SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE
CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Diffusions à coefficients continus, d'après Stroock et Varadhan

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 240-282
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__240_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

DIFFUSIONS À COEFFICIENTS CONTINUS
D'APRÈS D.W.STROOCK ET S.R.S.VARADHAN

Nous exposons ci-dessous les résultats essentiels d'un long mémoire de STROOCK et VARADHAN, (*) qui nous est parvenu sous forme de " preprint " , et qui porte sur la construction de diffusions ayant (dans $\mathbb{R}^d$, sans conditions frontières) un générateur infinitésimal donné : un opérateur elliptique à coefficients continus. Plus précisément, nous avons réduit à ce schéma l'exposé de STROOCK-VARADHAN, afin de rendre le nôtre plus compréhensible ; en effet, S-V traitent complètement le cas où les coefficients dépendent aussi du temps.

Nous n'apportons pas de résultats nouveaux, mais notre présentation est assez différente de celle de S-V. Nous nous adressions en effet à un public qui connaissait bien la théorie des martingales . Nous n'avons donc pas cherché à être élémentaires à tout prix (comme S-V), mais au contraire à utiliser les moyens mis à notre disposition par la théorie des martingales - en particulier, la notion de martingale locale, qui nous semble essentielle dans ce genre de questions.

Comme l'article de STROOCK-VARADHAN, les quatre exposés ci-dessous n'exigent aucune connaissance de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Nous tenons à remercier M. Giorgio LETTA pour sa collaboration : c'est lui qui a lu, simplifié et exposé la partie du mémoire consacrée à l'unicité, la plus difficile de beaucoup.

Catherine DOLÉANS-DADE
Claude DELLACHERIE
Paul-André MEYER

(*) Diffusion processes with continuous coefficients . A paraître en 1969 dans les Comm. Pure Appl. Math.

DIFFUSIONS À COEFFICIENTS CONTINUS : LE PROBLÈME

d'après un exposé de Catherine DOLÉANS

Le texte qui suit n'est pas identique à celui de l'exposé oral. En effet, celui-ci contenait plusieurs pages de rappels sur les intégrales stochastiques, qui auraient fait double emploi avec l'exposé de DOLÉANS-MEYER contenu dans ce volume. Le texte a donc été abrégé sur certains points, complété sur d'autres pour tenir compte de modifications suggérées par C.DELLACHERIE.

§ 1 . LE PROBLÈME GÉNÉRAL

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, notre problème est moins général tout de même que celui que traitent STROOCK et VARADHAN, dans lequel les coefficients de l'opérateur différentiel <u>dépendent du temps</u>.

Nous nous donnons deux applications définies sur $\mathbb{R}^d$. La première associe à $x \in \mathbb{R}^d$ une <u>matrice</u> (d,d) <u>symétrique et positive</u>, $a(x)=(a^{ij}(x))$. La seconde associe à x un <u>vecteur</u> $b(x) \in \mathbb{R}^d$: $b(x)=(b^i(x))$. Nous supposerons toujours que les fonctions $a^{ij}(.), b^i(.)$ sont <u>boréliennes et bornées sur tout compact de $\mathbb{R}^d$</u> - des hypothèses plus fortes (continuité, ellipticité uniforme, etc) seront introduites par la suite.

On considère alors l'opérateur différentiel à coefficients variables défini par

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij}(x)D_iD_jf(x) + \sum_i b^i(x)D_if(x)$$

On désire construire un semi-groupe de Markov (P_t) sur $\mathbb{R}^d$ admettant L comme générateur infinitésimal, en un sens à préciser. La manière a priori la plus raisonnable d'exprimer cela consiste à dire que, si $f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty$

(1) $$P_tf = \int_0^t P_s\, Lf\, ds \qquad \left(\text{ ou } \frac{d}{dt}P_tf = P_tLf \right)$$

Nous construisons ensuite les processus de Markov (X_t) associés à (P_t) . Comme il est naturel en théorie des diffusions, nous exigerons que ces processus aient des trajectoires continues . Désignons donc par Ω l'ensemble de toutes les applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^d$; par (X_t), comme d'habitude, la famille des applications coordonnées ; par $\underline{\underline{F}}^o_s$ la tribu engendrée par les X_t, $t\leq s$ (pour $s\in[0,+\infty]$) ; par P^x la loi sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_\infty)$ pour laquelle le processus (X_t) est markovien, admet (P_t) comme semi-groupe de transition et ε_x comme loi initiale. Dans ces conditions, on voit aussitôt que la condition (1) est équivalente à la suivante : pour tout $x\in\mathbb{R}^d$

(2) Quelle que soit $f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c$, le processus

$$f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Lf\circ X_s\, ds$$

est une martingale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, lorsque Ω est muni de la loi P^x.

La propriété (2) ne fait plus intervenir explicitement le semi-groupe (P_t). Nous allons oublier ce semi-groupe, et nous poser directement le problème des martingales suivant :

PROBLÈME.- Construire les lois P sur Ω possédant les propriétés

a) Si $f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c$, $f\circ X_t-f\circ X_0-\int_0^t Lf\circ X_s\, ds$ est une martingale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, lorsque Ω est muni de la loi P.

b) $P\{X_0=x\} = 1$

L'ensemble de ces lois de probabilité sera noté Π_x

Nous verrons plus tard que si les coefficients $a^{ij}(x)$ de L sont continus, Π_x est non vide, réduit à un seul élément P_x, et que les lois P_x proviennent d'un bon semi-groupe de Markov (P_t). C'est là le résultat essentiel de STROOCK-VARADHAN.

FORMES ÉQUIVALENTES DU PROBLÈME DES MARTINGALES

THÉORÈME 1 .- Soit P une loi de probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_\infty)$, telle que $P\{X_0=x\}=1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes(*) :

1) $P\in\Pi_x$.

2) Pour toute fonction $f\in\underline{\underline{C}}^2(\mathbb{R}^d)$, le processus

(*) Dans l'énoncé, et dans toute la suite, <,> désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^d$

$$f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Lf\circ X_s\, ds = H_t^f \quad (*)$$

<u>est une martingale locale</u> (par rapport à la famille...(**))

3) <u>Pour tout</u> $y\in\mathbb{R}^d$, <u>le processus</u> $M_t^y = \langle y, X_t - X_0 - \int_0^t b\circ X_s\, ds\rangle$ <u>est une martingale locale, dont le processus croissant associé</u> A_t^y <u>est égal à</u> $\int_0^t \langle y, (a\circ X_s)y\rangle\, ds$.

4) <u>Pour tout</u> $y\in\mathbb{R}^d$, <u>le processus suivant est une martingale locale</u> :

$$Z_t^y = \exp\left[\langle y, X_t - X_0 - \int_0^t b\circ X_s\, ds\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle y, (a\circ X_s)y\rangle\, ds\right]$$

DÉMONSTRATION.- D'abord, (1) et (2) sont équivalentes : en effet, (1) signifie que le processus (H_t^f) est une martingale lorsque $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; on en déduit aussitôt que (H_t^f) est une martingale pour $f\in\underline{\underline{C}}_c^2$, par convergence uniforme ; ensuite, par arrêt aux temps de sortie de compacts contenant x, on voit que (H_t^f) est une martingale locale si $f\in\underline{\underline{C}}^2$, donc (1)=>(2). Inversement, si (2) est satisfaite et si $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, le processus (H_t^f) considéré sur un intervalle compact $t\in[0,A]$ est une martingale locale bornée, donc une martingale ordinaire.

Pour voir que (2)=>(3), nous prenons d'abord pour f la fonction $f(x)=\langle y,x\rangle$, et il vient que M_t^y est une martingale locale. Ensuite, nous prenons $f(x)=\langle y,x\rangle^2$, il vient que le processus

$$\langle y, X_t\rangle^2 - 2\int_0^t \langle y, X_s\rangle\langle y, b\circ X_s\rangle ds - \int_0^t \langle y, (a\circ X_s)y\rangle\, ds$$

est une martingale locale. Posons

$$N_t^y = \langle y, X_t\rangle^2 - 2\int_0^t \langle y, X_s\rangle\langle y, b\circ X_s\rangle ds$$

Tout revient à montrer que $(M_t^y)^2 - N_t^y$ est une martingale locale. Or

$$\begin{aligned}(M_t^y)^2 - N_t^y &= 2\int_0^t \langle y, b\circ X_s\rangle[M_s^y - M_t^y]ds - 2\int_0^t ds\int_s^t \langle y, b\circ X_s\rangle\langle y, b\circ X_u\rangle du \\ &\quad + \left[\int_0^t \langle y, b\circ X_s\rangle ds\right]^2 \\ &= 2\int_0^t \langle y, b\circ X_s\rangle[M_s^y - M_t^y]ds\ .\end{aligned}$$

Cette expression s'écrit aussi $\int_0^t M_s^y dB_s - M_t^y B_t = \int_0^t B_s dM_s^y$ (intégration par parties) où $B_s = \int_0^s \langle y, b\circ X_u\rangle du$; on a donc bien une martingale locale.

(*) La présence de $f\circ X_0$ ne sert qu'à obtenir des processus nuls pour t=0.

(**) Dans toute la suite, les processus seront adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, les notions de temps d'arrêt, de martingale, seront relatives à cette famille .

Le fait que (3) <=> (4) est important. Nous en faisons un lemme.

LEMME 1.- Soient (M_t) et (A_t) deux processus continus(*) à valeurs réelles. On suppose que $M_0=A_0=0$, et que (A_t) est un processus croissant. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

1) (M_t) est une martingale locale, et (A_t) est le processus croissant associé.

2) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, le processus $Z_t^\lambda = \exp[\lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2 A_t]$ est une martingale locale.

DÉMONSTRATION.- Rappelons la formule du changement de variables dans les intégrales stochastiques (pour le cas continu seulement). Soit (Y_t) un processus réel admettant une décomposition $Y_t=N_t+B_t$, où (N_t) est une martingale locale continue, (B_t) un processus continu dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée ; soit $\langle Y,Y\rangle_t$ le processus croissant continu associé à la martingale locale (N_t) - il ne dépend en fait que de (Y_t) - et soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors

$$f\circ Y_t = f\circ Y_0 + \int_0^t Df\circ Y_s\, dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t D^2 f\circ Y_s\, d\langle Y,Y\rangle_s$$

où la première intégrale doit être interprétée comme la somme de deux intégrales : l'une (ordinaire) par rapport à dB_s , l'autre (intégrale stochastique d'Ito) par rapport à dN_s .

Appliquons cela à $Y_t = \lambda M_t - \frac{1}{2}\lambda^2 A_t$, $f(x)=e^x$, sous l'hypothèse 1) de l'énoncé, il vient

$$\exp[\lambda M_t - \tfrac{1}{2}\lambda^2 A_t] = 1 + \int_0^t \exp Y_s\, \lambda dM_s + \int_0^t \exp Y_s\, (-\tfrac{\lambda^2}{2})\, dA_s + {}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \exp Y_s\, \lambda^2 dA_s = 1 + \int_0^t \lambda \exp Y_s\, dM_s$$

et le dernier membre est une martingale locale ; (2) est donc établie.

Inversement, montrons que 2) => 1). En arrêtant les processus aux temps d'arrêt $T_n = \inf\{ t : \sup(|M_t|, A_t) \geq n \}$, on voit que l'on peut se ramener au cas où M et A sont des processus continus et bornés. Mais alors le théorème de Lebesgue permet de dériver indéfiniment sous le signe $\int$ la relation

$$\int_H Z_t^\lambda\, dP = \int_H Z_s^\lambda\, dP \qquad (\, s\leq t,\ H\in\underline{\underline{F}}_s^\circ\,)$$

(*) Ce lemme peut être légèrement amélioré. Voir l'appendice. Bien entendu, tout ceci s'applique à des espaces probabilisés autres que Ω !

Cela donne

$$\int_H Z_t^\lambda (M_t - \lambda A_t)\, dP = \int_H Z_s^\lambda (M_s - \lambda A_s)\, dP$$

$$\int_H Z_t^\lambda (-A_t+(M_t-\lambda A_t)^2)\, dP = \int_H Z_s^\lambda(-A_s+(M_s-\lambda A_s)^2)\, dP .$$

En faisant $\lambda=0$ dans la première relation on trouve que (M_t) est une martingale ; de même la seconde montre que $(M_t^2-A_t)$ est une martingale.

Le lemme étant prouvé, achevons de démontrer le théorème 1 . Le seul point qui reste est l'implication (4) => (2). Supposons donc que (Z_t^y) soit une martingale locale pour tout $y\in\mathbb{R}^d$. Le processus

$$V_t = \exp [<y, \int_0^t b\circ X_s\, ds > + \frac{1}{2} \int_0^t <y , (a\circ X_s)y > ds]$$

admet des trajectoires à variation bornée. D'après la formule d'intégration par parties pour les intégrales stochastiques, le processus

$$V_t Z_t^y - \int_0^t Z_s^y dV_s = \int_0^t V_s\, dZ_s^y$$

est une martingale locale. En calculant le premier membre, on voit qu'il s'agit du processus

$$f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Lf\circ X_s\, ds$$

lorsque $f(x)= \exp <y,x>$. La propriété (2) est donc satisfaite lorsque f est une combinaison linéaire d'exponentielles du type précédent. D'autre part, comme il s'agit de martingales <u>locales</u> , l'ensemble des $f\in\underline{\underline{C}}^2$ satisfaisant à (2) est fermé pour la topologie de la convergence <u>uniforme sur tout compact</u> des dérivées d'ordre ≤ 2 (arrêter les processus aux temps de sortie des compacts). Toute fonction $f\in\underline{\underline{C}}_c^2$ étant limite en ce sens de combinaisons linéaires d'exponentielles, le théorème est établi.

Pour finir , nous aboutissons donc à une forme modifiée du problème des martingales : c'est la forme sur laquelle travaillent STROOCK et VARADHAN .

PROBLÈME.- <u>Déterminer les lois</u> P <u>sur</u> Ω <u>telles que</u> $P\{X_0=x\}=1$, <u>et que, pour tout</u> $y\in\mathbb{R}^d$, <u>le processus</u>

$$Z_t^y = \exp [< y,X_t-X_0> - \int_0^t < y,b\circ X_s> ds - \frac{1}{2}\int_0^t <y,(a\circ X_s)y> ds]$$

<u>soit une martingale locale</u>.

