Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Gabriel Mokobodzki

Quelques propriétés remarquables des opérateurs presque positifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 195-207
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__195_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

QUELQUES PROPRIETES REMARQUABLES DES OPERATEURS PRESQUE POSITIFS

par Gabriel MOKOBODZKI

*

Cet exposé fait suite à celui intitulé "Densité relative de deux potentiels comparables" dont on utilisera les définitions et les résultats.

Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs sur $(X,\mathcal{B})$. On suppose que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ est un noyau borné. On désigne par C et S respectivement le cône des fonctions surmédianes et le cône des fonctions excessives pour la famille résolvante (V_λ), enfin F désigne l'ensemble de toutes les applications de X dans $\bar{\mathbb{R}}$.

DEFINITION 1.

On dira qu'un opérateur D de C dans F est presque positif s'il vérifie la condition suivante :

(P.P.) $[v_1, v_2 \in C,\ v_1 \geq v_2, v_1(x) = v_2(x)] \Rightarrow [D\, v_1(x) \leq D\, v_2(x)]$.

Cette définition est empruntée à WALDENFELS [4] , avec une légère modification.

Exemple.

Si N est un noyau, et $\lambda>0$, $D = \lambda(I-N)$ est un opérateur presque positif. En particulier, les opérateurs $D_\lambda = \lambda(I-\lambda V_\lambda)$ sont presque positifs. Il résulte des propriétés suivantes que les opérateurs $\limsup_{\lambda\to\infty} D_\lambda$,

$\liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sont presque positifs.

Propriétés immédiates.

a) Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur la famille des opérateurs presque positifs définis sur C .

L'opérateur $D = \lim_{\mathcal{U}}$ défini par $D_o v(x) = \lim_{\mathcal{U}} Dv(x)$ $\forall x \in X$, $v \in C$ est presque positif.

b) Si D est presque positif et si φ est une application croissante de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'opérateur $\varphi \circ D$ est presque positif.

c) Si D_1 et D_2 sont presque positifs,

$\sup(D_1,D_2) : v \mapsto \sup [D_1(v),D_2(v)]$

et $\inf(D_1,D_2) : v \to \inf [D_1(v),D_2(v)]$ sont des opérateurs presque positifs.

d) Si D_1 , D_2 sont presque positifs et si $D_1 v(x) > -\infty$ $\forall v \in C$ et $x \in X$, alors $D_1 + D_2$ est presque positif .

e) Si D est presque positif, $D(\inf(v_1,v_2)) \geq \inf(D(v_1),D(v_2))$.

Considérons la famille $\mathcal{E}$ des opérateurs presque positifs sur C satisfaisant aux conditions suivantes

a) $D(w_1 + w_2) \geq D(w_1) \geq 0 \qquad \forall (w_1,w_2) \in C$.

b) $D(w) \geq 0 \qquad \forall w \in C$ et $D(w+\varepsilon V_1) \leq Dw + \varepsilon DV_1$

$\forall w \in C$ et $\varepsilon > 0$

c) Pour toute fonction $\varphi \geq 0$ de la forme $\varphi = g_1 - g_2$ où g_1 et g_2 sont excessives bornées, on a

$$DV\varphi = \varphi$$

La famille $\mathcal{E}$ n'est pas vide, car elle contient les opérateurs $\limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ et $\liminf_{\lambda \to \infty} D_\lambda$.

On se propose d'abord d'établir le résultat suivant (théorème 5 ci-dessous).

Soit $D \in \mathcal{E}$, et soit $\varphi \geq 0$, mesurable et bornée. Alors $DV\varphi = \limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda V \varphi$ V-presque partout. Si, en outre φ est mesurable pour la tribu engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout.

Si l'on remarque que les opérateurs définis par

$$\overline{D}w(x) = \sup_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

$$\underline{D}w(x) = \inf_{D \in \mathcal{E}} Dw(x)$$

appartiennent encore à $\mathcal{E}$, on voit que les ensembles V-négligeables considérés ne dépendent que de φ, et peuvent être choisis indépendamment de D.

Nous n'utiliserons pas immédiatement toutes les hypothèses précédentes. Nous supposerons seulement dans la suite que D est un opérateur presque positif sur C satisfaisant aux conditions a), b) et à la condition c') suivante

c') $DV1$ est fini V-presque partout.

