MICHEL WEIL

# Quasi-processus

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 4 (1970), p. 216-239

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__216_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

Rue René Descartes

STRASBOURG

1969-70

– Séminaire de Probabilités –

# QUASI-PROCESSUS

par

Michel WEIL

La notion de quasi-processus a été introduite par HUNT [3] en théorie des chaînes de Markov, où elle permet de représenter certaines mesures excessives qui ne sont pas des potentiels. La construction de HUNT présente un certain caractère arbitraire (elle dépend du choix d'une suite croissante d'ouverts relativement compacts recouvrant l'espace d'états) et ne s'étend pas aisément au cas continu, par suite de difficultés de theorie de la mesure. Nous avons montré dans la Note [6] comment on peut lever ces difficultés au moyen d'un théorème général sur les limites projectives (*). Nous reprenons ici l'ensemble de la question, en nous efforçant tout au long de donner des résultats et des constructions qui aient une signification intrinsèque, indépendamment des suites d'ouverts utilisées.

Nous laissons de côté les questions relatives au retournement du temps, et tout ce qui touche à la frontière de Martin. En revanche, dans un

(*) Nous nous sommes aperçus depuis lors qu'un théorème très voisin figure dans le livre de PARTHASARATY : Probability Measures on Metric Spaces. A.P. 1967.

prochain article, nous donnerons quelques résultats simples sur l'extension des fonctionnelles additives au quasi-processus, et l'interprétation probabiliste de la notion d'énergie d'une fonction excessive.

Ce sujet m'a été proposé par P.A. MEYER et je le remercie beaucoup pour les précieux conseils qu'il m'a donnés durant la réalisation de ce travail.

## 1. LES ESPACES FONDAMENTAUX.

L'espace des états $E$ des processus sera un espace localement compact à base dénombrable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$ . On adjoint d'habitude divers points à $E$ :

- le point à l'infini d'Alexandrov, noté $\infty$ ci-dessous,
- deux points isolés, distincts entre eux et distincts de $\infty$ ; nous les noterons $\partial$ (delta) et $6$ (atled) .

Nous nous donnerons sur $E$ un semi-groupe sous-markovien standard $(P_t)_{t\geq 0}$ , que nous rendrons markovien au moyen du point $\partial$ de la façon usuelle, et nous supposerons que le noyau potentiel $U$ de $(P_t)$ applique $C_c$ (les fonctions continues sur $E$ à support compact) dans $C_b$ (les fonctions continues bornées). Nous désignerons par $\Omega$ l'ensemble des applications $\omega$ de $]0,\infty[$ (*) dans $E \cup \{\partial\}$ , admettant une durée de vie $\zeta(\omega)$ , continues à droite et pourvues de limite à gauche sur $]0,\zeta[$ . Nous utiliserons sur $\Omega$

(*) Le fait de prendre $]0,\infty[$ et non $[0,\infty[$ est utile pour des raisons techniques.

les notations usuelles : $X_t$ , $\mathcal{F}^o$ , $\mathcal{F}^o_t$ , $\theta_t$ (voir MEYER [4] p. 31) . Toutes les trajectoires $\omega \in \Omega$ prennent naissance à l'instant 0 . Nous allons définir un système de nouvelles notations, permettant aux trajectoires de prendre naissance à un instant aléatoire.

L'ESPACE W .

Considérons l'ensemble $C$ de tous les couples $(a,b)$ d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a \leq b$ , distincts de $(-\infty, -\infty)$ et de $(+\infty, +\infty)$ . Pour $(a,b) \in C$ , désignons par $W_{ab}$ l'ensemble suivant d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\{\delta\} \cup E \cup \{\partial\}$ :

1) si $a < b$ , $W_{ab}$ est formé de toutes les applications $w$ telles que

$w(t) = \delta$ *pour* $t \leq a$ , $w(t) = \partial$ *pour* $t \geq b$ ; *sur* $]a,b[$ , $w$ *prend des valeurs dans* $E$ , *est continue à droite, et a des limites à gauche dans* $E$ . *De plus si* $a = -\infty$ , *on a* $\lim\limits_{t \to -\infty} w(t) = \infty$ ;

2) si $a = b$ (auquel cas $a$ est fini), $W_{ab}$ est formé de l'unique application $w$ qui vaut $\delta$ sur $]-\infty, a[$ et $\partial$ sur $[a, +\infty[$ .

Nous posons maintenant $W = \bigcup\limits_{C} W_{ab}$ , et nous écrirons $Y_t(w) = w(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ , $w \in W$ ; nous munirons $W$ des tribus $\mathcal{G}_t = \mathcal{C}(Y_s , s \leq t)$ , et $\mathcal{G} = \mathcal{C}(Y_s , s \in \mathbb{R})$ . Les fonctions $a$ et $b$ sont alors des variables aléatoires (instant de naissance, instant de mort), et on pose $\zeta = b - a$ (durée de vie). L'ensemble $W$ est muni des opérateurs de translation $\theta_t$ , $t \in \mathbb{R}$ : si $w \in W$ alors $\theta_t w$ est la trajectoire $s \mapsto Y_{s+t}(w)$ . Ce sont des automorphismes de $(W, \mathcal{G})$ .

Il faut signaler l'importance technique de la dernière condition de 1) elle exprime que les trajectoires qui existent depuis toute éternité "viennent de l'infini". C'est une condition de "non récurrence" du côté de $-\infty$.

Les données probabilistes ne nous permettront pas de déterminer de manière naturelle la loi du temps de naissance $a$, et nous devrons donc travailler "à une translation prés", d'où les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.1.

On désigne par (TR) la relation d'équivalence sur $W$

$$(w \equiv w' \bmod (TR)) \Leftrightarrow (\text{il existe } t \in R \text{ tel que } w = \theta_t w') \ .$$

Nous désignerons par $W'$ l'ensemble quotient $W/(TR)$, par $\mathcal{G}^{sat}$ la tribu sur $W$ formée des ensembles de $\mathcal{G}$ saturés pour (TR), par $\mathcal{G}'$ la tribu quotient sur $W'$ (formée des images canoniques d'éléments de $\mathcal{G}^{sat}$).