Il faut bien noter que cette forme du problème ne présente aucune supériorité intrinsèque sur les autres formes équivalentes ! En particulier, il nous arrivera d'avoir recours aux autres formes dans la suite. Cependant

- la considération des martingales locales (Z_t^λ) nous permettra au paragraphe suivant d'obtenir des majorations indispensables,
- la dernière forme semble bien s'adapter à la construction de diffusions avec des conditions aux limites (travaux plus récents de STROOCK-VARADHAN).

Nous avons utilisé systématiquement les martingales locales dans cet exposé, et nous continuerons à les utiliser ; STROOCK et VARADHAN ne considèrent que des martingales véritables. A ce sujet, voir la remarque suivant le théorème 4, au paragraphe suivant.

§ 2 . UNE MAJORATION FONDAMENTALE

La majoration suivante, due à STROOCK-VARADHAN, jouera un grand rôle dans la suite :

THEOREME 2.- <u>Soit</u> (M_t) <u>une martingale continue à valeurs réelles, et soit</u> (A_t) <u>le processus croissant associé. On suppose que</u> $M_0=0$, <u>et que la variable aléatoire</u> A_∞ <u>est majorée par une constante</u> k . <u>On a alors pour tout</u> $c \geqq 0$

$$P\{ \sup_{t \geqq 0} |M_t| \geqq c \} \leqq 2\, e^{-c^2/2k}$$

DEMONSTRATION. Posons $M^+ = \sup_{t \geqq 0} M_t$, et $Z_t^\lambda = \exp\,[\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t]$; (Z_t^λ) est une martingale locale, continue, positive, donc aussi une surmartingale positive, et nous avons $E[Z_t^\lambda] \leqq E[Z_0^\lambda] = 1$ pour tout t. Donc, d'après l'inégalité de Doob ,

$$P\{M^+ \geqq c\} \leqq P\{ \sup_t Z_t^\lambda \geqq \exp\,(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2} k)\} \leqq \frac{E[Z_0^\lambda]}{\exp(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2}k)} = e^{-\lambda c + \frac{\lambda^2}{2} k}$$

Le dernier membre atteint sa valeur minimum pour $\lambda = \frac{c}{k}$ et il vient

$$P\{ M^+ \geqq c \} \leqq e^{-c^2/2k}$$

On applique le même résultat à $-M$, et on obtient l'inégalité de l'énoncé.

REMARQUE.- Si (M_t) est une martingale locale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $M_0=0$, et si tous les processus croissants (A_t^i) associés aux composantes (M_t^i) satisfont à $A_\infty^i \leqq k$ p.s., on a

$$P\{ \sup \|M_t\| \geqq c \} \leqq \sum_{i=1}^{d} P\{ \sup |M_t^i| \geqq \frac{c}{d} \} \leqq 2d e^{-c^2/2kd^2} .$$

Le théorème 2 nous donne la majoration suivante pour l'<u>espérance</u> de $\exp\,[\sup_t |M_t|]$

THEOREME 3.- <u>Conservons les notations du théorème 2, et posons de plus</u> $M^* = \sup_t |M_t|$. <u>On a (sous les mêmes hypothèses</u>)

a) $E[e^{M^*}] \leqq 5e^k$ (<u>donc aussi</u> $E[e^{uM^*}] \leqq 5e^{u^2 k}$ <u>pour tout</u> u)

b) $\int_{\{M^* \geqq c\}} e^{M^*} dP \leqq 2e^{-c}$ <u>si</u> $c \geqq 4k$.

DEMONSTRATION.- Nous partons de la formule bien connue $E[f] = \int_0^\infty P\{f>u\}du$, vraie pour toute variable aléatoire positive f, et nous l'appliquons à $f=e^{M^*}$

$$\int e^{M^*}dP \leqq 1 + \int_0^\infty P\{e^{M^*} > e^u\}\, d(e^u) = 1 + \int_0^\infty P\{M^*>u\}e^u\, du$$

$$\leqq 1+ 2\int_0^\infty e^{-u^2/2k}e^u du \leqq 1+ 2\sqrt{2\pi k}\, e^{k/2}$$

(majoration obtenue en remplaçant $\int_0^\infty$ par $\int_{-\infty}^{+\infty}$) . On vérifie aussitôt que $\sqrt{k}\, e^{k/2} \leqq e^{-1/2}e^k$, d'où la majoration par $1+4e^k \leqq 5e^k$. On peut d'ailleurs se contenter de majorations plus grossières !

Nous avons de même pour c>0

$$\int_{\{M^*>c\}} e^{M^*}dP = \int_c^\infty P\{e^{M^*} > e^u\}\, d(e^u) = \int_c^\infty P\{M^*>u\}e^u du$$

$$\leqq 2\int_c^\infty e^{-u^2/2k}e^u du$$

Si $c\geqq 4k$, on a $u^2/2k > 2u$, et cette intégrale est majorée par $2\int_c^\infty e^{-u}du = 2e^{-c}$. Le théorème est établi.

Nous utilisons maintenant la majoration de STROOCK-VARADHAN pour obtenir un résultat sur la continuité uniforme des trajectoires de M.

THÉORÈME 4 .- <u>Supposons que</u> (A_t) <u>satisfasse à une condition de Lipschitz</u>

$$|A_t-A_s| \leqq \ell\, |t-s|$$

<u>Pour tout entier</u> N>0, <u>soit</u> L_N <u>l'ensemble des</u> $\omega\in\Omega$ <u>possédant la propriété suivante : pour tout entier</u> m>N, <u>tout entier</u> p>1 , <u>tout intervalle</u> I <u>de longueur</u> $\leqq 2^{-p}$ <u>contenu dans</u> [0,m], <u>l'oscillation</u> $\delta_I(\omega)$ <u>de</u> $M_\bullet(\omega)$ <u>sur</u> I <u>est au plus</u> $4\sqrt{2\log 2\; mp\ell\, 2^{-p}}$. <u>Alors</u> $P(L_N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

DEMONSTRATION.- Soit d'abord I=[s,t] un intervalle . En remplaçant dans le théorème 2 $\underline{\underline{F}}^o_u$ par $\underline{\underline{F}}^o_{(s+u)\wedge t}$, M_u par $M_{(s+u)\wedge t}-M_s$, A_u par $A_{(s+u)\wedge t}-A_s$, nous obtenons

$$P\{ \delta_I \geqq 2c \} \leqq P\{ \sup_{r\in I} |M_r-M_s| >c \} \leqq 2 \exp (-c^2/2\ell(t-s))$$

Nous appliquons cela au p-ième découpage dyadique de [0,m] en $m.2^p$ intervalles de longueur 2^{-p}. Si I_j est le j-ième intervalle, nous avons en prenant $c= \sqrt{2\log 2\; mp\ell\, 2^{-p}}$

$$P\{ \delta_{I_j} > 2c \} \leqq 2.2^{-mp}$$

et par conséquent

$$P\{ \sup_j \delta_{I_j} > 2c \} \leqq 2m2^{p-mp}$$

La probabilité pour qu'il existe un $m>N$ et $p>1$ tels que pour la subdivision correspondante on ait $\sup_j \delta_{I_j} > 2c$ est donc au plus

$$\sum_{m>N} \sum_{p>1} 2m2^{p-mp} \leqq \sum_{m>N} 4m.2^{1-m}$$

qui est arbitrairement petit si N est grand. Il ne reste plus qu'à remarquer qu'un intervalle I de longueur $\leqq 2^{-p}$ contenu dans $[0,m]$ empiète sur deux intervalles I_j, I_{j+1} au plus ; si $\delta_I > 4c$, on a donc $\delta_{I_j} > 2c$ ou $\delta_{I_{j+1}} > 2c$.

REMARQUE.- Revenons à l'énoncé du problème des martingales : nous nous intéresserons principalement dans la suite au cas où les coefficients a^{ij} et b^i sont <u>bornés</u>. Dans ce cas, si les processus (Z_t^y) sont des martingales locales, le théorème 2 et la remarque qui le suit nous montrent que le processus $M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b\circ X_s\, ds$ satisfait à une inégalité de la forme

$$P \{ \sup_{0\leqq r\leqq t} |M_r| \geqq c \} \leqq A\, e^{-Bc^2/t}$$

Il en résulte (th.3) que $e^{\lambda|M_t|} \in L^1$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et on a le même résultat pour X_t , puisque b est borné. Il en résulte alors à nouveau que les processus (Z_t^λ) sont non seulement des martingales locales, mais de vraies martingales.

APPENDICE 1. UN COMPLÉMENT AU LEMME 1

Revenons aux hypothèses du lemme 1 : nous avons supposé que (M_t) et (A_t) étaient deux processus continus, le second croissant, tels que $Z_t^\lambda = \exp [\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t]$ soit une martingale locale pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Ici nous allons supposer seulement la <u>continuité à droite</u> de (M_t), et en déduire que (M_t) est <u>continue</u> . Cela revient à affaiblir les hypothèses du lemme 1 ; cela montre aussi que l'existence des martingales locales (Z_t^λ) est un trait propre au cas continu.

Supposons d'abord que le processus croissant (A_t) satisfasse à une condition de Lipschitz comme plus haut. La démonstration du théorème 2 n'a utilisé ni la continuité de M, ni même celle de A, mais seulement l'hypothèse suivant laquelle les (Z_t^λ) sont des martingales locales. La majoration de STROOCK-VARADHAN reste donc valable ici. Le théorème 4 repose uniquement sur cette majoration, et montre que M est continue.

Ensuite, supposons que le processus croissant continu (A_t) satisfasse aux conditions suivantes : les trajectoires $A_\bullet(\omega)$ sont p.s. strictement croissantes, et $A_\infty = \infty$ p.s.. Introduisons alors le changement de temps (τ_t) associé à (A_t) , et posons $N_t = M_{\tau_t}$, $B_t = t$; comme (B_t) satisfait à une condition de Lipschitz, et les processus $(Z_{\tau_t}^\lambda)$ sont des martingales locales, (N_t) est continue d'après ce qui précède, et en inversant le changement de temps on voit que (M_t) est continue.

Passons enfin au cas général : nous adjoignons à l'espace Ω un mouvement brownien (W_t) indépendant du processus (M_t) , tel que $W_0=0$. Nous posons $N_t = M_t + \varepsilon W_t$, $B_t = A_t + \varepsilon^2 t$. On vérifie alors aussitôt que le processus $\exp[\lambda N_t + \frac{1}{2}\lambda^2 B_t]$, produit de deux martingales locales indépendantes dont l'une est continue, est une martingale locale . D'autre part (B_t) est strictement croissant et $B_\infty = \infty$. Il en résulte que (N_t) est un processus continu ; en faisant tendre ε vers 0, il vient que (M_t) est continu [on peut d'ailleurs se passer d'employer un ε tendant vers 0, mais c'est peut être plus clair ainsi].

APPENDICE 2. UNE MAJORATION DES " RESOLVANTES"

Nous donnons dans cet appendice un résultat auxiliaire, qui ne nous servira probablement pas dans la suite. Il repose sur la méthode des changements de temps, qui permet de ramener les martingales continues <u>réelles</u> (mais non à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) à des mouvements browniens.

PROPOSITION .- <u>Soit</u> (M_t) <u>une martingale locale réelle</u>(*) <u>telle que</u> $M_0=0$, <u>dont le processus croissant associé</u> (A_t) <u>satisfait à</u>

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{k}|t-s| \leqq |A_t - A_s| \leqq k|t-s| \qquad (k \geqq 1)$$

(*) La condition (1) entraîne que (M_t) est une martingale de carré intégrable

<u>Introduisons la mesure</u> μ_λ <u>suivante sur</u> $\mathbb{R}$:

$$\mu_\lambda(f) = E[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f\circ M_t \, dt] \qquad (\text{ f borélienne positive})$$

<u>Alors</u> μ_λ <u>admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur</u> $\mathbb{R}$, <u>au plus égale à</u> $k.\exp(-|x|\sqrt{2k\lambda}) / \sqrt{2k\lambda}$)

DEMONSTRATION.- Rappelons que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\lambda t} e^{-x^2/2t} dt = \frac{e^{-|x|\sqrt{2\lambda}}}{\sqrt{2\lambda}}$$

est l'expression de la densité de la " mesure résolvante" v_λ du mouvement brownien issu de 0. Introduisons le changement de temps T_t associé à A_t :

$$T_t(\omega) = \inf \{ s : A_s(\omega)>t \}$$

et posons $B_t = M_{T_t}$. D'après la condition (1), $T_.(\omega)$ est une fonction continue et strictement croissante qui varie de 0 à $+\infty$; (B_t) est une martingale locale continue associée au processus croissant $A_{T_t} = t$, donc c'est un mouvement brownien issu de 0. Nous avons

$$\mu_\lambda(f) = E[\int_0^\infty e^{-\lambda T_t} f\circ M_{T_t} \, dT_t]$$

Or $T_t \geqq kt$, $dT_t/dt \leqq k$; cette intégrale est donc majorée par

$$E[\int_0^\infty e^{-k\lambda t} f\circ B_t \, kdt] = kv_{k\lambda}(f)$$

d'où l'énoncé.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

DIFFUSIONS A COEFFICIENTS CONTINUS : RESULTATS D'EXISTENCE

d'après un exposé de C. DELLACHERIE

Dans toute la première partie de l'exposé, nous nous limiterons au cas où les coefficients b_i sont nuls (nous rattraperons le cas général par la suite). Nous conserverons les notations de l'exposé précédent, en y ajoutant la notation " des physiciens" $\langle x|a|y\rangle$ pour le produit scalaire $< x,a.y >$, où a est une matrice symétrique.

§ 1 . POSITION DU PROBLEME . PRELIMINAIRES TOPOLOGIQUES

Nous désignons par $\underline{\underline{S}}$ l'ensemble des matrices symétriques positives (*) (d,d) sur $\mathbb{R}$; $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ})$ désignant l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $x \mapsto a(x)$ une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\underline{\underline{S}}$,continue et bornée, nous cherchons à prouver l'existence , pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, d'au moins une loi $P\in\prod_x$, c'est à dire d'une loi P telle que

1) $P\{X_0=x\} = 1$

2) Pour tout $y\in\mathbb{R}^d$, le processus réel $\langle y,X_t\rangle_t$ est une martingale locale dont le processus croissant associé est $\int_0^t < y|a\circ X_s|y> ds$ (cf. des formes équivalentes dans l'exposé 1).