Cette condition résulte de c), car si φ est la régularisée excessive de la fonction surmédiane 1, on a $DV1 = DV\varphi = \varphi$ si c) est satisfaite. Par exemple, l'opérateur $\sup_\lambda D_\lambda$ satisfait à a), b), c').

Nous désignerons par D_o, dans toute la suite, l'opérateur $\limsup_{\lambda \to \infty} D_\lambda$ sur C.

THEOREME 2.

Soient (u_n) et $(v_n) \subset C$ deux suites telles que

a) $u_n \prec v_1$ pour tout n

b) la suite $(u_n - v_n)$ converge simplement V-presque partout vers 0.

Dans ces conditions, pour toute fonction excessive w, la suite $R(u_n-v_n+w)$ converge simplement partout vers w.

DEMONSTRATION

Montrons d'abord que la suite $R(u_n-v_n)$ tend simplement partout vers 0.

Pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$R(u_n-v_n) \leq R(u_n-v_n-\varepsilon)+\varepsilon$$

et si $A_n = \{u_n-v_n \geq \varepsilon\}$, on a $R(u_n-v_n-\varepsilon) \prec V\,1_{A_n}$

(Prop. 12 de l'exposé précédent). Comme $\lim\,(u_n-v_n) = 0$ V-presque partout, l'ensemble $E=\bigcap_p \big(\bigcup_{m\geq p} A_m\big)$ est V-négligeable, $\lim V1_{A_n} = 0$ et $\lim R(u_n-v_n-\varepsilon)=0$. Ce résultat étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a bien $\lim R(u_n-v_n) = 0$.

Soit maintenant w excessive ; on a toujours

$$R(u_n-v_n+w) \leq R(u_n-v_n)+ w$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} R(u_n-v_n+w) \leq w .$$

Rappelons que si v est surmédiane, $\hat{v} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda$ est excessive et que $v=\hat{v}$ V-presque partout. On a alors

$$\liminf (u_n-v_n+w) \leq \liminf R(u_n-v_n+w) \leq w$$

La fonction $s = \liminf R(u_n-v_n+w)$ est surmédiane et $s=w$ V-presque partout ; on a donc $\hat{s}= w$. D'autre part $\hat{s}\leq s$ et $s\leq w$, donc $s=w$ partout, d'où enfin $\lim_{n\to\infty} R(u_n-v_n+w) = w$ partout.

LEMME 3.

Soient $w\in C$, (u_n) une suite de fonctions excessives telles que $u_n = V\varphi_n$ $(\varphi_n \geq 0)$ et $u_n \prec w$ pour tout n. Pour l'ordre défini par le cône S des fonctions excessives, la borne supérieure u de la suite (u_n) est donnée par

$$u = V\,(\sup_n D_o\, u_n)$$

et on a $D_o u = \sup_n D_o u_n$ V-presque partout.

DEMONSTRATION

Si $v \in S$ et $v \succ u_n$ pour tout n on a $D_o v \geq \sup_n D_o u_n$, donc $v \succ VD_o v \succ V(\sup_n D_o u_n) \succ VD_o u_n = u_n$ pour tout n d'après le théorème 15 et le corollaire 16 de l'exposé précédent. On a donc bien $V(\sup_n D_o u_n) = u$.
On a aussi $D_o u \geq D_o u_n$ pour tout n, d'où

$$V(D_o u - \sup_n D_o u_n) = 0$$

Rappelons que D satisfait à a), b) et c') :

THEOREME 4.

Soient deux suites (u_n) et $(v_n) \subset C$ telles que

a) $u_n \prec V1$ et

b) pour toute fonction excessive w, $\lim_{n \to \infty} R(u_n - v_n + w) = w$

Dans ces conditions

$$\limsup Du_n \geq \liminf Dv_n \quad \text{V-presque partout.}$$

DEMONSTRATION

Posons $D_o v = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(v - \lambda V_\lambda v)$ pour tout $v \in C$. Choisissons $\epsilon > 0$, et pour tout n, posons $A_n^\epsilon = \{R(u_n - v_n + \epsilon\, V1) = u_n - v_n + \epsilon V1\}$.

D'après le théorème 20 de l'exposé précédent, on a $D_o(R(u_n - v_n + \epsilon V1)) = 0$ V-presque partout dans l'ensemble mesurable $\complement A_n^\epsilon$.

