \ldots, a_n$ que par l'ordre des termes. Le réarrangement croissant $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n$ est alors la suite de variables aléatoires telle que $\overline{X}_1(\omega), \ldots, \overline{X}_n(\omega)$ soit le réarrangement croissant de $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

THÉORÈME 1.

Soit b *une fonction borélienne réelle sur* $\underset{\sim}{R}^2$, *telle que* $b(x , y) = 0$ *pour* $x \geq y$. *Posons*

$$U = \sum_{i=1}^{n} b(\overline{X}_i , X_i) \qquad \text{et} \qquad V = \sum_{i=1}^{n-1} b(X_i , X_{i+1}) \quad .$$

Les variables aléatoires U *et* V *ont même loi*.

Comme on sait, il suffit de prouver que U et V ont même fonction caractéristique. Nous fixerons dans la suite un nombre réel t, et nous établirons l'égalité $E[e^{itU}] = E[e^{itV}]$. On note c la fonction borélienne complexe e^{itb} sur $\underset{\sim}{R}^2$ et l'on pose

(1) $$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} c(\bar{x}_i , x_i)$$

pour $x_1, \ldots, x_n$ réels. Alors f est une fonction borélienne complexe bornée sur $\underset{\sim}{R}^n$ et l'on a $e^{itU} = f(X_1, \ldots, X_n)$. De manière analogue, on définit une fonction borélienne complexe bornée g sur $\underset{\sim}{R}^n$ par

(2) $$g(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n-1} c(x_i , x_{i+1}) \quad ;$$

il est clair qu'on a $e^{itV} = g(X_1, \ldots, X_n)$.

On notera $[n]$ l'ensemble des entiers de 1 à n et $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[n]$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le vecteur aléatoire $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}$ a par hypothèse la même loi que $X_1, \ldots, X_n$; on a donc

(3) $$E[f(X_1, \ldots, X_n)] = E[f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})] \quad ,$$

et par sommation sur les $n!$ permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on en déduit

(4) $$E[e^{itU}] = \frac{1}{n!} E[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})] \quad .$$

On a évidemment une formule analogue où U et f sont remplacés respectivement par V et g. Pour établir l'égalité $E[e^{itU}] = E[e^{itV}]$, il suffit donc d'établir l'identité

(5) $$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \quad ,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres réels arbitraires.

Transformons le premier membre de (5) . Pour toute permutation σ , le réarrangement croissant de $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ coïncide évidemment avec le réarrangement croissant $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ de $x_1, \dots, x_n$; de plus, il existe une permutation ρ telle que $\bar{x}_i = x_{\rho(i)}$ pour $1 \leq i \leq n$. Le premier membre de (5) est donc égal à $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} c(x_{\rho(i)}, x_{\sigma(i)})$; en faisant le changement d'indices de sommation $i = \rho^{-1}(j)$, $\sigma = \tau\rho$, on obtient $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^{n} c(x_j, x_{\tau(j)})$. La formule (5) peut donc s'écrire sous la forme

$$(6) \qquad \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} c(x_i, x_{\tau(i)}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n-1} c(x_{\sigma(i)}, x_{\sigma(i+1)}) \quad .$$

Nous allons maintenant démontrer la formule (6) par un argument combinatoire. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$, et soient $C_1, \dots, C_p$ les cycles de τ ; notons i_k le plus grand élément du cycle C_k ; on peut supposer que l'on a $i_1 > \dots > i_p$, ce qui détermine sans ambiguité la numérotation des cycles $C_1, \dots, C_p$. Si m_k est le nombre d'éléments de C_k , les éléments de C_k sont de la forme $\tau^j(i_k)$ pour $1 \leq j \leq m_k$, et l'on a $\tau^{m_k}(i_k) = i_k$. Considérons maintenant la suite

$$(S) \qquad \tau(i_1), \tau^2(i_1), \dots, \tau^{m_1}(i_1), \tau(i_2), \dots, \tau^{m_2}(i_2), \dots, \tau(i_p), \dots, \tau^{m_p}(i_p) \ ;$$

on l'obtient en énumérant successivement les éléments des cycles $C_1, \dots, C_p$ de sorte que le plus grand élément de chaque cycle se trouve le dernier du cycle.