Nous utiliserons pour cela une méthode de <u>convergence étroite</u> sur Ω : nous construirons des solutions de problèmes voisins, qui convergeront vers une solution de notre problème. Pour cela, il convient de mettre des topologies sur Ω et $\underline{\underline{M}}(\Omega)$; c'est de cela qu'on va s'occuper maintenant.

Nous munirons Ω de la topologie de la <u>convergence uniforme sur les intervalles compacts de</u> $\mathbb{R}_+$. Si pour tout $t > 0$, nous désignons par Ω_t l'ensemble des applications continues de $[0,t]$ dans $\mathbb{R}^d$, muni de la distance de la convergence uniforme, il est bien connu que Ω_t est un espace métrique séparable et complet . La topologie de Ω peut être considérée comme la limite projective des topologies des Ω_n (n entier), et Ω

(*) Les matrices de $\underline{\underline{S}}$ peuvent être dégénérées : les conditions d'ellipticité n'interviendront que dans l'exposé III (unicité).

est donc un espace polonais - il est d'ailleurs facile d'expliciter une distance définissant la topologie de Ω, pour laquelle Ω est séparable et complet. On vérifie facilement que $\underline{\underline{F}}^{\circ}$ est la tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(\Omega)$. Nous avons le critère de compacité suivant dans Ω , qui est une forme du théorème d'ASCOLI :

THEOREME 1.- Soit L une partie de Ω ; L est relativement compacte si (et seulement si), pour tout entier n

1) Il existe un compact K_n de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $\omega \in L$, la fonction $X_{\bullet}(\omega)$ applique $[0,n]$ dans K_n.

2) Les applications $X_{\bullet}(\omega)$, pour $\omega \in L$, sont équicontinues sur $[0,n]$.

En fait, nous nous occuperons d'ensembles L tels que $X_0(\omega)=x$ pour tout $\omega \in L$; dans ce cas, la condition 2) entraîne 1) . D'autre part, il suffit évidemment de vérifier l'équicontinuité pour chaque composante $X^i_{\bullet}$ de la trajectoire ($i=1,2\ldots d$).

Nous munirons l'ensemble $\underline{\underline{P}}(\Omega)$ des lois de probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^{\circ})$ de la topologie de la convergence étroite (topologie de la convergence simple sur les fonctions continues et bornées sur Ω). Muni de cette topologie, $\underline{\underline{P}}(\Omega)$ est un espace polonais (en particulier, cette topologie est métrisable).

Le théorème suivant , appelé critère de PROKHOROV , caractérise les parties relativement compactes de $\underline{\underline{P}}(\Omega)$:

THEOREME 2.- Soit M une partie de $\underline{\underline{P}}(\Omega)$; M est relativement compacte si (et seulement si)

pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact K_{ε} de Ω tel que pour tout $\mu \in M$ on ait $\mu(\Omega \setminus K_{\varepsilon}) < \varepsilon$.

Le résultat suivant résulte immédiatement du critère de PROKHOROV

THEOREME 3.- Soit (P_n) une suite de lois de probabilité convergeant étroitement vers une loi P, et soit (F_n) une suite uniformément bornée de fonctions continues sur Ω, convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction (continue) F. Alors $\int F_n dP_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int FdP$.

Le théorème 2 va tout de suite nous donner un résultat de compacité étroite, qui sera la clef de la démonstration d'existence .

THEOREME 4.- Soit ℓ une constante >0, et soit H_ℓ l'ensemble des lois de probabilité P sur Ω possédant les propriétés suivantes :

1) $P\{X_0=x\} = 1$.
2) Le processus (X_t) sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,P)$ est une martingale de carré intégrable .
3) Pour tout $y\in\mathbb{R}^d$ tel que $\|y\|=1$, le processus croissant (A^y_t) associé à la martingale réelle $<y,X_t>$ est lipschitzien de rapport ℓ :

$$| A^y_t - A^y_s | \leqq \ell | t-s | .$$

Alors H_ℓ est étroitement compact dans $\underline{\underline{P}}(\Omega)$.

DEMONSTRATION.- Nous avons construit au théorème 4 de l'exposé I un ensemble L^i_N tel que $P(L^i_N)> 1-\varepsilon$ pour N assez grand, quelle que soit la loi $P\in H_\ell$, et tel que les applications $X^i_\cdot(\omega)$, où ω parcourt L^i_N , soient équicontinues sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. En prenant $L = \bigcap_1^d L^i_N$ pour N assez grand, nous obtenons un compact qui porte à ε près toutes les lois $P\in H_\ell$. La condition de PROKHOROV est donc satisfaite, H_ℓ est donc relativement compact, et il reste à vérifier que H_ℓ est fermé.

Soit donc $(\overset{n}{P})_{n\in N}$ une suite d'éléments de H_ℓ qui converge vers $P\in\underline{\underline{P}}$. Le processus (X_t) est une martingale pour chaque loi $\overset{n}{P}$, de carré intégrable. La propriété de martingale peut s'énoncer en disant que pour tout couple (s,t) avec s<t , toute fonction continue bornée $\underline{\underline{F}}^\circ_s$ - mesurable ϕ, on a $\int_\Omega \phi <y,X_t> d\overset{n}{P} = \int_\Omega \phi < y,X_s> d\overset{n}{P}$. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer le passage à la limite en n, en s'appuyant sur le fait que $\overset{n}{E}[\exp (|X_r|)]$ est borné en n pour tout r (exposé I, th.3), ce qui permet de justifier tous les passages à la limites sur des polynômes en les X_u . Il est clair que $P\{X_0=x\} = 1$.

Ensuite, supposons que ϕ soit $\underline{\underline{F}}^\circ_s$ - mesurable, continue, positive, bornée par 1. Nous avons , en posant $<y,X_t> = X^y_t$

$$\overset{n}{E}[\phi.(X^y_t-X^y_s)^2] = \overset{n}{E}[\phi.(\overset{n}{A}{}^y_t-\overset{n}{A}{}^y_s)] \leqq \ell(t-s).$$

en passant à la limite en n, ce qui est légitime comme ci-dessus, car $(X^y_t-X^y_s)^2$ est un polynôme, il vient que $E[(X^y_t-X^y_s)^2|\underline{\underline{F}}^\circ_s] \leqq \ell(t-s)$. D'autre part, $A^y_t-A^y_s$ est limite en probabilité(*) de sommes de la forme $\sum E[(X^y_{t_{i+1}}-X^y_{t_i})^2|\underline{\underline{F}}^\circ_{t_i}]$ pour des subdivisions fines de [s,t] . Il en résulte aussitôt que le processus (A^y_t) associé à (X^y_t) est lipschitzien de rapport ℓ.

(*) Voir par ex. Intégrales Stochastiques I, p.92 (Lecture Notes vol.39).

§ 2 . LE THEOREME D'EXISTENCE

Nous allons commencer par traiter le cas où a est une matrice constante. Voici d'abord un lemme :

LEMME 1.- Soit r une matrice (d,d), et soit (W_t) un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, issu de 0. Posons $Y_t=r(W_t)$. Le processus Y_t est alors une martingale, et le processus croissant associé à la martingale réelle $\langle y,Y_t\rangle$ est égal à $\langle y|a|y\rangle t$, où $a=rr^*$.

DEMONSTRATION.- Immédiate, en s'appuyant sur le fait que le processus croissant essocié à la martingale $\langle y,W_t\rangle$ est $|y|^2t$.

LEMME 2.- Il existe une application mesurable $(a,x)\mapsto \pi_{a,x}$ de $\underline{\underline{S}}\times\mathbb{R}^d$ dans $\underline{\underline{P}}(\Omega)$ (muni de la topologie étroite, et de la tribu borélienne associée) possédant les propriétés suivantes pour tout (a,x) :

1) $\pi_{a,x}\{X_0=x\} = 1$

2) Pour cette loi, le processus (X_t) est une martingale locale, et le processus croissant associé à la martingale réelle $\langle y,X_t\rangle$ est égal à $\langle y|a|y\rangle t$.

DEMONSTRATION.- Nous construisons $\pi_{a,x}$ de la manière suivante : nous prenons le mouvement brownien du lemme 1, (W_t), défini sur un espace probabilisé fixe W ; nous désignons par r la racine carrée positive de a (l'application $a\mapsto r$ est continue), et par $\pi_{a,x}$ la loi image de la loi du mouvement brownien par l'application de W dans Ω

$$w \longmapsto (\ t\longmapsto x+ r(W_t(w)))$$

Cette loi satisfait évidemment à 1 et 2, d'après le lemme 1. D'autre part, si f est une fonction continue sur Ω de la forme $f_1\circ X_{t_1}\dots f_k\circ X_{t_k}$, où $f_1,\dots,f_k$ sont continues bornées sur $\mathbb{R}^d$, l'application $(a,x) \mapsto \int f(\omega)d\pi_{a,x}(\omega)$ est évidemment continue ; cela suffit à entraîner la mesurabilité de cette application pour f borélienne ≥ 0, par un argument de classes monotones [on peut montrer en fait que l'application $(a,x)\mapsto \pi_{a,x}$ est continue pour la topologie étroite, grâce aux résultats de compacité obtenus plus haut, mais cela ne nous sera pas nécessaire].

Le lemme suivant nous permet maintenant de construire des solutions approchées de notre problème .

LEMME 3.- Soit (a_t) un processus sur Ω à valeurs dans $\underline{\underline{S}}$, adapté, uniformément borné, vérifiant les conditions suivantes :

1) $a_0(.)= a \circ X_0$, où a est une application mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $\underline{\underline{S}}$ (*).

2) Le processus est étagé : il existe un entier m tel que $a_t(\omega) = a_{k/m}(\omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[$.

Alors quel que soit $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une loi P sur Ω satisfaisant aux conditions suivantes : $P\{X_0=x\}=1$; pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, le processus $\langle y, X_t\rangle$ est une martingale de carré intégrable, dont le processus croissant associé vaut $\int_0^t \langle y|a_s|y\rangle\, ds$.

DEMONSTRATION.- On se ramène aussitôt au cas où $m=1$. Nous définissons par récurrence des mesures P_n sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o_n)$ de la manière suivante

1) Pour $n=1$, P_1 est la restriction de π_a

2) Supposons P_n définie, et construisons d'abord une loi Q sur $(\Omega\times\Omega,\ \underline{\underline{F}}^o_n\times\underline{\underline{F}}^o_1)$ comme suit : si $f(\omega,\omega')$ est positive mesurable sur cet espace,

$$E_Q[f] = \int_\Omega P_n(d\omega)\int_\Omega f(\omega,\omega')\pi_{a_n(\omega),X_n(\omega)}(d\omega')$$

Soit W le sous-ensemble (mesurable) de $\Omega\times\Omega$ formé des (ω,ω') tels que $X_n(\omega)=X_0(\omega')$, et soit ϕ l'application de W dans Ω définie par

$$\begin{aligned} X_t(\phi(\omega,\omega')) &= X_t(\omega) \text{ si } t \leqq n \\ &= X_{t-n}(\omega') \text{ si } t \geqq n \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt que la loi Q est portée par W, et que ϕ est mesurable lorsque Ω est muni de $\underline{\underline{F}}^o_{n+1}$. Nous désignons alors par P_{n+1} la loi image $\phi(Q)$ sur $(\Omega,\ \underline{\underline{F}}^o_{n+1})$. Il résulte aussitôt de cette construction que si f est $\underline{\underline{F}}^o_1$-mesurable positive , on a pour la loi P_n

(1) $$E[f\circ\theta_n|\underline{\underline{F}}^o_n] = \pi_{a_n(\omega),X_n(\omega)}(f)$$

En prenant par exemple $f(\omega) = \exp(|X_t(\omega)-X_0(\omega)|)$, $0<t\leqq 1$, cette relation permet de montrer par récurrence que les X_t possèdent les propriétés d'intégrabilité désirables : en effet d'après le th.3 de l'exposé 1 le second membre de (1) est une variable aléatoire bornée.

Les lois P_n sur les tribus $\underline{\underline{F}}^o_n$ s'induisent bien, et il résulte alors d'un argument simple de limites projectives qu'il existe une loi P et une seule sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^o)$ qui induit P_n sur chaque tribu $\underline{\underline{F}}^o_n$. Nous laisserons au lecteur la patiente justification de l'énoncé.

(*) Cela exprime simplement le fait que a_0 est $\underline{\underline{F}}^o_0$-mesurable !

Nous pouvons maintenant prouver le théorème d'existence de STROOCK-VARADHAN (pour le cas où les coefficients b^i sont nuls).

THEOREME 5.- <u>Supposons que</u> $y \mapsto a(y)$ <u>soit une application continue et bornée de</u> $\mathbb{R}^d$ <u>dans</u> $\underline{\underline{S}}$. <u>Soit</u> $x \in \mathbb{R}^d$. <u>Il existe au moins une mesure</u> P <u>sur</u> Ω <u>possédant les propriétés</u> :

1) $P\{X_0=x\}=1$

2) <u>Pour tout</u> $y \in \mathbb{R}^d$, <u>le processus réel</u> $\langle y, X_t\rangle$ <u>est une martingale de carré intégrable, dont le processus croissant associé est égal à</u> $\int_0^t \langle y | a \circ X_s | y\rangle \, ds$.

DEMONSTRATION.- Pour tout entier m, nous définissons un processus adapté et étagé en posant

$$\overset{m}{a}_t = a \circ X_{\frac{k}{m}} \qquad \text{pour } t \in [\, \frac{k}{m} \, , \, \frac{k+1}{m} \, [$$

Il est clair que $\overset{m}{a}$ vérifie les conditions du lemme 3. Nous pouvons donc lui associer une loi de probabilité $\overset{m}{P}$. Nous savons d'après le théorème 4 que les lois $\overset{m}{P}$ forment un ensemble relativement compact pour la topologie étroite ; quitte à extraire une suite, nous pouvons donc supposer que les lois $\overset{m}{P}$ convergent étroitement vers une loi P. D'après le théorème 4 toujours, nous savons que pour la loi P les processus $\langle y, X_t\rangle$ sont des martingales de carré intégrable, et il reste à calculer leur processus croissant associé.