Les $w \in W$ tels que $a(w) = b(w)$ forment une classe d'équivalence, que nous noterons $[\partial]$.

DÉFINITION 1.2.

Nous dirons qu'une fonction $S$ sur $W$, à valeurs dans $\overline{R}$, est intrinsèque si l'on a $S(\theta_t w) = S(w) - t$ pour tout $w \in W$ et tout $t \in R$.

Nous considérerons en particulier les temps d'arrêt intrinsèques (resp. les temps d'arrêt intrinsèques stricts), c'est-à-dire les temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{G}_{t+})$ (resp. $(\mathcal{G}_t)$) qui sont en même temps des fonctions intrinsèques. Par exemple, si $H$ est un ouvert de $E$, la fonction

$$T_H(w) = \inf \{t \in R : Y_t(w) \in H\}$$

est un temps d'arrêt intrinsèque (temps d'entrée dans $H$). Si $S,T$ sont des temps d'arrêt intrinsèques, il en est de même de $S \vee T$ , $S \wedge T$ , $S+t$ $(t \in \mathbb{R})$ .

Si $S$ est une variable aléatoire numérique, nous pouvons définir de la manière usuelle une variable aléatoire $Y_S$ par la formule : $Y_S(w) = Y_{S(w)}(w)$ , avec les conventions $Y_S(w) = 6$ (resp. $\partial$) si $S(w) = -\infty$ (resp. $+\infty$). On vérifie immédiatement que <u>si</u> $S$ <u>est intrinsèque</u>, <u>la relation</u> $(w \equiv w' \bmod(TR))$ <u>entraîne</u> $(Y_S(w) = Y_S(w'))$. Autrement dit, $Y_S$ est $\mathcal{G}^{sat}$-mesurable, et définit par passage au quotient une variable aléatoire $Y'_S$ sur $(W', \mathcal{G}')$. Si nous restreignons la tribu $\mathcal{G}$ à $\mathcal{G}^{sat}$ , nous ne pouvons donc plus parler des variables aléatoires $Y_t$ , mais nous pouvons encore considérer, par exemple, les variables aléatoires $Y_{T_H+t}$ $(t \in \mathbb{R})$ . Il y a de nombreux autres exemples de variables aléatoires intrinsèques : ainsi $a,b$ , et les instants de dernier passage :

$$D_H(w) = \sup \{t \in \mathbb{R} : Y_t(w) \in H\}$$

sont des variables aléatoires intrinsèques. Noter aussi que la <u>différence</u> de deux variables aléatoires intrinsèques est mesurable pour la tribu $\mathcal{G}^{sat}$ .

Soit $S$ un <u>temps d'arrêt intrinsèque</u> ; nous désignerons par $\mathcal{G}^{sat}_S$ la tribu intersection $\mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}^{sat}$ . Nous désuisons en particulier une famille croissante de tribus naturellement associée à $S$ , la famille $(\mathcal{G}^{sat}_{S+t})_{t\geq 0}$ .

Voici quelques remarques plus techniques. Désignons par $(H_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts recouvrant $E$ , et par $T_n$ le temps d'entrée dans $H_n$ . On ne peut avoir $T_n(w) = +\infty$ pour tout $n$

que si $w$ ne rencontre pas $E$ (i.e. si $a(w) = b(w)$) ; si $w$ rencontre $E$, soit $n(w)$ le plus petit $i$ tel que $T_i(w) < +\infty$, et soit $R(w) = T_{n(w)}(w)$. D'après la première condition imposée sur les trajectoires $w \in W$, on ne peut avoir $R(w) = -\infty$.

Nous pouvons construire une section $q$ pour (TR) [i.e. une application mesurable $q$ de $W$ dans $W$, constante sur les classes mod(TR), telle que $q(w) \equiv w$ mod(TR)] de la manière suivante :

- si $a(w) = b(w)$, $q(w)$ est l'unique $w_0 \in W$ tel que $a(w_0) = b(w_0) = 0$
- si $a(w) < b(w)$, $q(w)$ est l'application $t \mapsto Y_{R(w)+t}(w)$ .

Grâce à l'application $q$, on peut donner explicitement des générateurs des tribus $\mathcal{G}_S^{sat}$ .

**LEMME 1.1.**

Soit $S$ un temps d'arrêt intrinsèque strict. Alors la tribu $\mathcal{G}_S^{sat}$ est engendrée par les variables aléatoires $Y_{(T_m+t)\wedge S}$ où $m \in \mathbb{N}$ et $t > 0$.

On a le même résultat en remplaçant "$m \in \mathbb{N}$" par "$m \in \mathbb{N}$ et $m > n$" pour tout $n$ fixé.

**DÉMONSTRATION.**

Nous allons diviser la démonstration en deux parties.

1ère partie. - Désignons par $\mathcal{C}$ la tribu $\mathcal{T}(Y_{T_m+t}, m \in \mathbb{N}, t > 0)$, alors on va montrer que les deux tribus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}^{sat}$ sont égales. Il est clair que $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}^{sat}$ ; il suffit donc de montrer que la section $q$ est une application $(\mathcal{C}, \mathcal{G}^{sat})$-mesurable, ou encore que si $f$ est une fonction numérique sur $E \cup \{\partial\} \cup \{\delta\}$ et $\mathcal{E}'$-mesurable alors la fonction $f \circ Y_t \circ q$ est $\mathcal{C}$-mesurable.