Les éléments de la suite (S) sont distincts ; il existe donc une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ bien définie par le fait que la suite (S) soit identique à la suite $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$. Nous allons maintenant montrer que <u>la correspondance entre τ et σ est bijective</u> ; comme $\mathfrak{S}_n$ est un ensemble fini, il suffit de montrer que τ est déterminée par la permutation associée σ . Il revient au même de dire que la suite (S) détermine sans ambiguité les entiers $m_1, \ldots, m_p$, car on pourra alors reconstituer les différents cycles de τ à partir de la suite (S) . Appelons $S_1, \ldots, S_p$ les portions successives de (S) correspondant aux cycles $C_1, \ldots, C_p$ de τ, de sorte que S_k a m_k éléments. Le dernier élément de S_k est i_k, et tout élément de S_k distinct de i_k est majoré par i_k, qui se trouve à sa droite dans (S) . Par ailleurs, i_k majore $i_{k+1}, \ldots, i_p$ et <u>a fortiori</u> les éléments des diverses suites $S_{k+1}, \ldots, S_p$. Appelons <u>dominants</u> les éléments de la suite (S) qui majorent tous les termes de (S) situés à leur droite ; ce qui précède montre que les termes dominants de (S) sont $i_1, \ldots, i_p$, qui sont de rangs respectifs $m_1, m_1 + m_2, \ldots, m_1 + \ldots + m_p$. On a montré que les entiers $m_1, \ldots, m_p$ sont bien déterminés par (S) .

Soient τ et σ comme précédemment. On fait l'hypothèse $x_1 \leq \ldots \leq x_n$. Le produit $\prod_{i=1}^{n} c(x_i , x_{\tau(i)})$ est le produit des p contributions $F_1, \ldots, F_p$ correspondant aux p cycles $C_1, \ldots, C_p$, et l'on a évidemment

$$(7) \qquad F_k = \prod_{j=1}^{k-1} c(x_{\tau^j(i_k)} , x_{\tau^{j+1}(i_k)}) \times c(x_{i_k} , x_{\tau(i_k)}) \quad .$$

Or, on a $i_k \geq \tau(i_k)$ d'où $x_{i_k} \geq x_{\tau(i_k)}$, et l'hypothèse faite sur b entraîne $c(x , y) = 1$ lorsque $x \geq y$ (le cas d'égalité $i_k = \tau(i_k)$ se produit dans le cas des cycles à un élément, et ce cas seulement). Le dernier facteur dans F_k est donc égal à 1 . Par ailleurs, la définition de σ à partir de la suite (S) entraîne

$$(8) \qquad \prod_{i=1}^{n-1} c(x_{\sigma(i)} , x_{\sigma(i+1)}) = F_1 \ldots F_p \, c(x_{i_1} , x_{\sigma(i_2)}) \ldots c(x_{i_{p-1}} , x_{\sigma(i_p)}) \ .$$

Pour $k = 1, \ldots, p-1$, on a $i_k > i_{k+1} \geq \sigma(i_{k+1})$, d'où $x_{i_k} \geq x_{\sigma(i_{k+1})}$ et finalement $c(x_{i_k}, x_{\sigma(i_{k+1})}) = 1$. On a donc

(9) $$\prod_{i=1}^{n} c(x_i , x_{\tau(i)}) = F_1 \dots F_p = \prod_{i=1}^{n-1} c(x_{\sigma(i)} , x_{\sigma(i+1)}) \quad .$$

Sous l'hypothèse faite $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, les termes des deux sommes dans (6) se correspondent donc un à un, d'où l'égalité cherchée. Comme les deux membres de (6) sont évidemment des fonctions symétriques des n variables réelles $x_1, \dots, x_n$, ceci suffit à entraîner l'égalité dans le cas général. Nous avons vu précédemment comment déduire le théorème 1 de l'égalité (5) , donc de (6) .

2. UNE IDENTITÉ EXPONENTIELLE SUR LES SÉRIES GÉNÉRATRICES.

On suppose maintenant donnée une suite infinie $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi ; on se donne aussi une fonction borélienne réelle b sur $\mathbb{R}^2$, mais on ne fait plus l'hypothèse que l'on a $b(x , y) = 0$ pour $x \geq y$. On définit alors deux suites de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ par les formules

(10) $$Y_n = \sum_{i=1}^{n} b(\overline{X}_i^{(n)} , X_i)$$

(11) $$Z_n = b(X_1 , X_2) + \dots + b(X_{n-1} , X_n) + b(X_n , X_1)$$

où $\overline{X}_1^{(n)}, \dots, \overline{X}_n^{(n)}$ désigne le réarrangement croissant de la suite finie $X_1, \dots, X_n$. La formule (11) n'a de sens que pour $n \geq 2$; on posera par convention $Z_1 = 0$. Par ailleurs, on note F_n la fonction caractéristique de Y_n et G_n celle de Z_n .