Tout revient à montrer que si s<t, et si ϕ est $\underline{\underline{F}}^o_s$-mesurable , continue et bornée sur Ω, la relation (où l'on pose $X^y_t = \langle y, X_t \rangle$)

$$\overset{m}{E}[\, \phi.(X^y_t - X^y_s)^2] = \overset{m}{E}[\, \phi. \int_0^t \langle y | \overset{m}{a}_s | y\rangle ds \,]$$

passe à la limite pour nous donner

$$E[\phi.(X^y_t - X^y_s)^2] = E[\, \phi. \int_0^t \langle y | a \circ X_s | y\rangle \, ds \,]$$

Il n'y a aucun problème pour le premier membre : les fonctions sous le signe E[ ] sont continues, non bornées, mais le passage à la limite étroite est néanmoins justifié par les majorations exponentielles de l'exposé 1. Le passage à la limite au second membre est justifié par le théorème 3 : les " sommes de Riemann" $\int_0^t \langle y | \overset{m}{a}_s | y\rangle$ ds sont en effet des fonctions continues de ω, qui convergent uniformément vers l'intégrale $\int_0^t \langle y | a \circ X_s | y\rangle$ ds sur toute partie équicontinue de Ω . Le théorème est donc établi.

ESQUISSE D'UNE AUTRE MÉTHODE

La méthode classique des équations intégrales stochastiques d'ITO permet de construire (très facilement) des solutions du problème lorsque les coeffcients a^{ij} satisfont à une condition de Lipschitz globale sur $\mathbb{R}^d$. Or toute fonction continue et bornée peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions lipschitziennes. Nous sommes donc amenés à nous poser le problème suivant :

Pour tout n, soit $\overset{n}{a}$ une application borélienne bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\underline{\underline{S}}$; supposons que pour tout n il existe une loi $\overset{n}{P}$, solution du problème des martingales pour la fonction $\overset{n}{a}$ et la valeur initiale x. Supposons aussi que les fonctions $\overset{n}{a}$ convergent simplement vers une fonction a, en restant bornées, et que les lois $\overset{n}{P}$ convergent étroitement vers une loi P. Peut on affirmer que P est une solution du problème des martingales pour la fonction a et la valeur initiale x ?

Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; pour tout n , le processus $f\circ X_t - \frac{1}{2}\sum \int_0^t (\overset{n}{a}{}^{ij} D_i D_j f)\circ X_s \, ds$ est une martingale (pour la loi $\overset{n}{P}$). Autrement dit, si $s<t$, et si ϕ est une fonction continue bornée $\underline{\underline{F}}_s^o$-mesurable sur Ω, on a

$$(1) \qquad \overset{n}{E}[\phi.(f\circ X_t - f\circ X_s)] = \overset{n}{E}[\ \phi.\ \frac{1}{2}\int_0^t (\overset{n}{a}{}^{ij} D_i D_j f)\circ X_s \, ds\ ]$$

Comme les deux membres sont des fonctions de t continues et bornées , on obtient une forme équivalente à (1) en prenant les transformées de Laplace. Désignons par $\overset{n}{\nu}$ et $\overset{n}{\mu}_\lambda$ les mesures sur $\mathbb{R}^d$ définies par

$$< \overset{n}{\nu},g > = \overset{n}{E}[\phi.g\circ X_s] \ , \ < \overset{n}{\mu}_\lambda,g > = \overset{n}{E}[\phi.\int_0^\infty e^{-\lambda u} g\circ X_{s+u} du]$$

alors (1) est équivalente à (2) :

$$(2) \qquad < \overset{n}{\mu}_\lambda,f > = < \overset{n}{\nu},f > + < \overset{n}{\mu}_\lambda,\frac{1}{2}\sum \overset{n}{a}{}^{ij} D_i D_j f >$$

Nous sommes donc ramenés à examiner si la relation (2) passe à la limite pour nous donner la relation analogue, où les $\overset{n}{a}{}^{ij}$ sont remplacés par les a^{ij}, où $\overset{n}{\mu}_\lambda$, $\overset{n}{\nu}$ sont remplacées par μ_λ, ν construites de même à partir de P. Or on vérifie aussitôt que $\overset{n}{\mu}_\lambda$ converge étroitement vers μ_λ, $\overset{n}{\nu}$ vers ν ; comme $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, le seul terme qui fasse difficulté est le dernier. Comme les fonctions D_iD_jf sont continues à support compact, on peut affirmer que $< \overset{n}{\mu}_\lambda \ , \frac{1}{2}\sum \overset{n}{a}{}^{ij} D_i D_j f > \rightarrow < \mu_\lambda,\frac{1}{2}\sum a^{ij} D_i D_j f >$ (et donc répondre affirmativement au problème posé ci-dessus) dans chacun des deux cas suivants :

1) Les fonctions $\overset{n}{a}{}^{ij}$ sont continues, et convergent uniformément vers a^{ij} sur tout compact - on retrouve ainsi le théorème 5.

2) Les mesures $\overset{n}{\mu}_\lambda$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et leurs densités $\overset{n}{m}_\lambda$ forment un ensemble borné dans L^p_{loc} pour un $p>1$. Alors l'inégalité de Hölder permet de majorer $< \overset{n}{\mu}_\lambda , (\overset{n}{a}{}^{ij}-a^{ij})D_iD_jf >$; d'autre part, les $\overset{n}{\mu}_\lambda$ convergent vers μ_λ dans la topologie faible de L^1_{loc} , et $< \overset{n}{\mu}_\lambda - \mu_\lambda, a^{ij}D_iD_jf >$ tend donc vers 0. Nous verrons plus tard un exemple de cette situation. Noter qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas que les $\overset{n}{a}{}^{ij}$ convergent partout vers a^{ij}.

§ 3 . LE RÔLE DES TERMES DU PREMIER ORDRE

Dans ce paragraphe (qui suit de très près l'article de STROOCK-VARADHAN) nous supposons que <u>la matrice</u> a(x) <u>est inversible pour tout x</u> ; comme a est une fonction continue, la fonction $\bar{a}^1$ est continue et bornée sur tout compact. Nous supposerons que le vecteur b des termes du premier ordre est une fonction mesurable bornée.

THEOREME 6.- <u>Soit</u> P <u>une loi sur</u> Ω, <u>solution du problème des martingales pour la valeur initiale</u> x, <u>la matrice</u> a(.), <u>avec un vecteur des termes du premier ordre égal à</u> 0. <u>Posons</u>

$$M_t = \int_0^t < b\circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s | dX_s >$$ (intégrale stochastique matricielle, calculée pour la loi P)

$$A_t = \int_0^t <b\circ X_s|\bar{a}^1\circ X_s|b\circ X_s> ds$$

$$Z_t = \exp [M_t - \tfrac{1}{2}A_t]$$

<u>Il existe alors une loi</u> Q <u>sur</u> Ω, <u>qui induit sur toute tribu</u> $\underline{\underline{F}}^o_t$ $(t<\infty)$ <u>la loi</u> $Z_t.P$ (*). <u>Cette loi est une solution du problème des martingales pour la valeur initiale</u> x, <u>la matrice</u> a(.), <u>le vecteur des termes du premier ordre</u> b(.).

DEMONSTRATION.- Nous allons commencer par traiter le cas où <u>b est nulle hors d'un compact</u>. Dans ce cas la fonction vectorielle ${}^tb.\bar{a}^1$ est bornée (${}^tb$ est la matrice ligne transposée de b), et (M_t) est une martingale réelle de carré intégrable. Un calcul facile, mais fatigant à taper à la machine, montre que $(A_t) = (<M,M>_t)$, le processus croissant associé à la martingale (M_t) . Ce processus croissant satisfaisant à une condition de Lipschitz, le théorème 3 de l'exposé I entraîne que (Z_t) est une vraie martingale positive, d'espérance 1.

(*) Produit de la loi P par la fonction Z_t.

La mesure $Z_t.P$ sur $\underline{\underline{F}}^o_t$ est donc une loi de probabilité Q_t ; la propriété de martingale montre que ces lois s'induisent bien. et un argument simple de limites projectives entraîne l'existence d'une loi Q sur Ω induisant Q_t sur $\underline{\underline{F}}^o_t$ pour tout t.

Posons maintenant $N_t = \langle y, X_t \rangle$, de sorte que $\langle N,N \rangle_t = \int_0^t \langle y | a\circ X_s | y \rangle ds$, et posons $Z'_t = \exp [N_t - \frac{1}{2}\langle N,N \rangle_t]$. Un calcul simple nous donne

$$\langle M,N \rangle_t = \int_0^t \langle y, b\circ X_s \rangle ds$$

Ecrivons alors que le processus $\exp[(M_t+N_t) - \frac{1}{2}\langle M+N,M+N \rangle_t]$ est une martingale : il vient que le processus

$$Z_t.Z'_t.\exp[-\langle M,N \rangle_t] = Z_t.\exp[\langle y, X_t - \int_0^t b\circ X_s ds \rangle - \frac{1}{2}\int_0^t \langle y | a\circ X_s | y \rangle ds]$$

est une martingale pour la loi P. Cela signifie que le processus

$$(*) \quad \exp[\langle y, X_t - \int_0^t b\circ X_s \, ds \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle y | a\circ X_s | y \rangle \, dy]$$

est une martingale pour la loi Q, autrement dit, Q est une solution du problème des martingales, avec b comme vecteur des termes du premier ordre. Cela, lorsque b est à support compact. Nous allons étendre maintenant ce résultat au cas général.

Désignons par B_n la boule fermée de centre x et de rayon n, par T_n le temps de rencontre de B_n^c, par b_n la fonction $b.I_{B_n}$; nous construisons les processus $\overset{n}{M}_t$, $\overset{n}{A}_t$, $\overset{n}{Z}_t$ comme ci-dessus, relativement aux fonctions b_n.

On vérifie d'abord que les processus $\overset{n}{M}_t$, $\overset{n}{A}_t$ s'induisent bien par arrêt à l'instant T_n ; on peut donc définir des processus M_t, A_t, Z_t, car $T_n \to +\infty$ avec n. Le processus (Z_t) est une martingale locale $\geqq 0$ d'espérance $\leqq 1$ (lemme de Fatou), donc une surmartingale $\geqq 0$. Nous allons vérifier que c'est une vraie martingale, ce qui entraînera comme ci-dessus l'existence d'une loi Q induisant $Z_t.P$ sur $\underline{\underline{F}}^o_t$. A partir de là le reste de la démonstration est immédiat : le processus (*) arrêté à T_n est une martingale, donc (*) est une martingale locale, et on conclut par les équivalences de l'exposé I.

Il nous suffit de vérifier que les variables aléatoires $\overset{n}{Z}_t$ sont uniformément intégrables. Or nous avons

$$\int_{\{T_n \leqq t\}} \overset{n}{Z}_t \, dP = \overset{n}{Q}\{ \sup_{s \leqq t} |X_s| > n \} \leqq \overset{n}{Q}\{ \sup_{s \leqq t} |X_s - \int_0^s b \circ X_u du| \geqq n - \beta t \}$$

où β est une constante majorant $|b|$. Pour n assez grand, on a $n-\beta t > n/2$; le processus $X_s - \int_0^s b \circ X_u du$ étant une martingale pour la loi $\overset{n}{Q}$, dont le "processus croissant" associé est lipschitzien, les majorations de l'exposé 1 nous donnent pour le dernier événement une probabilité (pour la loi $\overset{n}{Q}$) au plus égale à

$$2de^{-(n-\beta t)^2/2kd^2} \quad \text{(exposé 1, remarque suivant le th.2 ; } k = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, \|y\|=1} \langle y|a(x)|y\rangle \text{)}$$

Le premier membre est donc petit dès que n est assez grand, et il est a fortiori possible de choisir m assez grand pour que $n \geqq m$ entraîne

$$\int_{\{T_m \leqq t\}} \overset{n}{Z}_t \, dP < \varepsilon$$

Il nous suffit donc de montrer que les variables aléatoires $\overset{n}{Z}_t I_{\{T_m > t\}}$ sont uniformément intégrables, ou encore mieux que les $\overset{n}{Z}_{t \wedge T_m}$ le sont . Mais les processus croissants $\overset{n}{A}_{s \wedge T_m}$ associés aux martingales $\overset{n}{M}_{s \wedge T_m}$ satisfont à une condition de Lipschitz, puisque b et a^{-1} sont bornés sur B_m . On a donc des majorations du type $E[\exp[\lambda|\overset{n}{M}_{t \wedge T_m}|]] \leqq c_\lambda < \infty$ indépendamment de n , pour tout $\lambda > 0$; $\overset{n}{Z}_{t \wedge T_m}$ appartient donc à tout L^λ , avec une borne uniforme en n pour la norme $\| \ \|_\lambda$. Le théorème est établi.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

DIFFUSIONS À COEFFICIENTS CONTINUS : RÉSULTATS D'UNICITÉ

d'après un exposé de M. Giorgio LETTA

Cet exposé contient le résultat essentiel d'unicité de STROOCK-VARADHAN . C'est un résultat de caractère global, donné sous une condition d'ellipticité très forte et extrêmement peu maniable - il se double d'ailleurs d'un résultat d'existence suivant la ligne de la fin de l'exposé II, sous la même condition. Nous " localiserons" le résultat dans l'exposé IV.