Posons $B = \bigcup_n A_n^\epsilon$ et montrons que $\complement B$ est V-négligeable.

Pour l'ordre défini par le cône S , soit u la borne supérieure de la famille $(R(u_n-v_n+\epsilon V1))$. D'après le lemme 3, on a (comme $R(u_n+\epsilon V1-v_n) \prec u_n + \epsilon V1 \prec (1+\epsilon)V1$:

$$D_o u = \sup_n D_o(R(u_n-v_n+\epsilon V1)) \quad V\text{-presque partout}$$

donc $\quad D_o u = 0$ V-presque partout dans $\complement B$.

Par hypothèse $\lim_n R(u_n-v_n+\epsilon V1) = \epsilon V1$, par suite on a aussi $\epsilon V1 \prec u$ et $0 \leq D_o(\epsilon V1) \leq D_o u \leq 0$ V-presque partout dans $\complement B$. On a $D_o(\epsilon V1) = \epsilon . (\sup \lambda V_\lambda 1) = \epsilon$ V-presque partout. On en conclut que $\complement B$ est V-négligeable.

Pour tout $x \in A_n^\epsilon$, on a

$$u_n + \epsilon V1 \leq R(u_n-v_n + \epsilon V1) + v_n$$

et
$$(u_n+ \epsilon V1)(x) = R(u_n-v_n+\epsilon V1)(x) + v_n(x)$$

L'opérateur D étant presque positif et satisfaisant à la condition a), on en déduit que $D(u_n+\epsilon V1)(x) \geq Dv_n(x)$ pour $x \in A_n^\epsilon$. Posons alors $E_\epsilon = \bigcap_p (\bigcup_{m\geq p} A_m^\epsilon)$; cet ensemble est mesurable, $\complement E_\epsilon$ est V-négligeable et pour tout $x \in E_\epsilon$ $\limsup D(u_n+\epsilon V1)(x) \geq \liminf Dv_n(x)$. En prenant $E = \bigcap_n E_{1/n}$, en tenant compte de l'inégalité $D(u_n+\epsilon V1) \leq D(u_n) + \epsilon DV1$ et du fait que $DV1$ est fini V-presque partout, on a

$$\limsup D(u_n)(x) \geq \liminf Dv_n(x) \qquad \forall x \in E \ .$$

Ce qui prouve le théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le premier résultat annoncé au début de l'exposé.

<u>THEOREME 5</u>.

Soit D un opérateur presque positif sur C appartenant à ξ, c'est-à-dire :

a) $D(v_1 + v_2) \geq D(v_1) \geq 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in C$

b) $D(u+\epsilon V1) \leq D(u) + \epsilon D(V1) \qquad \forall \epsilon > 0 \ , \ \forall u \in C$

c) Pour toutes fonctions excessives g_1, g_2 bornées, telles que $g_1 \geq g_2$, on a $D\,V(g_1 - g_2) = g_1 - g_2$.

Dans ces conditions, pour tout $u \in C$, $u \prec V1$, on a V-presque partout

$$\liminf_{n\to\infty} n(u - V_n u) \leq Du \leq \limsup_{n\to\infty} n(u - nV_n u)$$

DEMONSTRATION

L'outil essentiel sera le théorème 4. Considérons la suite $u_n = nV_n u$. On a $u_n = nV(u - nV_n u)$ et comme $u \prec V1$, on a $u - nV_n u \leq V1 - nV_n V1 = V_n 1$, et par suite $u_n \prec V1$ pour tout n.

Considérons maintenant la suite constante $v_n = u$, et appliquons les théorèmes 2 et 4 ; on obtient

$$\limsup Du_n \geq Du \qquad \text{V-presque partout}$$

et d'après c)

$$\limsup_{n\to\infty} n(u - V_n u) \geq Du \qquad \text{V-presque partout}$$

Si l'on échange les suites (u_n) et (v_n) pour appliquer le théorème 4, ce qui est possible dans ce cas particulier on obtient, V-presque partout

$$Du \geq \liminf_{n\to\infty} Du_n \qquad \text{et d'après c)}$$

$$Du \geq \liminf_{n\to\infty} n(u - nV_n u) \qquad \text{V-presque partout}$$

ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE 6.