Nous avons la décomposition suivante

$$f \circ Y_t \circ q = f \circ Y_t(w_o)\, I_{[\partial]} + \sum_k I_{\{w:n(w)=k\}}\, f \circ Y_{T_k+t} \quad .$$

Or d'une part l'ensemble $[\partial]$ appartient à $\mathcal{C}$ car il est égal à $\bigcup_n \bigcap_{\substack{k>n \\ u\in\mathbb{Q}\cap]0,\infty[}} \{Y_{T_k+u} = \partial\}$ , et d'autre part la fonction $w \mapsto n(w)$ est $\mathcal{C}$-mesurable puisque $n(w) = \inf(k : k \in \mathbb{N} \text{ , } \exists\, u \in \mathbb{Q} \cap ]0,\infty[ \text{ et } Y_{T_k+u}(w) \neq \partial)$ . Il reste donc à montrer que la fonction $w \mapsto f \circ Y_{T_k+t}(w)$ coïncide sur $\{w : n(w) = k\}$ avec une fonction $\mathcal{C}$-mesurable : si $t > 0$ c'est trivial, si $t \leq 0$ en posant $t = - s$ on peut écrire

$$f \circ Y_{T_k-s} = f(6) I_{\{T_k-s\leq a\}} + \bigcup_{m>k} f \circ Y_{T_k-s}\, I_{\{T_m<T_k-s\leq T_{m-1}\}} + f(\partial)\, I_{[\partial]} \quad .$$

Mais

$$\{T_k \leq a + s\} = \bigcap_{m>k} \{T_k \leq T_m + s\}$$

et

$$\{T_k \leq T_m + s\} = \{w : \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \cap ]0,\infty[\, , \exists t \in \mathbb{Q}_+ \cap\, ]0,\infty[\, , t < s+\varepsilon, Y_{T_m+t}(w) \in H_k\} .$$

Par conséquent $\{T_k \leq T_m + s\}$ et donc $\{T_k \leq a + s\}$ appartiennent à $\mathcal{C}$ .

De manière analogue on montre que $\{T_m < T_k - s \leq T_{m-1}\} \in \mathcal{C}$ . Enfin $f \circ Y_{T_k-s}\, I_{\{T_m<T_k-s\leq T_{m-1}\}}$ vaut $f \circ Y_{T_m+T_k^m-s}\, I_{\{T_m<T_k-s\leq T_{m-1}\}}$ avec $T_k^m = \inf(u : u > 0 \text{ , } Y_{T_m+u} \in H_k)$ ; et comme, sur $\{T_m < T_k - s \leq T_{m-1}\}$ , $T_k^m - s$ est une fonction positive et $\mathscr{C}(Y_{T_m+u, u>0})$-mesurable, on déduit, puisque le processus $(Y_{T_m+u})_{u>0}$ est progressivement mesurable pour la famille $(\mathscr{C}(Y_{T_m+u}))_{u>0}$ , donc mesurable, que $f \circ Y_{T_m+T_k^m-s}\, I_{\{T_m<T_k-s\leq T_{m-1}\}}$ est une fonction $\mathscr{C}(Y_{T_m+u}\text{ , } u > 0)$-mesurable, donc $\mathcal{C}$-mesurable. Ceci termine la 1ère partie du lemme.

<u>2ème partie</u>. - A partir de ce qui précède prouvons le lemme. Soit $S$ un temps d'arrêt intrinsèque strict. Il est d'abord évident que les v.a. $Y_{(T_n+u)\wedge S}$ sont $\mathcal{G}_S^{sat}$-mesurables puisque $\mathcal{G}_S^{sat} = \mathcal{G}_S \cap \mathcal{G}^{sat}$.

Inversement soit $f$ une fonction $\mathcal{G}_S^{sat}$-mesurable. Elle est donc $\mathcal{G}^{sat}$-mesurable, donc d'après la 1ère partie de la démonstration il existe une fonction $h$ borélienne sur $(\{6\} \cup E \cup \{\partial\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$f = h((Y_{T_{m_k}+u_k})_{k\in\mathbb{N}}) \qquad (u_k \in \mathbb{Q}_+) \quad .$$

D'autre part la fonction $f$ est aussi $\mathcal{G}_S$-mesurable. Désignons alors par $\alpha_S$ l'opérateur d'arrêt relatif au temps $S$ : $Y_t(\alpha_S(w)) = Y_{t\wedge S}(w)$ et montrons que $f = f \circ \alpha_S$. Pour cela notons $\mathcal{C}(\alpha_S)$ la tribu $\alpha_S^{-1}(\mathcal{G})$ ; on voit facilement que $\mathcal{C}(\alpha_S) = \mathcal{C}(Y_{t\wedge S}, t \in \mathbb{R})$ : en effet si $g$ est une fonction $\mathcal{G}$-mesurable, $g \circ \alpha_S$ est $\mathcal{C}(\alpha_S)$-mesurable, par conséquent en remplaçant $g$ par $Y_t$ on constate que $\mathcal{C}(Y_{t\wedge S}, t \in \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\alpha_S)$ ; réciproquement l'ensemble de fonctions $H = \{h : h \in \mathcal{G}$ et $h \circ \alpha_S \in \mathcal{C}(Y_{t\wedge S}, t \in \mathbb{R})\}$ est un espace vectoriel contenant les $Y_t$, $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\mathcal{C}(\alpha_S) \subset \mathcal{C}(Y_{t\wedge S}, t \in \mathbb{R})$. Mais BLUMENTHAL et GETOOR ont montré que les tribus $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{C}(Y_{t\wedge S}, t \in \mathbb{R})$ sont les mêmes, par suite les tribus $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{C}(\alpha_S)$ sont égales, donc il existe une fonction borélienne $g$ telle que $f = g \circ \alpha_S$ et il est clair que l'on peut choisir $g = f$ car $f \circ \alpha_S = g \circ \alpha_S \circ \alpha_S = g \circ \alpha_S$.