§ 1 . QUELQUES LEMMES PRÉLIMINAIRES

RÉSULTATS ANALYTIQUES

Nous désignons par (B_t) un mouvement brownien issu de 0 dans $\mathbb{R}^d$, par (V_λ) la résolvante correspondante :

$$V_\lambda(x,f) = E[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+B_t)\, dt] \qquad (f \text{ borélienne } \geq 0)$$

par v_λ la mesure $V_\lambda(0,dy)$, de sorte que $V_\lambda(x,f)= \int f(x+y)v_\lambda(dy)$. Le premier résultat dont nous aurons besoin est d'ordre purement analytique :

LEMME 1.- <u>Pour tout</u> i <u>et tout</u> j, <u>l'application</u> $f \mapsto D_i D_j V_\lambda f$ <u>de</u> $\underline{\underline{C}}_c^\infty$ <u>dans</u> $\underline{\underline{C}}^\infty$ <u>est continue pour la norme</u> $\| \ \|_p$, $1<p<\infty$:

$$(1) \qquad \|D_i D_j V_\lambda f\|_p \leq A(\lambda,p) \|f\|_p$$

Nous ne démontrerons pas ce lemme ; si $d\geq 3$, $\lambda=0$, $V_\lambda f$ est le potentiel newtonien de f, et (1) est un résultat célèbre sur les intégrales singulières (inégalité de CALDERON-ZYGMUND). Le cas $\lambda>0$ est un résultat sur les " potentiels besséliens" qui se ramène à la théorie des intégrales singulières : soit p_t la mesure gaussienne

$$p_t(f)= E[f\circ B_t] \qquad (f \text{ borélienne positive })$$

sa transformée de Fourier $\hat{p}_t(u)= \int e^{iux}p_t(dx)$ vaut $e^{-|u|^2 t/2}$, et donc la transformée de Fourier de v_λ vaut $(\lambda+ \frac{1}{2}|u|^2)^{-1}$. La transformée de Fourier de $D_i D_j V_\lambda f$ est donc égale au produit de $\hat{f}(u)$ par la fonction

$$\frac{-u_i u_j}{\lambda+\frac{1}{2}|u|^2} = -\frac{u_i}{|u|}\cdot\frac{u_j}{|u|}\cdot\frac{|u|^2}{\lambda+\frac{1}{2}|u|^2}$$

Or ces trois fonctions sont des " multiplicateurs de $\mathcal{F}L^p$ " pour tout $p>1$. Pour les deux premières, c'est la théorie des intégrales singulières qui permet de l'affirmer (opérateurs de Marcel RIESZ), quant à la troisième, on peut montrer qu'elle est transformée de Fourier d' une mesure bornée. Voir par ex. le lemme V.3.3 du merveilleux cours fait à Orsay en 1966-67 par Elias STEIN, qui contient aussi toutes les questions d'intégrales singulières (*).

Nous aurons besoin en fait d'en savoir un tout petit peu plus que le lemme 1 :

LEMME 1'.- Si I est un intervalle compact de $]0,\infty[$, on a $\sup_{\lambda\in I} A(\lambda,p)<\infty$.

Nous désignerons cette constante par $A_I(p)$.

STROOCK et VARADHAN, considérant des équations dont les coefficients dépendent du temps, ont besoin de majorations analogues pour la résolvante du processus de la chaleur, dues à B.F.JONES, et plus délicates.

Nous aurons besoin aussi du lemme suivant

LEMME 2.- Si $p>\frac{d}{2}$, et si q est l'exposant conjugué de p , la mesure v_λ admet une densité appartenant à L^q . En particulier, si $f\in L^p$, on a (inégalité de Hölder)

$$V_\lambda(|f|) \leqq \|v_\lambda\|_q \|f\|_p \qquad \text{(nous poserons } \|v_\lambda\|_q = B(\lambda,p)\text{)}$$

Le calcul est facile : posons $g_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} e^{-|x|^2/2t}$; on a $g_t(x)=t^{-d/2}g_1(t^{-1/2}x)$, donc $\|g_t\|_q = t^{-d/2}t^{d/2q}\|g_1\|_p$. Il est alors facile de montrer que $\|v_\lambda\|_q<\infty$ si $\frac{1}{q}<1-\frac{2}{d}$, par intégration .

Comme pour le lemme 1, nous aurons besoin de savoir que $\sup_{\lambda\in I}\|v_\lambda\|_q < \infty$. Nous désignerons cette constante par $B_I(p)$.

Dans ce qui suit, nous allons fixer $p>d/2$ (et $<+\infty$). Si μ est une mesure, nous poserons $\|\mu\|_q = \sup_{\substack{f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty\\ \|f\|_p\leqq 1}} |<\mu,f>|$. Cette quantité est finie si et seulement si μ est absolument continue, et admet une densité dans L^q, et alors $\|\mu\|_q$ est la norme-L^q de la densité.

(*) Publications du Département de Mathématiques d'Orsay.

UN LEMME SUR LES INTÉGRALES STOCHASTIQUES

Nous désignons par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ l'espace probabilisé (non nécessairement canonique) sur lequel est défini le mouvement brownien (B_t), adapté à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$. On désigne par $(m_s) = (m_s^{ij})$ un processus sur Ω à valeurs dans l'espace des matrices réelles (d,d), prévisible (il sera en général continu !), et on pose $b_s=m_s m_s^*$, de sorte que b_s est une matrice symétrique positive. On pose enfin $c_s = b_s - I$.

Sous les conditions d'intégrabilité usuelles, que nous supposerons satisfaites (en pratique le processus (m_s) sera borné), on peut définir un processus (Z_t) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ par intégrales stochastiques :

$$Z_t^i = Z_0^i + \sum_j \int_0^t m_s^{ij} dB_s^j$$

On définit la mesure positive bornée μ_λ sur $\mathbb{R}^d$ par (*)

$$< \mu_\lambda , f > = E[\int_0^\infty e^{-\lambda s} f \circ Z_s \, ds] \quad (f \text{ borélienne positive }).$$

LEMME 3.- Soit ν la loi de Z_0 , et soit $f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty$; on a

$$< \mu_\lambda , f > = < \nu , V_\lambda f > + \tfrac{1}{2} E[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \sum_{i,j} c_s^{ij} (D_i D_j V_\lambda f) \circ Z_s \, ds]$$

DEMONSTRATION. - Prenons $h \in \underline{\underline{C}}_b^\infty$ et appliquons la formule du changement de variables dans les intégrales stochastiques :

$$h \circ Z_t = h \circ Z_0 + \sum_i \int_0^t D^i h \circ Z_s \, dZ_s^i + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_i D_j h \circ Z_s \, b_s^{ij} ds$$

car $d<Z^i,Z^j>_s = \sum_{k,k'} m_s^{ik} m_s^{jk'} d<B^k,B^{k'}>_s$, et ce dernier crochet vaut $\delta^{kk'} ds$.

Multiplions par $\lambda e^{-\lambda t}$, intégrons de 0 à $+\infty$, prenons des espérances. La martingale du milieu disparaît, et il reste

$$< \mu_\lambda , \lambda h > = E[h \circ Z_0] + \tfrac{1}{2} E[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \sum_{i,j} \int_0^t D_i D_j h \circ Z_s \, b_s^{ij} \, ds]$$

$$= < \nu , h > + \tfrac{1}{2} E[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \sum_{i,j} \int_0^t b_s^{ij} D_i D_j h \circ Z_s \, ds]$$

Ecrivons d'autre part la définition de μ_λ :

$$< \mu_\lambda , \tfrac{1}{2} \sum_i D_i D_i h > = \tfrac{1}{2} E[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \sum_i D_i D_i h \circ Z_s \, ds]$$

Retranchons, il vient

(*) Le lecteur vérifiera que les lemmes 3 et 4 restent valables si l'on remplace $E[\int_0^\infty \cdots]$ par $E[\phi \int_0^\infty \cdots]$, où ϕ est $\mathcal{F}_0$- mesurable, comprise entre 0 et

$$< \mu_\lambda, \lambda h - \frac{1}{2}\Delta h > = < \nu, h > + \frac{1}{2} E[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \sum_{i,j} c_s^{ij} D_i D_j h \circ Z_s \, ds]$$

Il ne reste plus qu'à prendre $f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty$, et à poser $h = V_\lambda f$. On obtient le lemme en remarquant que $\lambda h - \frac{1}{2}\Delta h = f$.

Voici la suite du lemme 3 ; nous l'en avons séparée pour des raisons de clarté.

LEMME 4.- <u>Il existe un nombre</u> $\varepsilon > 0$ (<u>dépendant seulement de</u> $A_I(p)$) <u>et un nombre</u> $M < \infty$ (<u>dépendant seulement de</u> $A_I(p), B_I(p)$) <u>tels que la relation</u>

$$|c_s^{ij}| \leqq \varepsilon \text{ \underline{quels que soient} } s, i, j$$

<u>entraîne</u> $\| \mu_\lambda \|_q \leqq M$.

DEMONSTRATION.- Prenons l'identité précédente, avec $f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty$, $\|f\|_p \leqq 1$, et posons $g = \frac{1}{2}\sum_{i,j} D_i D_j V_\lambda f$; nous avons $\|g\|_p \leqq \frac{1}{2} d^2 A_I(p)$. D'autre part, $|< \nu, V_\lambda f >| \leqq B_I(p)$ (lemme 2) ; la relation $|c_s^{ij}| \leqq \varepsilon$ pour tout i, j, s entraîne donc

$$|< \mu_\lambda, f >| \leqq B_I(p) + \frac{\varepsilon}{2} d^2 A_I(p) \|\mu_\lambda\|_q$$

Le sup du premier membre en f est égal à $\| \mu_\lambda \|_q$. Nous aboutissons donc à la conclusion suivante :

si $\frac{\varepsilon}{2} d^2 A_I(p) < 1$ ou bien $\|\mu_\lambda\|_q \leqq M = \dfrac{B_I(p)}{1 - \frac{\varepsilon}{2} d^2 A_I(p)}$

ou bien $\|\mu_\lambda\|_q = +\infty$

Le reste de la démonstration va être consacré à éliminer la seconde possibilité.

a) Lorsque le processus (m_s) est constant (coefficients m_s^{ij} ne dépendant ni de s ni de ω) la mesure μ_λ est l'image de $\mathcal{W}_\lambda$ par une application linéaire fixe : μ_λ appartient donc à L^q (lemme 2).

b) Supposons ensuite que le processus (m_s) soit <u>étagé</u> : il existe des nombres $0 = a_0 < a_1 \ldots < a_n = \infty$ tels que sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}]$ m_s soit égal à une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_{a_i}$-mesurable, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors il est immédiat que $\mu_\lambda(Z)$ est majorée par une somme finie de mesures $\mu_\lambda(Z_k)$ correspondant à des processus constants, et donc que $\mu_\lambda(Z) \in L^q$.

c) Revenons au cas d'un processus (m_s) prévisible (borné par ex., cela suffira pour la suite) satisfaisant aux conditions $|b_s^{ij} - \delta^{ij}| \leqq \varepsilon$.

Choisissons un nombre $\varepsilon'>\varepsilon$, satisfaisant encore à la condition $\frac{\varepsilon'}{2}d^2A_I(p) < 1$, et définissons l'application ϕ suivante de l'ensemble des matrices (d,d) dans lui même

- si la matrice $m=(m^{ij})$ est telle que $|b^{ij}-\delta^{ij}|\leq\varepsilon'$ pour tout (i,j), où les b^{ij} sont les coefficients de $b = mm^*$, alors $\phi(m)=m$;
- dans le cas contraire, $\phi(m)$ est la matrice identité.

Approchons maintenant le processus (m_s) par des processus étagés $(\overset{n}{m}_s)$, au sens de la norme usuelle des intégrales stochastiques :

$$\text{pour tout } t,\ E[\int_0^t |m_s^{ij} - \overset{n}{m}{}_s^{ij}|^2\, ds\ ] \to 0$$

En remplaçant la suite par une suite extraite, nous pouvons réaliser la convergence p.s. de $\overset{n}{m}{}_s^{ij}$ vers m_s^{ij} pour la mesure $dP\otimes ds$. Comme on a $|b_s^{ij} - \delta^{ij}| \leq \varepsilon < \varepsilon'$, les processus étagés $\phi(\overset{n}{m}_s)$ convergent aussi vers m_s p.s., et il est facile de voir que la convergence en norme a encore lieu. Par conséquent, quitte à changer les notations, nous pouvons supposer que les $(\overset{n}{m}_s)$ sont tels que $|\overset{n}{m}{}_s^{ij} - \delta^{ij}|\leq\varepsilon'$ partout.

Si nous construisons par intégrales stochastiques les processus $(\overset{n}{Z}_s)$ comme plus haut, à partir de Z_0 et des $\overset{n}{m}_s$, nous aurons donc

$\|\overset{n}{\mu}_\lambda\|_q \leq \dfrac{B_I(p)}{1-\frac{\varepsilon'}{2}d^2A_I(p)}$; les $\overset{n}{Z}_s$ convergeant vers Z_s dans L^2, les mesures $\overset{n}{\mu}_\lambda$ convergent vaguement vers μ_λ ; la norme $\|\ \|_q$ étant une fonction semi-continue inférieurement pour la topologie vague, on a la même inégalité à la limite pour $\|\mu_\lambda\|_q$. Pour finir, on fait tendre ε' vers ε, et le lemme est établi.

§ 2 . UN RESULTAT D'UNICITE

Nous reprenons maintenant les hypothèses et notations des exposés précédents.

THEOREME 1.- <u>Il existe un nombre</u> $\varepsilon>0$ <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>si la fonction matricielle</u> a <u>satisfait à</u> $|a^{ij}(y)-\delta^{ij}|\leq\varepsilon$ <u>quels que soient</u> i,j,y, <u>le problème des martingales correspondant à la matrice</u> a , <u>au vecteur des termes du premier ordre égal à</u> 0, <u>à la donnée initiale</u> $x\in\mathbb{R}^d$ (quelconque) , <u>admet une solution au plus</u>(*).

(*) Nous verrons plus loin qu'il en admet effectivement une sous cette hypothèse, même si les coefficients ne sont pas continus.

DEMONSTRATION.- Nous choisirons ε assez petit pour que la condition du lemme 4 soit satisfaite, et en outre pour que la condition $|a^{ij}-\delta^{ij}|\leqq\varepsilon$ entraîne que $\bar{a}^1$ existe, et que ses coefficients soient bornés par une constante M. Nous noterons r(x) la racine carrée positive de a(x).

Désignons par P et P' deux solutions du problème des martingales, sous les conditions de l'énoncé. Considérons un $s\geqq 0$, et une fonction $\underline{\underline{F}}^o_s$-mesurable bornée $\phi\geqq 0$. Supposons que nous ayons pu montrer que pour toute $f\geqq 0$ borélienne sur $\mathbb{R}^d$

$$E[f\circ X_s .\ \phi\ ] = E'[f\circ X_s\ .\ \phi\ ]$$

où E et E' sont les espérances pour P et P' ; désignons cette valeur commune par $\nu(f)$. Quitte à multiplier ϕ par une constante, nous pouvons supposer que ν est une loi de probabilité. Introduisons les mesures

$$\mu_\lambda(f) = E[\phi .\int_0^\infty e^{-\lambda u} f\circ X_{s+u} du\ ] \qquad (\lambda\in I\ )\ (*)$$

et de même $\mu'_\lambda(f)$. Nous allons montrer d'abord que $\mu_\lambda=\mu'_\lambda$.