Pour tout $u \in S$ tel que $u \prec kV1$, la fonction Du est V-mesurable et l'on a

$$u = VDu$$

pour tout opérateur presque positif $D \in \mathcal{E}$.

Nous retournons maintenant au cas plus général d'un opérateur presque positif D satisfaisant à a), b) et c') .

THEOREME 7.

Pour $w \in C$ et $\varphi \geq 0$ bornée , si $Dw(x) > D(V\varphi)(x)$ V-presque partout, alors $w \geq V\varphi$.

DEMONSTRATION.

Si l'on n'a pas $V\varphi \leq w$, alors $R(V\varphi - w) \not\leq 0$ et si $A=\{R(V\varphi - w) = V\varphi - w\}$ et $k=\sup \varphi$, on a $R(V\varphi - w) \prec k.V1_A$ (th. 12 de l'exposé précédent). L'ensemble A n'est pas V-négligeable, il existe donc $x \in A$ tel que $Dw(x) > DV\varphi(x)$. Mais ceci est contradictoire ; en effet, on a

$$V\varphi - R(V\varphi - w) \leq w$$

et $$[V\varphi - R(V\varphi - w)](x) = w(x)$$

ce qui impliquerait $$DV\varphi(x) \geq Dw(x) .$$

THEOREME 8

On suppose de plus que $D(0) = 0$ et que D est positivement homogène sur C . Alors pour toute fonction surmédiane w , Dw est finie V-presque partout.

DEMONSTRATION

La suite $u_n = 0$, et la suite $v_n = \frac{1}{n} w$ satisfont aux conditions des théorèmes 2 et 4 , par suite

$$0=D(0) \geq \inf_n \left(\frac{1}{n} Dw\right) \quad \text{V-presque partout, ce qui}$$

prouve le théorème.

COROLLAIRE 9

Pour toute fonction surmédiane w,

$$s = \sup_{\lambda > 0} \lambda(w - \lambda V_\lambda w) \quad \text{est finie V-presque partout.}$$

DEMONSTRATION

L'opérateur $v \mapsto \sup_\lambda \lambda(v - \lambda V_\lambda v)$ est sous-additif, positivement homogène et $\lambda(V1 - \lambda V_\lambda 1) = \lambda V_\lambda 1$, de sorte que l'on peut appliquer le théorème précédent.

THEOREME 10

Désignons par Γ_1 et Γ_2 respectivement les ensembles de fonctions mesurables positives bornées φ telles que $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout et $DV\varphi \leq \varphi$ V-presque partout.

Alors pour toute suite bornée $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$ et pour toute suite bornée $(\psi_n) \subset \Gamma_2$,

$$\limsup \varphi_n \in \Gamma_1$$

$$\text{et} \qquad \liminf \psi_n \in \Gamma_2$$

DEMONSTRATION.

Raisonnons seulement pour Γ_1, car on procède de la même manière pour Γ_2.

On remarque immédiatement que Γ_1 contient les enveloppes supérieures des suites contenues dans Γ_1. Il suffit donc de montrer que pour une suite décroissante $(\varphi_n) \subset \Gamma_1$, $\inf \varphi_n \in \Gamma_1$. Posons $v_n = V\varphi_n$ et $u_p = \inf_n V\varphi_n$, $\forall_p$. On se trouve dans les conditions d'application du théorème 4, par suite

$$\limsup Du_p = D(\inf V\varphi_n) \geq \liminf DV\varphi_n \geq \inf \varphi_n \quad \text{V-presque}$$

partout, par suite $(\inf \varphi_n) \in \Gamma_1$.

Remarque 11

Soit B^+ le cône des fonctions mesurables positives bornées, et soit N un opérateur croissant de B^+ dans B^+ tel que pour toute suite bornée croissante $(\varphi_n) \subset B^+$, on ait $N(\sup_n \varphi_n) = \sup_n N(\varphi_n)$ V-presque partout et pour toute suite décroissante $(\varphi_n) \subset B^+$.

$$N(\inf_n \varphi_n) = \inf_n N(\varphi_n) \qquad \text{V-presque partout}$$

On aurait un théorème analogue au théorème 10 pour les ensembles $\Gamma'_1 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \geq N\varphi \text{ , V-p.p.}\}$ et $\Gamma'_2 = \{\varphi \in B^+ ; DV\varphi \leq N\varphi \text{ , V-p.p.}\}$.

