GABRIEL MOKOBODZKI

Densité relative de deux potentiels comparables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 170-194
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__170_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1968-69

- Séminaire de Probabilités -

DENSITE RELATIVE DE DEUX POTENTIELS COMPARABLES

par Gabriel MOKOBODZKI

I. ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Soient $(X,\underline{\underline{B}})$ un espace mesurable, $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille résolvante sousmarkovienne $(\lambda V_\lambda 1 \leqq 1)$ de noyaux positifs sur $(X,\underline{\underline{B}})$. On suppose que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ est un noyau borné.

Toutes les fonctions de la forme Vf, où f est mesurable positive, sont des fonctions excessives. Réciproquement, soit u une fonction excessive, telle que $(V1-u)$ soit excessive ; existe-t-il une fonction mesurable f, $0 \leqq f \leqq 1$, telle que $Vf = u$? Lorsqu'on suppose la continuité absolue des mesures $\epsilon_x V$ $(x \in X)$ par rapport à une même mesure μ, c'est-à-dire l'hypothèse (L) de Meyer, la réponse affirmative à cette question est fournie par un théorème dû à Motoo. Nous allons dans ce travail résoudre ce problème sans l'hypothèse (L) , c'est-à-dire dans la situation la plus générale. Il faut remarquer que ni le caractère borné de V , ni le caractère sous-markovien de la résolvante, ne sont des hypothèses essentielles : on se ramène facilement au cas sous-markovien en remplaçant la famille (V_λ) par la famille $(\frac{1}{g} V_\lambda(g.))$, où g est finie, surmédiane et strictement positive (quand une telle fonction existe) .

Nous commencerons par des résultats complémentaires de théorie du potentiel.

*

II. LE CONE DES POTENTIELS D'UN NOYAU ELEMENTAIRE.

*

Soient toujours $(X,\underline{\underline{B}})$ un espace mesurable, N un noyau positif sous-markovien, tel que le noyau

$$G_N = (I-N)^{-1} = \sum_{p \geq 0} N^p$$

soit borné. Dans ce cadre, on appelle fonction excessive une fonction mesurable positive u telle que $Nu \leq u$. Si u est bornée, u est aussi un potentiel, car $u = G_N(I-N)u$.

Désignons par S le cône convexe des fonctions excessives bornées, et par $\prec$ l'ordre défini par S . La <u>réduite</u> d'une fonction mesurable bornée u se définit par

$$Ru = \inf \{v : v \in S, v \geq u \} .$$

Il n'est pas évident que Ru soit mesurable quand u l'est. Rappelons la définition de Meyer.

LEMME 1 . Pour toute u mesurable bornée, Ru est mesurable et excessive.

DEMONSTRATION.

Considérons la suite (u_n) définie par récurrence de la manière suivante :

$$u_o = u \quad , \quad u_p = \sup(u_{p-1}, Nu_{p-1})$$

Comme $N1 \leq 1$, la suite (u_p) est croissante et bornée, et $v = \sup u_p$ vérifie $u \leq v$, $Nv \leq v$. D'autre part pour toute $w \in S$ majorant u on a $w \geq u_p$, donc $w \geq v$. Finalement, comme G_N est borné, on a $\lim\limits_{p \to \infty} N^p v = 0$, donc $v \geq \lim\limits_{p} N^p v = 0$; v est donc excessive, et on a $Ru = v$.

Ce procédé de construction de la réduite nous donnera sans grand effort le lemme suivant :

LEMME 2 . Si $u = G_N f$, alors $Ru = G_N \phi$, avec $0 \leq \phi \leq f^+$.

DEMONSTRATION.

Considérons l'opérateur

$H : u \mapsto \sup(u, Nu)$.

Si l'on pose $f = (I-N)u$, on obtient

$$\begin{aligned}(I-N)Hu &= (I-N)[\sup(Gf,NGf)]\\ &= (I-N)[\sup(Gf,Gf-f)]\\ &= (I-N)[Gf+f^-] = f+(I-N)f^-\\ &= f^+ - Nf^-\end{aligned}$$

Considérons l'opérateur $T : f \mapsto f^+ - N(f^-)$: on peut alors écrire $Hu = GT(I-N)u$, et pour tout entier p

$$H^p u = GT^p(I-N)u$$

Montrons que pour toute f mesurable bornée , $\lim_{p\to\infty} T^p f = \phi$ existe, et que $0 \leqq \phi \leqq f^+$; le lemme en résultera aussitôt, car nous aurons $Ru = \lim_{p\to\infty} H^p u = G_N(\lim_{p\to\infty} T^p(I-N)u) = G_N\phi$.