Pour $t\geqq 0$, posons (Ω étant muni de la loi P)

$$B^i_t = \sum_j \int_0^t \bar{r}^1{}^{ij}\circ X_{s+u}\ dX^j_{s+u} \quad \text{(processus adapté à la famille } (\underline{\underline{F}}_{s+t})_{t\geqq 0}\ )$$

Un calcul immédiat montre que $<B^i,B^j>_t = t\,\delta^{ij}$, de sorte que (B_t) est un mouvement brownien issu de 0, lié à (X_t) par la relation

$$X^i_{s+t} = X^i_s + \sum_j \int_0^t r^{ij}\circ X_{s+u}\ dB^j_{s+u}$$

Le lemme 3 nous donne alors le résultat suivant, si $f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c$

$$<\mu_\lambda, f> = <\nu, V_\lambda f> + <\mu_\lambda, K_\lambda f>\ (*)$$

où $K_\lambda(f) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (a^{ij}-\delta^{ij})D_iD_jV_\lambda f$. Ecrivons la même relation pour μ'_λ , retran-chons, il vient

$$<\mu_\lambda-\mu'_\lambda\ ,\ f> = <\mu_\lambda-\mu'_\lambda\ ,\ K_\lambda f>$$

prenons $\|f\|_p \leqq 1$; alors $\|K_\lambda f\|_p \leqq \frac{1}{2}\,\varepsilon d^2 A_I(p) < 1$ d'après le choix de ε, et le second membre est majoré par $c\|\mu_\lambda-\mu'_\lambda\|_q$, avec c<1. Au premier membre , passons au sup sur f, il vient $\|\mu_\lambda-\mu'_\lambda\|_q\leqq c\|\mu_\lambda-\mu'_\lambda\|_q$. Comme nous savons(*) (lemme 4) que ces normes sont finies, nous en déduisons qu'elles sont nulles, donc $\mu_\lambda=\mu'_\lambda$.

Passons maintenant à la démonstration d'unicité proprement dite.

(*) Noter que nous utilisons ici une généralisation facile des lemmes 3 et 4, plutôt que ces lemmes eux-mêmes.

Partons avec $s=0$, $\phi=1$. Nous obtenons que si $f\in\underline{\underline{C}}_c$, $\lambda\in I$

$$E[\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} f\circ X_u \, du\,] = E'[\int_0^{\infty} e^{-\lambda u} f\circ X_u \, du\,] \text{ pour tout } \lambda\in I$$

Comme I est un intervalle, l'unicité de la transformation de Laplace entraîne que $E[f\circ X_t]=E'[f\circ X_t]$ pour presque tout t, donc pour tout t.

Prenons ensuite $s\geq 0$ quelconque, $\phi=f_1\circ X_s$ (f_1 positive bornée). En raisonnant de la même manière, il vient

$$E[f_1\circ X_s . f\circ X_t\,] = E'[f_1\circ X_s . f\circ X_t\,] \quad (\, f\in\underline{\underline{C}}_c,\ t>s\,)$$

On prend ensuite $\phi=f_1\circ X_{t_1} . f_2\circ X_s$ $(t_1\leq s\,)$, il vient l'égalité pour des produits de trois fonctions, etc.... le théorème est démontré.

REMARQUES.-Il est possible d'éliminer la condition imposée à ε, relativement à l'existence de $\bar{a}^1$. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Il est plus intéressant de noter que si a est une fonction matricielle mesurable satisfaisant à $|a^{ij}-\delta^{ij}| \leq \varepsilon$, et si $\varepsilon'>\varepsilon$, un procédé d'approximation voisin de celui du lemme 4 permet de construire une suite $\overset{n}{a}$ de fonctions matricielles continues, telles que $|\overset{n}{a}{}^{ij}-\delta^{ij}|\leq\varepsilon'$, convergeant presque partout vers a. Comme le théorème d'existence a été prouvé dans le cas où les coefficients sont continus (exposé II), les remarques de la fin du § 2, exposé II permettent de conclure (vu les majorations des μ_λ dans L^q) que le problème des martingales admet effectivement une solution lorsque a satisfait à l'énoncé, avec le choix de ε indiqué au début de la démonstration. Il s'agit là d'un curieux résultat d'existence et d'unicité, dont le sens nous échappe.

EXTENSION AUX AUTRES DIFFUSIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS

Soit $\underline{\underline{S}}$ l'ensemble des matrices symétriques, positives, non dégénérées. Pour $a\in\underline{\underline{S}}$, soit a_- la plus petite valeur propre de a. Pour tout $c>0$, soit $\underline{\underline{S}}_c=\{\, a\in\underline{\underline{S}} : a_- \geq c\,\}$. Le théorème 1 admet l'extension suivante :

THÉORÈME 1'.- <u>Pour tout</u> $c>0$, <u>il existe un nombre</u> $\varepsilon>0$ <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>si la matrice</u> h <u>appartient à</u> $\underline{\underline{S}}_c$, <u>et si la fonction matricielle</u> a <u>satisfait à</u> $|a^{ij}(y)-h^{ij}|\leq\varepsilon$ <u>quels que soient</u> i,j,y, <u>le problème des martingales correspondant à la matrice</u> a, <u>au vecteur des termes du premier ordre égal à</u> 0, <u>à la donnée initiale</u> $x\in\mathbb{R}^d$, <u>admet au plus une solution</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit $h \in \underline{\underline{S}}_c$, et soit r sa racine carrée positive. Nous définissons une nouvelle diffusion à coefficients constants, solution du problème des martingales pour la valeur initiale x et la matrice h, en posant

$$X_t = x + r(W_t) \qquad \text{(exposé II}^*\text{)}$$

La résolvante correspondante est

$$U_\lambda(x,f) = E[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x+r(W_t))dt = V_\lambda(\, r^{-1}x,\ f\circ r\,)$$

Nous allons étendre à cette diffusion les lemmes 1,1',2, avec des quantités $A'(\lambda,p)$,$B'(\lambda,p)$, $A_I'(p)$,$B_I'(p)$ qui ne dépendront que de c (et de la dimension de l'espace). La démonstration du théorème 1 s'étendra alors sans modification, et on obtiendra un nombre ε qui vaudra pour toutes les matrices $h \in \underline{\underline{S}}_c$.

L'extension du lemme 2 est évidente. En effet, on a $\|f\circ r\|_p = (|\det r^{-1}|)^{1/p}\|f\|_p$; donc si $\lambda \in I$ et $\|f\|_p \leq 1$ on a $U_\lambda(|f|) \leq |\det r|^{-1/p} B_I(p)$ Enfin, on a $|\det r| \geq c^{d/2}$, donc $B_I'(p) \leq c^{-d/2p} B_I(p)$.

Pour étendre le lemme 1, posons $g = f\circ r$, $s = r^{-1}$. Nous avons

$$D_i D_j U_\lambda(x,f) = \sum_{m,n} s_i^m s_j^n D_m D_n V_\lambda(\ sx,\ g\ )$$

La norme du premier membre dans L^p vaut donc au plus

$$\sum |s_i^m s_j^n|\, \|D_m D_n V_\lambda g\|_p\ |\det s^{-1}|^{1/p} \leq \sum |s_i^m s_j^n|\, |\det s^{-1}|^{1/p} A(\lambda,p)\|g\|_p$$

$= \sum |s_i^m s_j^n| A(\lambda,p)\|f\|_p$. D'autre part nous avons une majoration de la forme $|s_u^v| \leq a.c^{-1/2}$, où a est une constante, d'où enfin

$$A_I'(p) \leq ad^2 A_I(p)/c$$

et le théorème en résulte.

(*) **Comme dans l'exposé II, nous désignons par (W_t) un mouvement brownien issu de 0.**

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968/69

DIFFUSIONS À COEFFICIENTS CONTINUS : RÉSULTAT FINAL

d'après un exposé de P.A. MEYER

Cet exposé contient le résultat principal de STROOCK-VARADHAN, mais il ne faut pas s'y tromper : tout le vrai travail a été fait dans les exposés antérieurs.

Dans tout l'exposé, nous supposons que la fonction matricielle a est continue et bornée, et que $\bar{a}^{1}(x)$ existe pour tout x (bien entendu, nous continuons aussi à supposer a symétrique !).

§ 1 . RÉSULTATS POUR LE CAS OÙ b=0

Nous allons donner pour commencer le théorème fondamental d'unicité (le théorème d'existence correspondant a été établi dans l'exposé II).

THÉORÈME 1.- <u>Quel que soit</u> $x \in \mathbb{R}^d$, <u>le problème des martingales pour les données</u> (x,a,0) <u>admet</u> (une et) <u>une seule solution</u>.

DÉMONSTRATION.- Nous allons commencer par traiter le cas où la fonction (uniformément bornée) a est en outre <u>uniformément continue</u> sur $\mathbb{R}^d$, et <u>uniformément elliptique</u> : il existe un nombre $c>0$ minorant toutes les valeurs propres de toutes les matrices a(x). Choisissons alors un nombre $r>0$ tel que la relation $|x-y| \leq r$ entraîne $|a^{ij}(x)-a^{ij}(y)| \leq \varepsilon/2$, où ε est le nombre construit dans l'exposé III, théorème 1'. Construisons maintenant le temps d'arrêt :

$$T(\omega) = \inf \{ t \geq 0 : |X_t(\omega)-X_0(\omega)| \geq r \} \wedge 1$$

On peut montrer que c'est en fait un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, non rendue continue à droite, et sans complétion - ce dernier point, en vertu de la continuité des trajectoires. Nous définissons par récurrence les itérés de T :

$$T_1 = T \ , \qquad T_n = T_{n-1} + T \circ \theta_{T_{n-1}}$$

Il est alors très intuitif que pour chaque n la tribu $\underline{\underline{F}}^o_{T_n}$ est engendrée par les tribus $\underline{\underline{F}}^o_{T_{n-1}}$ et $\theta^{-1}_{T_{n-1}}(\underline{\underline{F}}^o_T)$. La démonstration de ce fait exige pourtant quelque esprit de finesse, et nous renverrons le lecteur à : COURRÈGE et PRIOURET, Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire, Publications ISUP 1965.

Ceci étant admis, considérons deux solutions P et P' du problème des martingales pour les données (x,a,0) ; nous allons montrer par récurrence sur n que P et P' induisent la même loi sur $\underline{\underline{F}}^o_{T_n}$. Comme il est clair que $T_n \to \infty$ (partout), nous en déduirons le théorème 1, dans le cas particulier considéré.

Commençons par le cas où n=1. Soit h la matrice a(x) , et soit a^* une fonction matricielle(*) continue, égale à a(y) pour $|y-x|\leq r$ et satisfaisant partout à la condition $|a^{*ij}(y)-h^{ij}| \leq \varepsilon$ - condition qui entraîne, rappelons le, que $a^*(y)$ est positive. La fonction a^* satisfait aux conditions d'existence et d'unicité de l'exposé III, nous pouvons donc lui associer des mesures P^*_z sur Ω, solutions uniques du problème des martingales pour les données $(z,a^*,0)$.

Définissons maintenant une nouvelle mesure Q_x sur Ω de la manière suivante ; nous définissons d'abord une mesure μ sur $\Omega\times\Omega$ par la formule :

$$\int f(\omega,\omega')\ \mu(d\omega,d\omega') = \int f(\omega,\omega')P(d\omega)P^*_{X_T(\omega)}(d\omega')$$

cette mesure est portée par le sous-ensemble mesurable $J=\{(\omega,\omega') : X_T(\omega)=X_0(\omega')\}$; nous définissons maintenant une application ϕ de J dans Ω en posant :

$$X_t(\phi(\omega,\omega')) = \begin{cases} X_t(\omega) \text{ si } t\leq T(\omega) \\ X_{t-T(\omega)}(\omega') \text{ si } t>T(\omega)\end{cases}$$

et nous notons Q_x la mesure image $\phi(\mu)$. C'est la seule mesure sur Ω satisfaisant à la propriété suivante : si $A\in\underline{\underline{F}}^o_T$, $B\in\underline{\underline{F}}^o$

$$Q_x(A\cap\theta_T^{-1}(B)) = \int_A P^*_{X_T(\omega)}(B)\ P(d\omega)$$

On vérifie maintenant (nous ne le ferons pas) que Q_x est une solution du problème des martingales pour les données $(x,a^*,0)$, du fait que $a\circ X_t$ et $a^*\circ X_t$ coïncident jusqu'à l'instant T. Mais alors c'est que $Q_x=P^*_x$, et donc $P|_{\underline{\underline{F}}^o_T} = Q_x|_{\underline{\underline{F}}^o_T} = P^*_x|_{\underline{\underline{F}}^o_T}$. Le même raisonnement s'appliquant à P', P et P' ont bien même restriction à $\underline{\underline{F}}^o_T$.

Passons à la récurrence. Posons $T_n=S$, et admettons que P et P' aient la même restriction à $\underline{\underline{F}}^o_S$. Soit $D(\omega,d\omega')$ une répartition conditionnelle de P relativement à $\underline{\underline{F}}^o_S$; explicitement

(*) Il s'agit toujours de matrices symétriques.

- Pour tout ω, $D(\omega,.)$ est une loi de probabilité sur Ω.
- Pour tout $A\in\underline{\underline{F}}^o$, $D(.,A)$ est $\underline{\underline{F}}^o_S$-mesurable.
- Pour toute fonction positive f, $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable sur Ω, $D(.,f)$ est une version de l'espérance conditionnelle $E_P[f|\underline{\underline{F}}^o_S]$.

L'existence de telles lois conditionnelles résulte des propriétés topologiques de Ω, espace polonais. On définit de même les lois $D'(.,.)$ relatives à P'. Admettons provisoirement le résultat suivant, qui fait l'objet du lemme 1 ci-dessous (*) :

Posons $H(\omega,A) = D(\omega,\theta^{-1}_{S(\omega)}(A))$ pour $A\in\underline{\underline{F}}^o$; alors pour P-presque tout ω la mesure $H(\omega,.)$ est une solution du problème des martingales pour les données $(X_S(\omega),\ a,\ 0\ )$.