Remarque 12.

Les théorèmes précédents n'exigent pas que pour $w \in C$, la fonction Dw soit mesurable sur X.

Nous achevons de montrer le résultat annoncé au début de l'exposé.

COROLLAIRE 13.

Soit un opérateur $D \in \mathcal{E}$. Si $\varphi \geq 0$ est bornée, mesurable pour la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout.

DEMONSTRATION

Soit $H = C - C$ l'espace vectoriel réticulé des différences de fonctions surmédianes. Pour toute $\varphi \in H^+$ on a $\lim_{n \to \infty} nV_n\varphi = \varphi$ V-presque partout ; d'après le théorème 5, on a $DV\varphi = D_oV\varphi = \varphi$ V-presque partout (cf le corollaire 17 de l'exposé précédent). Le théorème 10 entraîne alors, par un raisonnement de classes monotones, que l'ensemble Γ des fonctions $\varphi \geq 0$ telles que $DV\varphi = \varphi$ V-presque partout contient toutes les fonctions $\mathcal{B}'$-mesurables bornées.

Le théorème suivant comprend comme cas particulier le "théorème maximal de HARDY-LITTLEWOOD" sur la droite. Il précise beaucoup le corollaire 9 .

THEOREME 14

Soit D un opérateur presque positif sur C vérifiant les propriétés suivantes

a) $D(v_1+v_2) \geq D(v_1) \geq 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in C$

b) $D(u+\varepsilon V1) \leq Du + \varepsilon DV1 \qquad \forall u \in C$ et $\forall \varepsilon > 0$.

c) Pour tout $k \geq 0$, $D(Vk) = kDV1 = k$, V.p.p.

d) Pour toute fonction $\varphi \geq 0$, bornée, mesurable pour la tribu $\mathcal{B}'$ engendrée par les fonctions excessives, on a $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout.

Dans ces conditions, pour toute $w \in C$, telle que Dw soit $\mathcal{B}'$-mesurable et tout $k > 0$, on a

$$w \geq k \ V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Soit $\varphi = k.1_{\{Dw < k\}}$. On a par hypothèse $DV\varphi \geq \varphi$ V-presque partout, par suite $D(w+V\varphi) \geq \sup(Dw, DV\varphi) \geq k$ V-presque partout. D'après le théorème 7, pour tout $k' < k$, on a $w+V\varphi \geq k'V1$, donc aussi $w+V\varphi \geq kV1$ ce qui donne encore $w \geq kV(1- 1_{\{Dw < k\}})$

ou $\quad w \geq kV1_{\{Dw \geq k\}}$.

COROLLAIRE 15

Si $Dw = \sup\limits_{\lambda > 0} \lambda(w-\lambda V_\lambda w)$, alors pour toute fonction surmédiane w , on a

$$w \geq k \ V1_{\{Dw \geq k\}}$$

DEMONSTRATION

Les conditions a) , b) , c) du théorème 14 sont immédiatement vérifiables.

Pour la condition d), on a

$DV\varphi \geq D_o V\varphi = \limsup_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda \varphi \geq \varphi$ V-presque partout d'après le corollaire 13 appliqué à D_o .

Remarque 16

Si au lieu de prendre la fonction surmédiane 1, on prend $u \in C$, $u(x) > 0$ $\forall x \in X$, et u finie, on a, si Vu est finie,

$$w \geq kV1_{\{Dw \geq kDVu\}} \cdot u \text{ , pour tout } w \in C \text{ , en}$$

conservant les notations du corollaire 15 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] COURREGE Philippe — Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de C_K^∞ dans C satisfaisant au principe du maximum. Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY (Théorie du Potentiel) 1965-1966 n°2. Secrétariat Mathématique. 11, rue Pierre Curie. Paris Ve .

[2] MOKOBODZKI Gabriel — Densité relative de deux potentiels comparables obtenue sans filtres rapides. Séminaire CHOQUET (Analyse fonctionnelle). 1968-1969 n°1. Secrétariat Mathématique.Paris.

[3] MOKOBODZKI Gabriel — Densité relative de deux potentiels comparables. Séminaire de Probabilités. 1968-1969. Strasbourg

[4] von WALDENFELS (W.) — Fast positive Operatoren. Berichte der Kernforschungs-anlage.Jülich 1964.