Il résulte de tout cela qu'il existe une fonction **h borélienne** sur $(\{6\}) \cup E \cup \{\partial\})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$f = h((Y_{T_{m_k}+u_k} \circ \alpha_S)) \qquad u_k \in \mathbb{Q}$$

Or

$$Y_{T_{m_k}+u_k} \circ \alpha_S(w) = Y_{T_{m_k}(\alpha_S(w))+u_k}(\alpha_S w)$$

$$= Y_{(T_{m_k}(\alpha_S(w))+u_k)\wedge S(\alpha_S(w))}(w)$$

et

$$S(\alpha_S(w)) = S(w)$$

$$T_{m_k}(\alpha_S(w)) = \begin{cases} T_{m_k}(w) & \text{si} \quad T_{m_k}(w) < S(w) \\ S(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} Y_{T_{m_k}+u_k}(\alpha_S w) &= Y_{(T_{m_k}(\alpha_S(w)+u_k)\wedge S(w)}(w) \\ &= Y_{(T_{m_k}+u_k)\wedge S}(w) \end{aligned}$$

et ceci termine la démonstration du lemme.

Désignons maintenant par $(\Omega_n)_{n\in \mathbb{N}}$ une série de copies de $\Omega$ , et pour $n \geq 1$ soit $p_n$ l'application suivante de $\Omega_n$ dans $\Omega_{n-1}$

$$X_t^{n-1}(p_n(\omega_n)) = X^n_{T_n(\omega_n)+t}(\omega_n) \qquad (t > 0)\ (\omega_n \in \Omega_n)$$

où $X_s^n$ , $X_s^{n-1}$ sont des applications coordonnées sur $\Omega_n$ , $\Omega_{n-1}$ respectivement, et $T_n$ désigne comme plus haut le temps d'entrée dans $H_n$ . Autrement dit, $p_n$ est l'opérateur de translation $\theta_{T_n}$ , mais considéré comme une application non pas de $\Omega$ dans $\Omega$ , mais de $\Omega_n$ dans $\Omega_{n-1}$ . Il est immédiat de vérifier que les espaces $(\Omega_n , \mathcal{F}_n^o)$ et les applications $p_n$ forment un système projectif ; nous en désignerons par $(\overline{\Omega} , \overline{\mathcal{F}})$ la limite projective (si $q_n$ est la projection canonique de $\overline{\Omega}$ dans $\Omega_n$ , alors $\overline{\mathcal{F}}$ est la tribu sur $\overline{\Omega}$ engendrée par les applications $q_n$ ; pour plus de détails voir le § 3). Considérons maintenant l'application $\phi_n$ de $W$ dans $\Omega_n$ définie par

$$X_t^n(\phi_n(w)) = Y_{T_{n+1}(w)+t}(w) \qquad (t > 0) \quad (w \in W)$$

$(\phi_n(w)$ appartient bien à $\Omega_n$, du fait que $T_{n+1}(w) > -\infty$, et que $T_{n+1}(w) \geq a(w)$, ce qui entraîne $Y_{T_n(w)+t} \neq 6$ pour $t > 0$ ; on peut avoir $T_{n+1}(w) = a(w)$, donc $Y_{T_{n+1}}(w) = 6$ et c'est pourquoi $\Omega$ doit être défini comme ensemble d'applications de $]0, +\infty[$ <u>ouvert</u> dans $E \cup \{\partial\})$. Ces applications $(\phi_n)$ sont mesurables, satisfont à $\phi_{n-1} = p_n \circ \phi_n$, et on en déduit une application $\phi$ de $W$ dans $\overline{\Omega}$. Il est alors immédiat que $\phi$ passe au quotient suivant (TR), ce qui nous donne une application $\phi'$.

**<u>THÉORÈME 1.1.</u>**

<u>L'application</u> $\phi'$ <u>de</u> $(W', \mathcal{G}')$ <u>dans</u> $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ <u>est un isomorphisme</u>.

**<u>DÉMONSTRATION.</u>**

Comme chaque application $\phi_n$, $n \in \mathbb{N}$, est $(\mathcal{G}^{sat}, \mathcal{F}_n^o)$-mesurable, on en déduit que $\phi$ est $(\mathcal{G}^{sat}, \overline{\mathcal{F}})$-mesurable.

D'autre part si $\phi(w) = \phi(w')$, cela signifie que $\phi_n(w) = \phi_n(w')$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent $w = w'(TR)$, donc $\phi'$ est injectif.

Il reste à montrer que $\phi$, donc $\phi'$, est surjectif : en effet soit $\overline{\omega} = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\overline{\Omega}$ et posons

$$n_o(\overline{\omega}) = \inf(i : \omega_i \neq [\partial])$$

$$a_n(\overline{\omega}) = \begin{cases} -\sum\limits_{n_o(\overline{\omega})+1}^{n} T_i(\omega_i) & \text{si} \quad n > n_o(\overline{\omega}) \\ = 0 & \text{si} \quad n = n_o(\overline{\omega}) \\ +\infty & \text{si} \quad n < n_o(\overline{\omega}) \end{cases}$$

$$\overline{X}_t(\overline{\omega}) = \begin{cases} \begin{cases} X_t(\omega_o) & \text{si } t \geq 0 \text{ et si pour tout } i \in \mathbb{N} \;\; T_i(\omega_i) < \zeta(\omega_i) \\ \partial & \text{si } t \geq 0 \text{ et s'il existe } i \geq 1 \text{ tel que } \;\; T_i(\omega_i) \geq \zeta(\omega_i) \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} X_{t-a_n}(\omega_n) & \text{si } a_n(\overline{\omega}) \leq t < a_{n-1}(\overline{\omega}) \text{ et si pour tout } \; i > n : \; T_i(\omega_i) < \zeta(\omega_i) \\ \partial & \text{si } a_n(\overline{\omega}) \leq t < a_{n-1}(\overline{\omega}) \text{ et s'il existe } i > n \text{ tel que } \\ & \qquad T_i(\omega_i) \geq \zeta(\omega_i) \end{cases} \\ \vdots \end{cases}$$

L'application $w : t \mapsto \overline{X}_t(\overline{\omega})$ , $t \in R$ , appartient bien à $W$ et il est clair que $\phi_n(w) = \omega_n$ et donc $\phi(w) = \overline{\omega}$ .