On a évidemment le même résultat pour $H'(\omega,.)$, relativement à P', et P et P' coincident sur $\underline{\underline{F}}^o_S$. D'après la première partie de la démonstration, on a $H(\omega,.)=H'(\omega,.)$ pour presque tout ω, à condition de restreindre les mesures à la tribu $\underline{\underline{F}}^o_T$. Autrement dit, on a $P(A\cap\theta^{-1}_S(B))=$ $P'(A\cap\theta^{-1}_S(B))$ si $A\in\underline{\underline{F}}^o_S$, $B\in\underline{\underline{F}}^o_T$; les ensembles de la forme $A\cap\theta^{-1}_S(B)$ engendrant $\underline{\underline{F}}^o_{T_{n+1}}$, P et P' coincident sur cette tribu, et la récurrence est légitime. Le théorème est établi sous les hypothèses de continuité et d'ellipticité uniformes.

Passons au cas général. Soit B_R la boule de centre x et de rayon R, ouverte, et soit T_R le temps de rencontre de B^c_R . Soit a^* une fonction uniformément continue et uniformément elliptique, égale à a sur B_R , et soit P^*_z la solution unique du problème des martingales correspondant aux données $(z,a^*,0)$. Soient P et P' deux solutions du problème des martingales pour les données $(x,a,0)$. Alors un raisonnement identique à celui que nous avons fait au début de la démonstration montre que P et P' induisent la même loi sur $\underline{\underline{F}}^o_{T_R}$ (la même loi que P^*_x). On conclut en faisant tendre R vers $+\infty$.

Il nous reste à établir le lemme 1 ; en vue de la suite, nous l' énoncerons pour b quelconque, mais en nous limitant pour simplifier aux temps d'arrêt bornés.

LEMME 1.- Soit P une solution du problème des martingales pour les données (x,a,b), et soit S un temps d'arrêt borné. Soit $D(.,.)$ une répartition conditionnelle de P par rapport à la tribu $\underline{\underline{F}}_S$. Pour $A\in\underline{\underline{F}}^o$, $\omega\in\Omega$, soit $H(\omega) = D(\omega,\theta^{-1}_S(A))$. Alors pour P-presque tout ω la mesure $H(\omega,.)$ est solution du problème des martingales pour les données $(X_S(\omega),a,b)$.

(*) Noter que S est borné.

DÉMONSTRATION.- Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et soit L l'opérateur différentiel $\frac{1}{2}\sum a^{ij}D_iD_j + \sum b^iD_i$. Considérons la martingale continue

$$M_t = f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Lf\circ X_s\, ds$$

Soient u et v deux nombres tels que $0\leq u<v$; prenons $A\in\underline{\underline{F}}_S$, $B\in\underline{\underline{F}}_u^o$, et écrivons que $M_{S+v}-M_{S+u}$ est orthogonale à la tribu $\underline{\underline{F}}_{S+u}$, soit en remarquant que $A\cap\theta_S^{-1}(B)$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{S+u}$, et que $M_{S+v}-M_{S+u} = (M_v-M_u)\circ\theta_S$

$$E_P[I_A.I_B\circ\theta_S.(M_v-M_u)\circ\theta_S] = 0$$

ou encore, en utilisant la définition des répartitions conditionnelles

$$0= E_P[I_A(\omega).E_{H(\omega,.)}[I_B.(M_v-M_u)]]$$

A étant arbitraire dans $\underline{\underline{F}}_S$, et $E_{H(\omega,.)}[\ ]$ étant $\underline{\underline{F}}_S$-mesurable, cela s'écrit

$$E_{H(\omega,.)}[I_B.(M_v-M_u)] = 0 \quad \text{pour presque tout } \omega$$

L'ensemble exceptionnel en ω dépend de B,u,v ; mais nous pouvons trouver un ensemble exceptionnel unique si nous donnons à u et v des valeurs rationnelles, et si pour chaque u rationnel nous prenons B dans une algèbre de Boole dénombrable engendrant la tribu séparable $\underline{\underline{F}}_u^o$. Nous désignons par N cet ensemble négligeable, et il vient

pour $\omega\notin N$, le processus $(M_s)_{s \text{ rationnel}}$ est une martingale pour la loi $H(\omega,.)$ sur Ω

Mais les trajectoires de M sont continues, et cela vaut donc pour s réel. Finalement, on fait parcourir à f un ensemble dénombrable dense dans $\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et le lemme en résulte.

CONSÉQUENCES

Nous désignerons par P_x l'unique solution du problème des martingales pour les données (x,a,0). Si f est une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^d$, nous poserons

$$P_t(x,f) = E_x[f\circ X_t] \quad , \quad U_\lambda(x,f) = E_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f\circ X_t dt\ ]$$

Nous commençons par montrer que $P_t(.,.)$ est un noyau fellérien, puis que les lois P_x sont des lois de processus de Markov

THÉORÈME 2.- Si $f \in \underline{\underline{C}}_0(\mathbb{R}^d)$, on a $P_t(.,f) \in \underline{\underline{C}}_0(\mathbb{R}^d)$; autrement dit, les P_t sont des noyaux fellériens . Ces noyaux forment un semi-groupe, et pour chaque x la mesure P_x est la loi du processus de Markov issu de x, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition.

DEMONSTRATION.- Tout d'abord, il résulte des considérations de l'exposé II (bien qu'en fait nous n'ayons pas fait varier x dans l'exposé II !) que l'application $x \longmapsto P_x$ est étroitement continue. Cela entraîne aussitôt que si $f \in \underline{\underline{C}}_0(\mathbb{R}^d)$, on a $P_t f \in \underline{\underline{C}}_b(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, si f a son support dans la boule de centre 0 et de rayon R, et est comprise entre 0 et 1, on a pour $|x|$ grand $P_t(x,f) \leqq P_x\{|X_t - X_0| \geqq |x|/2\}$. D'après la majoration de STROOCK-VARADHAN (exposé I) cette quantité vaut au plus $A\exp(-|x|^2/Bt)$, où A et B sont des constantes >0. Cela tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. On passe à $f \in \underline{\underline{C}}_0$ par convergence uniforme.

Pour établir le caractère markovien, nous appliquons le lemme 1 avec S=t ; d'après l'unicité il vient que $H(\omega,d\omega')=P_{X_t(\omega)}(d\omega')$ pour P_x-presque tout ω. Donc si $A \in \underline{\underline{F}}^o$

$$P_x\{\theta_t^{-1}(A)|\underline{\underline{F}}_t^o\} = H(\omega,A)= P_{X_t(\omega)}(A) \quad \text{p.s.}$$

C'est la propriété de Markov, au sens de DYNKIN. Il est bien connu qu'elle entraîne la relation $P_u P_v = P_{u+v}$.

REMARQUE.- Les noyaux U_λ constituent donc la résolvante du semi-groupe (P_t). Nous aurons besoin plus tard de savoir que les mesures $U_\lambda(x,dy)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. A cet effet, revenons à la démonstration du théorème 1. Supposons d'abord a uniformément continue et uniformément elliptique, et reprenons la fonction a^* , les noyaux P_t^* , U_λ^* étant relatifs à cette fonction. Nous savons d'après l'exposé III que U_λ^* admet des densités dans L^q ; il en résulte aussitôt que si $f \geqq 0$ est négligeable au sens de Lebesgue, on a $E_.[\int_0^T e^{-\lambda t} f \circ X_t dt] = E_.^*[\int_0^{\overline{T}} e^{-\lambda t} f \circ X_t\, dt] \leqq U_\lambda^*(.,f)=0$, puisque les mesures $P_.$ et $P_.^*$ coincident sur $\underline{\underline{F}}_T^o$. La propriété de Markov forte permet d'étendre cela aux intervalles $[T_n, T_{n+1}]$, puis à $[0,\infty[$ par sommation. On se débarrasse enfin de l'hypothèse auxiliaire comme dans la démonstration du théorème 1.

LA PROPRIÉTÉ DE FELLER FORTE DES RÉSOLVANTES

STROOCK et VARADHAN prouvent un résultat meilleur que celui qui figure ici : le semi-groupe (P_t) lui-même est fortement fellérien . Mais leur démonstration semble reposer de manière essentielle sur les majorations " paraboliques" de JONES, omises ici. Nous nous intéresserons donc seulement aux résolvantes, et nous nous inspirerons d'un exposé de COURRÈGE et PRIOURET (Séminaire de théorie du Potentiel, Paris, vol.8 (1963-64).

En fin de compte notre démonstration est beaucoup plus longue que celle de S-V, pour un moins bon résultat. C'est ce qu'on appelle améliorer un exposé !

LEMME 2.- Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour toute fonction borélienne bornée f et tout $\lambda>0$, U_λ est continue dans $\mathbb{R}^d$ (la résolvante (U_λ) est fortement fellérienne).

2) Pour tout ouvert relativement compact A, et toute fonction borélienne bornée f, la mesure harmonique

$$H_A^\mu(x,f) = E_x[\exp(-\mu T_{A^c}).f\circ X_{T_{A^c}}] \qquad (\mu>0)$$

est une fonction de x continue dans A (ouvert).

DEMONSTRATION.- 1)=> 2). Posons $T=T_{A^c}$, et soit $S_\lambda=S/\lambda$, où S est une variable aléatoire indépendante des processus, à loi exponentielle de paramètre 1 . Soit $\phi(\omega) = \exp(-\mu T(\omega))f\circ X_T(\omega)$, et soit Φ la fonction bornée $E_{\cdot}[\phi]$. Nous avons d'après la propriété de Markov forte

$$E_{\cdot}[\phi\circ\theta_{S_\lambda}] = \lambda U_\lambda(\cdot,\Phi) \qquad \text{Faisons tendre } \lambda \text{ vers } +\infty .$$

Le second membre est une fonction continue dans $\mathbb{R}^d$, il nous suffit donc de montrer que le premier membre tend vers $H_A^\mu(\cdot,f)=\Phi$ uniformément sur tout compact de A. Or $T\circ\theta_{S_\lambda} = T-S_\lambda$ sur $\{S_\lambda<T\}$. On a donc si $|f|\leq 1$:

$$|E_x[\phi\circ\theta_{S_\lambda}-\phi]| \leq E_x[(\exp(-\mu(T-S_\lambda))-\exp(-\mu T))I_{\{S_\lambda<T\}}]+P_x[T\leq S_\lambda]$$

Le dernier terme tend bien uniformément vers 0 sur les compacts de A, d'après la majoration de STROOCK-VARADHAN (exposé I). Dans le terme du milieu, la quantité intégrée est majorée à la fois par 1 et par $\exp(\mu S_\lambda)-1$: il vaut donc au plus $E_x[1\wedge(\exp(\mu S_\lambda)-1)]$, qui tend vers 0 lorsque $\lambda\to\infty$, indépendamment de x.

Ensuite, pour montrer que (2)=>(1), prenons $x\in\mathbb{R}^d$, et prenons pour A_n la boule ouverte de rayon $1/n$ et de centre x . Notons T_n le temps de rencontre de A_n^c . Comme les résolvantes sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, $U_\lambda(x,\{x\})=0$, et il en résulte que $T_n\to 0$ P_x-p.s. Alors, d'après la continuité à droite des potentiels sur les trajectoires (ou simplement la propriété de Markov forte !)

$$U_\lambda f = \sup_n H^\lambda_{A_n} U_\lambda f \qquad \text{si } f\geqq 0 \text{ est bornée}$$

Les fonctions au second membre sont continues au point x, donc le premier membre est une fonction semi-continue inférieurement au point x. Notons que x est arbitraire, prenons f comprise entre 0 et 1, appliquons ce résultat à f et à 1-f. Comme $U_\lambda f + U_\lambda(1-f) = 1/\lambda$, les deux fonctions sont continues, et le lemme est établi.

Nous pouvons maintenant démontrer la propriété de FELLER forte :

THÉORÈME 3.- <u>Sous les hypothèses de ce paragraphe</u>, <u>la résolvante</u> (U_λ) <u>est fortement fellérienne</u>.

DEMONSTRATION.- Nous remarquerons d'abord qu'il suffit de vérifier que $U_\lambda f$ est continue pour $f\geqq 0$, borélienne bornée <u>à support compact</u>. Cela entraîne en effet que $U_\lambda f$, pour f borélienne bornée comprise entre 0 et 1, est s.c.i. ; en appliquant ce résultat à f et 1-f, il vient que $U_\lambda f$ est continue. D'autre part, d'après l'équation résolvante, il suffit de démontrer le résultat pour <u>une</u> valeur de λ.

Nous nous placerons d'abord dans la situation de l'exposé III, théorème 1' , avec $\lambda\in I$. Dans ce cas, nous savons que les mesures $U_\lambda(x,dy)$ ont des densités par rapport à la mesure de Lebesgue, qui parcourent un ensemble <u>borné dans L^q</u> lorsque x varie. Un tel ensemble est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(L^q,L^p)$. D'autre part, nous savons que l'application qui à x associe la mesure $U_\lambda(x,.)$ est continue pour la topologie étroite. Elle est donc aussi continue pour la topologie $\sigma(L^q,L^p)$. On conclut en remarquant qu'une fonction borélienne bornée à support compact f appartient à L^p : donc la fonction $x\mapsto\int U_\lambda(x,dy)f(y)$ est continue.

Passons au cas général . Soit $x\in\mathbb{R}^d$, et soit h la matrice a(x), et soit c un nombre >0 minorant les valeurs propres de h. Nous lui associons un nombre $\varepsilon>0$ satisfaisant aux conditions de l'exposé III, théorème 1'. Puis nous choisissons un nombre $r>0$ tel que $|x-y|\leq 2r$ entraîne $|a^{ij}(y)-h^{ij}|\leq\frac{\varepsilon}{2}$, et une fonction a^* égale à a sur la boule $A=\{y : |y-x|<r\}$, continue bornée, satisfaisant partout à cette condition. Soit T le temps de rencontre de A^c. Nous avons vu dans la démonstration du théorème 1 que les mesures P_y et P^*_y sont égales sur $\underline{\underline{F}}^o_T$, si $y\in A$. Donc $H^\mu_A(y,f)=H^{*\mu}_A(y,f)$ est continue au point x, d'après le lemme 2 et la propriété de Feller forte de (U^*_λ). Si maintenant B est un ouvert relativement compact quelconque contenant x, choisissons r assez petit pour que $A\subset B$; nous avons dans A, d'après la propriété de Markov forte , $H^\mu_A(\cdot\,,H^\mu_B f)=H^\mu_B(\cdot,f)$; cette dernière fonction est donc continue au point x, et le lemme 2 permet de conclure.