THÉORÈME 2.

Pour tout nombre réel t et tout nombre complexe u avec $|u| < 1$, on a

(12) $$1 + \sum_{n\geq 1} u^n F_n(t) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{u^k}{k} G_k(t) \quad .$$

On fixe t et u comme dans l'énoncé, et l'on note c la fonction borélienne complexe bornée e^{itb} sur $\underset{\sim}{R}^2$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit une fonction borélienne complexe bornée f_n sur $\underset{\sim}{R}^n$ et une fonction complexe h_n sur $\mathfrak{S}_n$ par les formules

(13) $$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} c(\bar{x}_i \, , x_i)$$

(14) $$h_n(\sigma) = E[\prod_{i=1}^{n} c(X_i \, , X_{\sigma(i)})] \quad .$$

Les calculs faits page 2, en particulier la formule (4) et la transformation du premier membre de (5), établissent la relation

(15) $$F_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h_n(\sigma) \quad .$$

Notons γ_n la permutation circulaire $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n-1 \to n \to 1$; on a

(16) $$e^{itZ_n} = c(X_1 \, , X_2) \ldots c(X_{n-1} \, , X_n) \, c(X_n \, , X_1) = \prod_{i=1}^{n} c(X_i \, , X_{\gamma_n(i)}) \, ,$$

d'où

(17) $$G_n(t) = h_n(\gamma_n) \quad .$$

La suite de la démonstration va résulter d'une analyse des propriétés des fonctions h_n.

a) On a $h_n(\sigma \tau \sigma^{-1}) = h_n(\tau)$ quels que soient σ et τ dans $\mathfrak{S}_n$:

cela résulte du calcul suivant

$$h_n(\sigma\tau\sigma^{-1}) = E[\prod_{i=1}^{n} c(X_i , X_{\sigma\tau\sigma^{-1}(i)})] = E[\prod_{j=1}^{n} c(X_{\sigma(j)} , X_{\sigma\tau(j)})]$$

$$= E[\prod_{j=1}^{n} c(X'_j , X'_{\tau(j)})] = E[\prod_{j=1}^{n} c(X_j , X_{\tau(j)})] = h_n(\tau) .$$

On passe de la deuxième expression à la troisième par le changement d'indice $i = \sigma(j)$. On a posé $X'_j = X_{\sigma(j)}$; la quatrième égalité résulte alors de ce que les vecteurs aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ et $X'_1, \ldots, X'_n$ ont même loi, puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi.

b) <u>On a</u> $h_{m+n}(\rho \oplus \sigma) = h_m(\rho) . h_n(\sigma)$ <u>pour</u> ρ <u>dans</u> $\mathfrak{S}_m$ <u>et</u> σ <u>dans</u> $\mathfrak{S}_n$: la permutation $\rho \oplus \sigma$ appartient à $\mathfrak{S}_{m+n}$; elle est définie comme la permutation τ telle que $\tau(i) = \rho(i)$ pour $1 \leq i \leq m$ et $\tau(m + j) = m + \sigma(j)$ pour $1 \leq j \leq n$. On a

$$(18) \qquad h_{m+n}(\rho \oplus \sigma) = E[\prod_{i=1}^{m} c(X_i , X_{\rho(i)}) \times \prod_{j=1}^{n} c(X_{m+j} , X_{m+\sigma(j)})]$$

$$= E[\prod_{i=1}^{m} c(X_i , X_{\rho(i)})] \times E[\prod_{j=1}^{n} c(X_{m+j} , X_{m+\sigma(j)})]$$

puisque les vecteurs aléatoires $X_1, \ldots, X_m$ et $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ sont indépendants. Mais comme le vecteur aléatoire $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ a même loi que $X_1, \ldots, X_n$, le produit précédent est égal à $h_m(\rho) . h_n(\sigma)$.