L'importance de ce résultat tient à ce qu'il permet, en appliquant des théorèmes sur les limites projectives (voir le § 3) , de construire des mesures sur $(W', \mathcal{G}')$ ou de manière équivalente sur $(W , \mathcal{G}^{sat})$ . Ces espaces sont par ailleurs plus intéressants que $\overline{\Omega}$ , qui est compliqué, et dont la définition dépend du choix de la suite d'ouverts relativement compacts $(H_n)$ .

Nous définissons maintenant les quasi-processus et leurs mesures potentiels. La dernière condition est probablement trop restrictive, mais elle sera vérifiée par les quasi-processus que nous rencontrerons.

DÉFINITION 1.3.

Un quasi-processus est un triplet $(W , \mathcal{G}^{sat} , \mu)$ , où $\mu$ est une mesure $\sigma$-finie, qui ne charge pas la classe $[\partial]$ , et telle que pour tout temps d'arrêt intrinsèque $S$ et tout $t > 0$ la mesure image de $\mu$ par $Y_{S+t}$

soit finie sur les compacts de $E$ (elle peut attribuer la masse $+\infty$ aux points $\delta$ et $\partial$) .

Naturellement on peut transporter cette définition sur $W'$ .

DÉFINITION 1.4.

Un quasi-processus $(W, \mathcal{G}^{sat}, \mu)$ est dit markovien (admettant $(P_t)$ comme semi-groupe de transition) si pour tout temps d'arrêt intrinsèque $S$ le processus $(Y_{S+t})_{t>0}$ , considéré sur $\{a \leq S < b\}$ , est un processus de Markov admettant $(P_t)$ comme semi-groupe de transition. (*)

Nous verrons qu'alors $(Y_{S+t})_{t>0}$ est markovien par support à la famille de tribus $(\mathcal{G}^{sat}_{S+t})_{t>0}$ .

Nous écrirons les intégrales par rapport à $\mu$ au moyen du signe $E_{\mu}$ , comme s'il s'agissait de processus ordinaires. Dans ces conditions, soit $f$ une fonction borélienne positive sur $E$ , que nous prolongerons par $0$ aux points $\delta$ et $\partial$ . La fonction $w \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(Y_s(w))ds$ est mesurable par rapport à $\mathcal{G}^{sat}$, et nous pouvons poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.5.

On appelle mesure potentiel du quasi-processus $\mu$ la mesure positive

---

(*) Rappelons que les temps d'arrêt intrinsèques sont les fonctions intrinsèques qui sont des temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{G}_{t+})$ non complétée , mais la propriété s'étend aussitôt à toute variable aléatoire $S$ égale $\mu$-p.s. à un temps d'arrêt intrinsèque.

(non nécessairement $\sigma$-finie) $\eta$ sur $E$, définie par

$$\eta(f) = \underset{m}{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ Y_s \, ds\right] .$$

Cette intégrale est étendue en fait de $a$ à $+\infty$ (ou à $b$). Avec les notations utilisées plus haut, $\eta$ est donc l'enveloppe supérieure des mesures $\eta_n$ définies par

$$\eta_n(f) = \underset{m}{E}\left[\int_0^{+\infty} f \circ Y_{T_n+s} \, ds\right] .$$

## 2. CONSTRUCTION DE QUASI-PROCESSUS MARKOVIENS.

Nous allons commencer par rappeler quelques points de la théorie des mesures excessives. Ces résultats sont établis dans HUNT [2].

Soit $\eta$ une mesure (de Radon) excessive sur $E$. Alors

1) Il existe une suite de mesures positives $\lambda_n$ dont les potentiels $\lambda_n U$ tendent en croissant vers $\eta$.

2) Soient $A$ un ensemble borélien et $T_A$ un temps d'entrée (à partir de l'espace $\Omega$). Les mesures $\lambda_n P_A U$ (où nous écrivons $P_A$ pour $P_{T_A}$) tendent en croissant vers une mesure excessive majorée par $\eta$, qui ne dépend que de $\eta$ et de $A$, et non de la suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilisée. On désigne cette mesure par $\eta L_A$ (bien que $L_A$ ne soit pas un noyau). Si $\eta$ est un potentiel $\lambda U$, on a $\eta L_A = \lambda P_A U$. Si des mesures excessives $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

tendent vers $\eta$ en croissant, $\eta_n L_A$ tend en croissant vers $\eta L_A$ .

3) Si $A$ est finement ouvert, $\eta L_A$ est la plus petite mesure excessive majorant $\eta$ sur $A$ .

4) Si $A$ et $B$ sont deux ensembles tels que $P_A P_B = P_B$ (en particulier si $B$ est finement ouvert et $A$ contient $B$) ; alors $\eta L_A L_B = \eta L_B$ .

5) Si $A$ est un ensemble borélien relativement compact, alors $\eta L_A$ est le potentiel d'une mesure positive bornée portée par $\bar{A}$ .

Au moyen de ces résultats, et du fait que le semi-groupe applique $C_c$ dans $C_b$, il est facile de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts relativement compacts, telle que $\bar{H}_n \subset H_{n+1}$ et que $\bigcup_n H_n = E$ . Alors il existe des mesures positives bornées $\lambda_n$ sur $E$ telles que

$$\lambda_{n+1} P_{H_n} = \lambda_n \qquad \text{pour tout} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_n U \uparrow \eta \qquad \text{lorsque} \quad n \quad \text{tend vers} \quad +\infty \ .$$

La suite $(\lambda_n)$ est uniquement caractérisée par ces propriétés, et on a $\lambda_n U = \eta L_{H_n}$ .

Nous pouvons maintenant démontrer, dans le cas continu, le théorème de HUNT :

THÉORÈME 2.1.

Soit $\eta$ une mesure de Radon excessive sur $E$ . Alors $\eta$ est la mesure potentiel d'un quasi-processus markovien $(W, \mathcal{G}^{sat}, \mu)$ unique.

DÉMONSTRATION.

Commençons par construire la mesure $\mu$ . Au paragraphe 3 nous prouverons le théorème suivant où $q_n$ est la projection canonique de $\bar{\Omega}$ sur $\Omega_n$ :

PROPOSITION 2.2.