REMARQUES.- Voici quelques conséquences de la propriété de FELLER forte, qui méritent d'être signalées.

Tout d'abord, un théorème de MOKOBODZKI affirme qu'une résolvante (ou un semi-groupe) fortement fellérien est " strictement fortement fellérien" . Cela signifie, avec nos notations, que l'application qui à x associe la mesure $U_\lambda(x,dy)$ est continue lorsqu'on munit l'espace des mesures de la topologie de la <u>norme</u> . Ce fait est très intéressant (mais nous n'aurons pas à l'utiliser dans la suite).

Ensuite, nous avons vu que les mesures $U_\lambda(x,dy)$ sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$; elles admettent donc des densités $u_\lambda(x,y)\in L^1$. L'application $x\mapsto u_\lambda(x,y)$ est continue pour la topologie faible $\sigma(L^1,L^\infty)$. L'ensemble des fonctions $u_\lambda(x,.)$, où x parcourt un compact K, est donc faiblement compact ; d'après un théorème célèbre de DUNFORD-PETTIS (cf. DUNFORD-SCHWARTZ, vol.1, p. 294) ces fonctions sont uniformément intégrables : pour tout $\varepsilon>0$ il existe $h>0$ tel que pour tout ensemble $A\subset\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $\leq h$, et tout $x\in K$, on ait $U_\lambda(x,A)\leq\varepsilon$.

§ 2 . RÉSULTATS POUR LE CAS OÙ $b\neq 0$

Nous avons vu au § 3 de l'exposé II comment on construit une mesure P_x , solution du problème des martingales pour les données (x,a,b) : soit $\hat{P}_x$ la solution du problème des martingales pour les données $(x,a,0)$. Posons successivement

$$M_t = \int_0^t < b\circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s \mid dX_s > \qquad \text{(intégrale stochastique pour la loi } \hat{P}_x \text{)}$$

$$A_t = \int_0^t < b\circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s \mid b\circ X_s > ds$$

$$Z_t = \exp [M_t - \tfrac{1}{2}A_t]$$

Alors le processus (Z_t) est une vraie martingale positive, et pour tout t Z_t est une densité de $P_x|\underline{\underline{F}}^o_t$ par rapport à la restriction $\hat{P}_x|\underline{\underline{F}}^o_t$.

C'est là le principe de l'extension des résultats du cas où $b=0$ au cas général. Il faut cependant prendre garde (plus que ne font STROOCK et VARADHAN) au fait que la définition des intégrales stochastiques <u>dépend</u> de la mesure de base.

L'UNICITÉ DANS LE CAS $b\neq 0$

Nous n'allons pas donner d'énoncé formel, mais prouver qu'il y a unicité.

Soit P une mesure, solution du problème des martingales pour les données (x,a,b). Le processus $Y_t = X_t - \int_0^t b\circ X_s ds$ est alors une martingale pour la loi P (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$), et le processus croissant associé à $<y,Y_t>$ est $\int_0^t <y|a\circ X_s|y > ds$. Désignons par M'_t la martingale locale réelle

$$M'_t = \int_0^t -< b\circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s \mid dY_s > \qquad \text{(loi P)}$$

dont le processus croissant associé est

$$A'_t = \int_0^t < b\circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s \mid b\circ X_s > ds$$

Le processus $Z'_t = \exp [M'_t - \frac{1}{2}A'_t]$ est alors une martingale locale (pour la loi P) ; on vérifie aussitôt que $Z'_t = 1/Z_t$ (formellement : il s'agit d'intégrales stochastiques qui sont prises par rapport à des mesures différentes)

On vérifie ensuite, comme dans l'exposé II, que le processus suivant est une martingale locale (pour la loi P), quel que soit $y \in \mathbb{R}^d$:

$$Z'_t \cdot \exp\left[\langle y, X_t \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \langle y | a \circ X_s | y \rangle \, ds \right]$$

Soit T le temps de rencontre du complémentaire de la boule $\{y<R\}$.
Le processus $Z'_{t\wedge T}$ est une martingale uniformément intégrable, positive, d'espérance 1, et il existe donc une loi unique Π sur Ω qui induit sur chaque tribu $\underline{\underline{F}}^o_t$ la loi $Z'_{t\wedge T} \cdot P$. Pour cette loi Π , le processus

$$\exp\left[\langle y, X_{t\wedge T} \rangle - \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge T} \langle y | a \circ X_s | y \rangle \, ds \right]$$

est une martingale, quel que soit $y \in \mathbb{R}^d$. Il résulte alors du théorème d'unicité dans le cas b=0, et de la méthode de recollement déjà utilisée dans la démonstration du théorème 1 , que les lois Π et $\overset{o}{P}_x$ induisent la même loi sur $\underline{\underline{F}}^o_T$, donc sur $\underline{\underline{F}}^o_{t\wedge T}$.

Cela va nous suffire pour démontrer l'unicité. Soient P et P' deux lois, solutions du problème des martingales pour les données (x,a,b). Choisissons un <u>même</u> processus continu (M'_t) , qui soit une version de l'intégrale stochastique $-\int_0^t \langle b \circ X_s | \bar{a}^1 \circ X_s | \, dY_s \rangle$ pour les <u>deux</u> lois P et P' : dans le cas où nous sommes, l'existence d'un tel processus est évidente, il suffit de construire l'intégrale stochastique pour la loi $\frac{1}{2}(P+P')$. Construisons alors le processus Z'_t , le même pour les deux lois. Il vient que pour tout t et tout R

$$Z'_{t\wedge T} \cdot P \mid \underline{\underline{F}}^o_{t\wedge T} = Z'_{t\wedge T} \cdot P' \mid \underline{\underline{F}}^o_{t\wedge T} = \overset{o}{P}_x \mid \underline{\underline{F}}^o_{t\wedge T}$$

Comme $Z'_{t\wedge T}$ est strictement positive, P et P' induisent la même loi sur $\underline{\underline{F}}^o_{t\wedge T}$, d'où l'unicité en faisant tendre R, puis t, vers l'infini.

CARACTÈRE MARKOVIEN ET PROPRIÉTÉ DE FELLER FORTE

Nous allons étendre ces propriétés au cas où b≠0, sans prendre la peine d'en donner à nouveau des énoncés formels. Reprenant les notations du début du paragraphe, nous désignerons par $\overset{o}{P}_x$ la mesure correspondant aux données (x,a,0), par $\overset{o}{P}_t, \overset{o}{U}_\lambda$, le semi-groupe et la résolvante associés (le ^{o} sera employé de la même manière pour d'autres notations, sans explication spéciale) ; P_x sera la mesure correspondant aux données $(x,a,0)$, et nous poserons pour f borélienne bornée

$$P_t(x,f)=E_x[f\circ X_t]=\mathring{E}_x[f\circ X_t . Z_t] \quad ,$$
$$U_\lambda(x,f)=E_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f\circ X_t dt] = \mathring{E}_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f\circ X_t \, Z_t \, dt] \, .$$

<u>Nous allons commencer par traiter le cas où la fonction matricielle $\bar{a}^1$ est bornée</u> .

<u>Montrons d'abord que pour chaque</u> t, P_t <u>est un noyau fellérien</u>. Soit $f\in \underline{\underline{C}}_c^+(\mathbb{R}^d)$, et montrons que $P_t f \in \underline{\underline{C}}_0$. Le fait que $P_t f$ **tend vers** 0 à l'infini est une conséquence simple des majorations de STROOCK-VARADHAN (si x est loin , $P_x\{X_t$ appartient au support de f$\}$ est petit). Reste à voir que $P_t f$ est continue. Il suffit de prouver que $\mathring{P}_\varepsilon(P_t f)$ tend vers $P_t f$ uniformément sur tout compact lorsque $\varepsilon\to 0$, car cela entraînera le même résultat pour $\lambda\mathring{U}_\lambda(P_t f)$ ($\lambda\to\infty$), et la résolvante $(\mathring{U}_\lambda)$ est fortement fellérienne.

Or nous avons $\mathring{P}_\varepsilon P_t f = \mathring{E}_\cdot[f\circ X_{t+\varepsilon} Z_t\circ\theta_\varepsilon]$. Il nous suffit donc de majorer séparément les fonctions

$$\mathring{E}_\cdot[|f\circ X_{t+\varepsilon}-f\circ X_t| Z_t] \text{ et } \mathring{E}_\cdot[|Z_t\circ\theta_\varepsilon - Z_t| f\circ X_{t+\varepsilon}]$$

Supposons $f\leqq 1$.

<u>Première fonction</u> . Nous avons $Z_t \leqq \exp(M_t)$, et la martingale M_t a un processus croissant associé borné uniformément par Kt (où K est une constante , dépendant des bornes de b et $\bar{a}^1$) sur $[0,t]$. Donc

$$\mathring{E}_x[|f\circ X_{t+\varepsilon}-f\circ X_t| . Z_t] \leqq e^c . \mathring{E}_x[|f\circ X_{t+\varepsilon}-f\circ X_t|] + 2\int_{\{M_t>c\}} e^{M_t} \, d\mathring{P}_x$$

D'après le théorème 3 de l'exposé I, le dernier terme peut être rendu très petit (indépendamment de x) en choisissant c assez grand. Puis on remarque que f est uniformément continue et bornée, et que l'on connaît (exposé I) des modules de continuité pour le processus (X_t), indépendants de x (dépendant seulement des bornes de a).

<u>Seconde fonction</u>. Nous majorons $f\circ X_{t+\varepsilon}$ par 1 . Nous avons d'après l'exposé I , en décomposant $M_t\circ\theta_\varepsilon - M_t$ en deux intégrales stochastiques, l'une de 0 à ε, l'autre de t à $t+\varepsilon$

$$e^{M_t\circ\theta_\varepsilon} \to e^{M_t} \qquad e^{-A_t\circ\theta_\varepsilon/2} \to e^{-A_t/2}$$

dans $L^2(\mathring{P}_x)$, **uniformément** en x (nous laissons les détails de côté).

Donc $|Z_t \circ \theta_\varepsilon - Z_t| \to 0$ dans $L^1(P_x)$ uniformément en x, et la propriété cherchée est établie.

Le lemme 1 s'appliquant au cas $b \neq 0$, les P_t forment un semi-groupe dont la résolvante est (U_λ), et les mesures P_x sont les lois des processus de Markov admettant (P_t) comme semi-groupe de transition (cf. théorème 2).

Montrons maintenant (toujours sous l'hypothèse particulière concernant $\bar{a}^1$) que <u>la résolvante</u> (U_λ) <u>est fortement fellérienne</u>. Il suffit de montrer que pour tout ouvert relativement compact G et tout t fini, la fonction

$$Vf = E_{\cdot}\left[\int_0^t e^{-\lambda u} f \circ X_u \, du\right] = \mathring{E}_{\cdot}\left[\int_0^t e^{-\lambda u} f \circ X_u . Z_u \, du\right]$$

où f est borélienne bornée à support dans G, est continue dans G. En effet cela entraînera que si f est borélienne bornée ≥ 0 dans $\mathbb{R}^d$, $U_\lambda f$ est s.c.i. dans $\mathbb{R}^d$, et nous avons vu comment on en déduit que U_λ est alors fortement fellérien.

Soit m la mesure induite sur G par la mesure de Lebesgue. Nous noterons encore V(x,dy), pour $x \in G$, ma mesure induite sur G par la mesure V(x,dy) précédente. D'après le caractère fellérien de (P_t), l'application $x \mapsto V(x,dy)$ est continue de G dans $\underline{\underline{M}}(G)$ muni de la topologie vague. Nous allons montrer qu'elle est continue pour la topologie $\sigma(L^1(m), L^\infty(m))$, et il suffit pour cela de prouver la propriété d'intégrabilité uniforme suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h > 0$ tel que l'on ait $V(x,A) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in G$, et tout $A \subset G$ tel que $m(A) \leq h$.

Soit $M^* = \sup_{u \leq t} M_u$; nous avons $Z_u \leq e^{M^*}$ pour tout u, et par conséquent

$$V(x,A) \leq \mathring{E}_x\left[e^{M^*} \int_0^\infty e^{-\lambda u} I_A \circ X_u \, du\right]$$
$$\leq cU_\lambda(x,A) + \frac{1}{\lambda}\mathring{P}_x\{e^{M^*} > c\}$$

Nous choisissons c assez grand pour que $\mathring{P}_x\{e^{M^*} > c\} \leq \lambda\varepsilon/2$ pour tout x - ce qui est possible d'après la majoration de STROOCK-VARADHAN (exposé I). Après quoi, nous choisissons h assez petit pour que $A \subset G$, $m(A) \leq h$ entraîne $U_\lambda(x,A) \leq \varepsilon/2c$ pour tout $x \in G$ (remarque suivant le théorème 3) . La propriété d'intégrabilité uniforme est établie, ainsi que la propriété de Feller forte, lorsque $\bar{a}^1$ est bornée.

Il nous reste à nous débarrasser de cette hypothèse : la méthode est toujours la même ! Soit B_n la boule ouverte de centre 0 et de rayon n ; soit T_n le temps d'entrée dans B_n^c ; soit $\overset{n}{a}$ une fonction continue et bornée à valeurs dans l'ensemble des matrices symétriques positives, coincidant avec a sur B_n , telle que la fonction $\overset{n}{a}^{-1}$ soit bornée. Introduisons les mesures P_x, $\overset{n}{P}_x$ correspondant aux données (x,a,b) et $(x,\overset{n}{a},b)$; comme dans la démonstration du théorème 1 on vérifie que P_x et $\overset{n}{P}_x$ induisent la même loi sur $\underline{\underline{F}}^{o}_{T_n}$. D'autre part la majoration de STROOCK-VARADHAN montre que $\overset{m}{P}_x\{T_n<t\}$ tend vers 0 lorsque $n\to\infty$, uniformément en m et en $x\in K$ (K compact). Il en résulte que si f est borélienne bornée $\overset{m}{P}_t f$ converge vers $P_t f$ uniformément sur tout compact, et on a le même résultat pour $\overset{m}{U}_\lambda f$ et $U_\lambda f$. Il en résulte d'abord que les noyaux P_t sont felleriens, puis l'extension du caractère markovien, et la propriété de Feller forte des résolvantes.

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.