Ces points étant acquis, fixons l'entier $n \geq 1$. Si $p_1, \ldots, p_n$ sont des entiers positifs tels que $1.p_1 + 2.p_2 + \ldots + n.p_n = n$, il existe dans $\mathfrak{S}_n$ un nombre égal à $n!/\prod_{k=1}^{n} (k^{p_k} . p_k!)$ de permutations dont la décomposition en cycles comprenne p_1 cycles de longueur 1, ..., p_n cycles de longueur n . Si σ est l'une de ces permutations, il existe alors une permutation τ dans $\mathfrak{S}_n$ telle que

$$\tau\,\sigma\,\tau^{-1} = \underbrace{\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_1}_{p_1} \oplus \underbrace{\gamma_2 \oplus \dots \oplus \gamma_2}_{p_2} \oplus \dots\dots \oplus \underbrace{\gamma_n \oplus \dots \oplus \gamma_n}_{p_n} \quad ;$$

d'après les propriétés a) et b), on a alors $h_n(\sigma) = \prod_{k=1}^{n} h_k(\gamma_k)^{p_k}$. On en déduit

(19) $$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_n(\sigma) = \sum_{1p_1+\dots+np_n=n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k!} \left(\frac{h_k(\gamma_k)}{k}\right)^{p_k} ,$$

et d'après (15) et (17) , on a donc

(20) $$F_n(t) = \sum_{1p_1+\dots+np_n=n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k!} \left(\frac{G_k(t)}{k}\right)^{p_k} .$$

Par sommation sur n , on déduit de (20) la relation

(21) $$1 + \sum_{n\geq 1} u^n F_n(t) = \sum u^{\Sigma k p_k} \prod_{k\geq 1} \left(\frac{G_k(t)}{k}\right)^{p_k} ,$$

où la sommation est étendue à toutes les suites $(p_1, p_2, \dots)$ d'entiers positifs, dont un nombre fini seulement sont non nuls. D'après la formule de développement d'un produit infini de séries, le second membre de (21) est égal à

$$\prod_{k\geq 1} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \left(\frac{u^k G_k(t)}{k}\right)^p = \prod_{k\geq 1} \exp \frac{u^k}{k} G_k(t) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{u^k}{k} G_k(t) \quad ;$$

les séries et les produits infinis écrits convergent absolument en vertu des inégalités $|u| < 1$ et $|G_k(t)| \leq 1$, ce qui justifie les calculs formels ci-dessus. On a prouvé le théorème 2 .

3. COMPLÉMENTS.

Nous conservons les notations du n° 2 , et nous définissons les variables aléatoires T_n par $T_1 = 0$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n-1} b(X_i , X_{i+1})$ pour $n \geq 2$. On note H_n la fonction caractéristique de T_n .

THÉORÈME 3.

Sous l'hypothèse $b(x\,,\,y) = 0$ pour $x \geq y$, on a la relation

$$1 + \sum_{n\geq 1} u^n H_n(t) = \exp \sum_{k\geq 1} \frac{u^k}{k} G_k(t) \tag{22}$$

lorsque $|u| < 1$, pour tout nombre réel t .

Le théorème 1 montre que Y_n et T_n ont même loi, d'où $F_n = H_n$ (on utilise ici l'hypothèse sur b). Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.

4. INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES.

Les theorèmes 1 et 3 sont dus à Foata. Dans sa thèse (Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 14 (1965) , p. 81-241) , il les a déduit de résultats combinatoires assez délicats. Ces derniers ont été simplifiés et généralisés dans un travail commun de Foata et moi-même (Lecture Notes in Mathematics, n° 85, Springer (1969)) ; nous en avons déduit les théorèmes 1 à 3 . De ces théorèmes combinatoires, il ne reste ici que la construction de la bijection $\sigma \mapsto \tau$ de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même étudiée à la page 3 . Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, soit $\nu(\sigma)$ le nombre des entiers $i \in [n]$ tels que $i < \sigma(i)$, et $\xi(\sigma)$ le nombre des entiers $i \in [n-1]$ tels que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$; avec les notations de la page 3 , on a $\nu(\sigma) = \xi(\tau)$, ce qui s'établit immédiatement par les considérations de l'endroit cité. On en déduit qu'il existe, pour tout entier positif m , autant de permutations σ avec $\nu(\sigma) = m$ que de permutations σ avec $\xi(\sigma) = m$. C'est là un théorème de P. Mac Mahon (voir son livre : Combinatory Analysis, Chelsea, New-York (1960), à la page 186 du volume I) .