Il existe sur la limite projective $\bar{\Omega}$ une mesure $\sigma$-finie $\nu$ , telle que pour tout $n$ la mesure $q_n(\nu)$ et la mesure $\underset{\approx}{P}^{\lambda_n}$ coïncident sur $\Omega - \{[\partial]\}$ (la mesure $q_n(\nu)$ peut attribuer la masse $+\infty$ à la trajectoire $[\partial]$ ).

Ceci nous permet de définir sur $(W', \mathcal{G}')$ la mesure suivante : $\mu' \equiv \phi'\nu$ où $\phi'$ est l'inverse de la bijection $\phi$ du théorème 1.1. .Si $k$ est l'application quotient de $W'$ sur $W' = W/(TR)$ nous noterons alors $\mu$ la fonction d'ensemble sur $\mathcal{G}^{sat}$ : $A \mapsto \mu(A) = \mu'(k(A))$ . C'est une mesure car les éléments de $\mathcal{G}^{sat}$ sont saturés pour la relation d'équivalence.

La suite de la démonstration consiste à vérifier que cette mesure $\mu$ a les propriétés voulues.

Il est d'abord immédiat que $\eta$ est la mesure potentiel de $\mu$ : $\eta(f) = \underset{\approx}{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ Y_s \, ds\right]$ où $f$ est une fonction borélienne positive ; ceci en vertu de la proposition 2.1. et de la remarque suivant la définition 1.5. .

Montrons ensuite la propriété de Markov, c'est-à-dire que, pour tout temps d'arrêt intrinsèque $S$ , le processus $(Y_{S+t})_{t>0}$ est markovien pour la famille $(\mathcal{G}^{sat}_{S+t})_{t>0}$ et la mesure $\mu$ . D'après la construction de l'espace $\overline{\Omega}$ et de la mesure $\mu$ , et du théorème 1.1., il résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , le processus $(Y_{T_n+t})_{t>0}$ est markovien pour la famille de tribus $(\mathcal{G}^{sat}_{T_n+t})_{t>0}$ . Soient alors $S$ un temps d'arrêt intrinsèque et $S_n$ le temps suivant :

$$S_n = \begin{cases} S & \text{si} \quad S \geq T_n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_n - T_n$ est un temps d'arrêt de la famille $(\mathcal{G}^{sat}_{T_n+t})_{t>0}$ ; par conséquent en appliquant la propriété forte de Markov au processus $(Y_{T_n+t} , \mathcal{G}^{sat}_{T_n+t})_{t>0}$ on trouve que le processus $(Y_{S_n+t})_{t>0}$ est markovien pour la famille de tribus $(\mathcal{G}^{sat}_{S_n+t})_{t>0}$ . D'autre part les tribus $\mathcal{G}^{sat}_{S_n+t}$ et $\mathcal{G}^{sat}_{S+t}$ coïncident sur l'ensemble $\{T_n \leq S < T_{n-1}\}$ et par suite, pour toute **fonction borélienne** borélienne $f$ on a :

$$\begin{aligned} \underset{\mu}{E}\,[f \circ Y_{S+t+s}\, I_{\{T_n \leq S < T_{n-1}\}} \mid \mathcal{G}^{sat}_{S+t}] &= \underset{\mu}{E}\,[f \circ Y_{S_n+t+s}\, I_{\{T_n \leq S < T_{n-1}\}} \mid \mathcal{G}^{sat}_{S_n+t}] \\ &= P_s(f \circ Y_{S_n+t})\, I_{\{T_n \leq S < T_{n-1}\}} \qquad \text{p.s.} \\ &= P_s(f \circ Y_{S+t})\, I_{\{T_n \leq S < T_{n-1}\}} \qquad \text{p.s.} \end{aligned}$$

On en déduit la propriété de Markov du processus $(Y_{S+t} , \mathcal{G}^{sat}_{S+t})_{t>0}$ .

Prouvons maintenant que le triplet $(W , \mathcal{G}^{sat} , \mu)$ est un quasi-processus, c'est-à-dire que pour tout $t > 0$ et pour tout temps d'arrêt intrinsèque $S$ la mesure image de $\mu$ par $Y_{S+t}$ est finie sur les compacts de $E$ . C'est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 2.1.

Soient $(P_t)$ un semi-groupe standard dont l'opérateur potentiel $U$ applique $C_c$ dans $C_b$ , $(\sigma_t)_{t>0}$ une loi d'entrée sur $E$ telle que pour $t > 0$ $\sigma_t U \leq \eta$ où $\eta$ est une mesure de Radon. Désignons par $(X_t)_{t>0}$ un processus markovien continu à droite, admettant $(P_t)$ pour semi-groupe et $(\sigma_t)_{t>0}$ pour loi d'entrée. Enfin soit $K$ un compact de $E$ et supposons que son temps d'entrée $T_k$ soit nul p.s.

Alors la loi d'entrée $(\sigma_t)_{t>0}$ admet une loi initiale $\sigma_o$ portée par $K$ .

DÉMONSTRATION DU LEMME.

1ère partie. - Supposons tout d'abord que $(\sigma_t)_{t>0}$ soit une loi d'entrée bornée et suivant MEYER [5] compactifions l'espace $E$ par rapport aux $Uf$ , $f \in C_c(E)$ ; nous obtenons un espace compact $F$ et une injection continue $i$ de $E$ dans $F$ ; comme le semi-groupe $(P_t)$ est standard, de cette manière nous n'identifions pas ainsi de point de $E$ entre eux et $K$ est un compact de $F$ . Alors d'après un théorème T 49 p. 45 de MEYER [5] la limite $X_o = \lim\limits_{t\downarrow 0, t>0} X_t$ et donc la mesure $\sigma_o$ existe et il y a $P_{\mu}^{\sigma_o}$-p.s. continuité à droite à l'instant $0$ . Par conséquent la mesure $\sigma_o$ est portée par le compact $K$ .

2ème partie. - Supposons maintenant que la loi d'entrée $(\sigma_t)_{t>0}$ vérifie l'hypothèse du lemme : $\sigma_t U \leq \eta$ pour tout $t > 0$ , où $\eta$ est une mesure de Radon. Choisissons alors une fonction $h$ continue, bornée, strictement positive partout, telle que $Uh = u$ soit bornée et $< \eta , h > < \infty$ . Il existe donc une constante $M$ telle que $< \sigma_t U , h > \leq M$ et par suite $< \sigma_t , u > \leq M$ .

La fonction $u$ est excessive pour le semi-groupe standard $(P_t)$ et par suite le semi-groupe $(P_t^{(u)})$ transformée surharmonique de $(P_t)$ par $u$ :

$$P_t^{(u)}(x\ ,\ f) = \frac{1}{u(x)}\, P_t(x\ ,\ uf)$$ où $f$ fonction universellement mesurable sur $E$ ,

est encore standard, et les $u.\lambda_t$ constituent une loi d'entrée, bornée, pour le semi-groupe $(P_t^{(u)})$ . On utilise alors les résultats de la 1ère partie et on en déduit le lemme.

Revenons maintenant au théorème et montrons que la <u>mesure</u> $\mu$ <u>est</u> unique. Soit donc $\mu$ une mesure sur $W$ de potentiel $\eta$ et désignons par $\mu_n = p_n(\mu)$ , $n \in \mathbb{N}$ , la mesure sur $\Omega$ image de $\mu$ par $\theta_{T_{H_n}}$ et par $\nu_n$ la mesure $\mu_n$ débarassée de la masse en $[\partial]$ .

D'après le lemme précédent il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , une mesure $\lambda_n$ bornée, portée par $\overline{H}_n$ telle que $\nu_n = \underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ et ces mesures vérifient, sur $E$ ,

$$\lambda_{n-1} = \lambda_n P_{H_{n-1}}$$

$$\lim_n \lambda_n U = \eta \quad .$$

Par conséquent elles satisfont à

$$\begin{aligned} \lambda_n U &= (\lambda_p U) L_{H_n} \qquad\qquad p > n \\ &= \eta\, L_{H_n} \quad . \end{aligned}$$

Or cette dernière équation caractérise la mesure $\lambda_n$ , et par suite les images $p_n(\mu) = \mu_n$ sont connues si l'on connaît $\eta$ , à la masse près au point $[\partial]$ . On connaît donc les lois des variables aléatoires $Y_{T_n+t}$ , $t > 0$ et les mesures des ensembles $\{T_n < \infty\}$ (ce sont les masses des $\lambda_n$) , donc, par le semi-groupe $(P_t)$ , les mesures des ensembles $\{Y_{T_n+t} = \partial\}$ .

Ainsi si l'on a deux mesures $\mu$ et $\mu'$ ayant même mesure potentiel $\eta$ , on vient de montrer que pour tout $n$ , les processus $(Y_{T_n+t})_{t>0}$ ont mêmes lois. Par conséquent les deux mesures coïncident sur $\mathcal{G}^{sat}$ et cela montre l'unicité.

## 3. UN THÉORÈME D'EXISTENCE DE LIMITES PROJECTIVES ET APPLICATIONS AUX PROCESSUS MARKOVIENS. (*)

### LIMITES PROJECTIVES.

Rappelons (voir BOURBAKI [1]) qu'un espace topologique $\Gamma$ est dit lusinien s'il est séparé (non nécessairement métrisable) , et s'il existe sur $\Gamma$ une topologie d'espace polonais plus fine que la topologie donnée. Les espaces lusiniens jouissent de propriétés très satisfaisantes du point de vue de la théorie de la mesure : par exemple, toutes les mesures bornées sur la tribu borélienne de $\Gamma$ sont intérieurement régulières. Nous dirons qu'un espace mesurable $(\Gamma , \mathcal{B})$ est lusinien s'il existe une topologie lusinienne sur $\Gamma$ dont $\mathcal{B}$ soit la tribu borélienne.

Le théorème suivant permet de montrer dans certains cas l'existence de limites projectives sans considérations topologiques.

### THÉORÈME 3.1.

Soient $(\Gamma_n , \mathcal{B}_n , \pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces probabilisés, et $(\theta_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables $\theta_n : \Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$ . On suppose

(*) Nous reprenons, ici, la Note [6] .

<u>que les</u> $\pi_n$ <u>forment un système projectif de mesures</u> $(\theta_n(\pi_n) = \pi_{n-1}$ <u>pour</u> $n \geq 1)$ , <u>que tous les espaces mesurables</u> $(\Gamma_n , \mathcal{B}_n)$ <u>sont lusiniens</u>. <u>Soit</u> $\overline{\Gamma}$ <u>la limite projective des</u> $\Gamma_n$ ; <u>pour tout</u> $n$ , <u>soit</u> $q_n$ <u>la projection canonique de</u> $\overline{\Gamma}$ <u>dans</u> $\Gamma_n$ . <u>Alors</u> :

1) <u>l'espace mesurable</u> $(\overline{\Gamma} , \overline{\mathcal{B}})$ <u>où</u> $\overline{\mathcal{B}}$ <u>est engendrée par les fonctions</u> $q_n$, <u>est lusinien</u> .

2) <u>Il existe sur cet espace une loi</u> $\pi$ <u>et une seule telle que</u> $q_n(\pi) = \pi_n$ <u>pour tout</u> $n$ .

<u>DÉMONSTRATION</u>.

Supposons d'abord que nous ayons muni les espaces $\Gamma_n$ de topologies lusiniennes compatibles avec les tribus $\mathcal{B}_n$ , et rendant continues les applications boréliennes $\theta_n$ : alors le théorème est bien connu : sachant que toutes les mesures bornées sur un espace lusinien sont intérieurement régulières, la démonstration classique de PROKHOROV pour le cas des espaces polonais s'applique sans modification essentielle. La tribu $\overline{\mathcal{B}}$ est la tribu borélienne de l'espace topologique (lusinien) $\overline{\Gamma}$ , limite projective topologique des $\Gamma_n$ .

Nous allons ramener le cas général au cas particulier précédent. Munissons les $\Gamma_n$ , de façon arbitraire, de topologies lusiniennes compatibles avec les tribus $\mathcal{B}_n$ , et montrons qu'on peut alors munir chaque $\Gamma_n$ d'une topologie lusinienne plus fine que la topologie initiale (et donc encore compatible avec $\mathcal{B}_n$) , de telle sorte que toutes les applications $\theta_n$ soient continues pour les nouvelles topologies. Nous ne modifions pas la topologie de $\Gamma_o$ ; traitons le cas où $n = 1$ (on procède ensuite de manière récurrente) . Tout revient évidemment à montrer que la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine sur $\Gamma_1$ , qui soit plus fine que la topologie initiale de $\Gamma_1$ et rende $\theta_1$

continue, est encore lusinienne. Or, soit $G$ le graphe de $\theta_1$ dans $\Gamma_1 \times \Gamma_o$ ; $\Gamma_1$ muni de $\mathcal{C}$ est homéomorphe à $G$ muni de la topologie induite par $\Gamma_1 \times \Gamma_o$. Il suffit alors de remarquer que $\Gamma_1 \times \Gamma_o$ est lusinien, que $G$ est borélien dans $\Gamma_1 \times \Gamma_o$, et qu'un sous-espace borélien d'un espace lusinien est lusinien.

EXEMPLE.

Revenons aux notations du paragraphe 1 et prenons maintenant tous les $(\Gamma_n , \mathcal{B}_n)$ égaux à $(\Omega , \mathcal{F}^o)$. On peut alors montrer que $(\Omega , \mathcal{F}^o)$ est un espace mesurable lusinien (*). Pour les applications $(\theta_n)_{n\geq 1}$ nous choisirons la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ (définie au paragraphe 1). Rappelons sa construction : donnonsnous une suite croissante $(H_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts relativement compacts recouvrant $E$, et pour tout $\omega \in \Omega$ notons $T_n(\omega)$ le temps d'entrée dans $H_n$, et $p_n$ l'application $t \mapsto X_{T_n(\omega)+t}(\omega)$, avec la convention usuelle $X_\infty(\omega) = \partial$ si $T_n(\omega) = +\infty$ ; on vérifie aussitôt que $p_n$ est une application mesurable (borélienne) du fait que les $H_n$ ont été choisis ouverts.

APPLICATION AU PROCESSUS DE MARKOV.

Considérons maintenant le semi-groupe $(P_t)$ utilisé dans les paragraphes précédents et soit $\eta$ une mesure de Radon excessive sur $E$. Par la proposition 2.1. il existe une suite $(\lambda_n)$ de mesures positives bornées sur $E$ satisfaisant, avec les notations précédentes, aux conditions

---

(*) Remarque due à P.A. MEYER. La démonstration est publiée dans un exposé de DELLACHERIE du volume III du Séminaire de Probabilités de Strasbourg.

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda_n = \lambda_{n+1} P_{H_n} & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \eta = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n U & . \end{cases}$$

Désignons alors par $\underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ la mesure $\int \lambda_n(dx)\underset{\sim}{P}^x(.)$ sur $\Omega$ et rappelons que $[\partial]$ est l'élément de $\Omega$ défini par $X_t(\omega) = \partial$ pour tout $t > 0$. La relation (1) et la propriété de Markov forte entraînent que l'on a $p_n \underset{\sim}{P}^{\lambda_n} = \underset{\sim}{P}^{\lambda_{n-1}} + k\,\varepsilon_{[\partial]}$ où $k$ est la mesure (pour $\underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$) de l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui ne rencontrent pas $\partial$. Les mesures $\underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ ne forment donc pas un système projectif mais un système "sur-projectif", et en particulier la masse totale de $\underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ peut tendre vers l'infini avec $n$. On a cependant le résultat suivant (où $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{F}})$ est la limite projective du théorème 3.1.)qui nous a permis, au paragraphe 2, de résoudre le problème de représentation de $\eta$.

THÉORÈME 3.2.

*Il existe sur la limite projective $\bar{\Omega}$ une mesure $\sigma$-finie $\nu$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la mesure $q_n(\nu)$ et la mesure $\underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ coïncident sur $\Omega - \{[\partial]\}$ (la mesure $q_n(\nu)$ peut attribuer la masse $+\infty$ à la trajectoire $[\partial]$).*

DÉMONSTRATION.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ désignons par $I_m$ l'indicatrice de l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui rencontrent $H_m$. Les mesures $I_m \cdot \underset{\sim}{P}^{\lambda_n}$ pour $n \geq m$ forment alors un système projectif de mesures bornées ; en effet on a $p_n(I_m \cdot \underset{\sim}{P}^{\lambda_n}) = I_m \cdot \underset{\sim}{P}^{\lambda_{n+1}}$ si $n \geq m+1$ ; donc par le théorème 3.1. il existe une mesure sur $\overline{\Omega}$ , notée $\nu_m$ qui est la limite projective des mesures $(I_m \cdot \overset{\lambda}{\underset{\sim}{P}}{}^n)_{n\geq m}$ . Mais les mesures $\nu_m$ croissent avec $m$ , car $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions. On prendra alors $\nu = \lim\limits_{m\to\infty} \nu_m$ . Les propriétés de l'énoncé sont des conséquences du théorème 3.1.

## BIBLIOGRAPHIE.


[1] N. BOURBAKI Topologie générale - chap. IX, § 6 .

[2] G.A. HUNT Markov processes and potentials I. IJM 1, 44-93 (1957).

[3] G.A. HUNT Markov chains and Martin boundaries. IJM 4, 313-340 (1960).

[4] P.A. MEYER Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics. n° 26 (1967) - Springer.

[5] P.A. MEYER Processus de Markov : la frontière de Martin. Lecture Notes in Mathematics. n° 77 (1968) - Springer.

[6] M. WEIL C.R. Acad. Sc. Paris - t. 267 - p. 653-655 (28 octobre 1968).