Or on a $(Tf)^+ \leqq f^+$, et $(Tf)^- \leqq N(f^-)$, de sorte que la suite $(T^p f)^+$ est décroissante, et que pour tout p $(T^p f)^- \leqq N^p(f^-)$. Comme $G(f^-)$ est bornée, on a $\lim_{p\to\infty} N^p(f^-) = 0$. Il en résulte aussitôt que $T^p f$ converge vers une limite comprise entre 0 et f^+ .

Les énoncés qui suivent sont des conséquences faciles ou des reformulations du lemme 2.

THEOREME 3 .

Soient u_1 et u_2 deux fonctions excessives bornées. Alors

$R(u_1-u_2)$ et $u_1-R(u_1-u_2)$ sont excessives (autrement dit $R(u_1-u_2) \prec u_1$) .

DEMONSTRATION.

Posons $(I-N)u_1 = f_1$, $(I-N)u_2 = f_2$; les fonctions f_1, f_2 sont positives, et $u_1 = G_N f_1$, $u_2 = G_N f_2$. D'après le lemme précédent $R(u_1-u_2) = G_N \phi$ avec $0 \leqq \phi \leqq (f_1-f_2)^+ \leqq f_1$. Par suite $u_1-R(u_1-u_2)=G_N(f_1-\phi)$ qui est une fonction excessive.

COROLLAIRE 4 .

Soient u mesurable bornée, Ru sa réduite. Alors

$$\{(I-N)Ru > 0\} \subset \{u = Ru\} .$$

DEMONSTRATION.

Considérons la suite

$$u_o = u \quad , \quad u_{p+1} = \sup(u_p, Nu_p) .$$

Soit x tel que $Ru(x) > u(x)$. Il existe un indice p tel que $u_{p+1}(x) > u_p(x)$. Or si $u_p = G_N f_p$ on a $u_{p+1} = u_p + f_p^-$, donc $f_p^-(x) > 0$, et $f_p^+(x) = 0$. Par construction, $Ru_p = Ru = G_N\phi$, avec $0 \leqq \phi \leqq f_p^+$, d'où $\phi(x) = 0$ et $(I-N)Ru(x) = 0$.

DEFINITION 5 .

On dira qu'une fonction mesurable u est portée par $A \in B$, relativement à un cône S , si pour toute $v \in S$

$$(v(x) \geqq u(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in A\ ) \Rightarrow (v \geqq u\ ) .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, les mots "relativement à S " seront omis. Avec cette formulation, on voit que si $A \in B$

$$(A \text{ porte } u\ ) \Rightarrow (A \text{ porte } Ru\ ) .$$

En effet $(v \geqq Ru$ sur $A) \Rightarrow (v \geqq u$ sur $A) \Rightarrow (v \geqq u) \Rightarrow (v \geqq Ru)$ si $v \in S$.

Le corollaire précédent se comprend beaucoup mieux si on le formule ainsi :

COROLLAIRE 6 .

Pour toute u mesurable bornée, u et Ru sont portées par l'ensemble $\{u = Ru\}$.

DEMONSTRATION.

Rappelons que le noyau G_N satisfait au principe de domination : si f et g sont mesurables bornées $\geqq 0$

$$(G_N g(x) \geqq G_N f(x) \ \ \forall x \in \{f > 0\}) \Rightarrow (G_N g \geqq G_N f)$$

ou encore (toute fonction excessive bornée étant un potentiel) : $G_N f$ est portée par l'ensemble $\{f > 0\}$. Comme $\{(I-N)Ru > 0\} \subset \{u = Ru\}$, Ru est portée par $\{u = Ru\}$. Si $v \in S$ majore u sur $\{u = Ru\}$,v majore Ru sur cet ensemble, et donc $v \geqq Ru \geqq u$ partout.

Remarque 1 .

Il est intéressant de voir comment on peut utiliser le corollaire 4 pour montrer que G_N satisfait au principe de domination : soient f et g mesurables $\geqq 0$, et supposons que

$$G_N g(x) \geqq G_N f(x) \quad \text{pour} \quad x \in \{f>0\}$$

montrons que $G_N g \geqq G_N f$.

Prenons $\varepsilon > 0$ et posons $\phi_\varepsilon = f-g-\varepsilon$, et $R(G_N \phi_\varepsilon) = G_N \psi_\varepsilon$. On a $G_N \phi_\varepsilon(x) < 0$, donc $R(G_N \phi_\varepsilon)(x) \neq G_N \phi_\varepsilon(x)$, pour tout $x \in \{f>0\}$, et par conséquent $\psi_\varepsilon(x) = 0$ pour $x \in \{f>0\}$. D'autre part, $\psi_\varepsilon \leqq (f-g-\varepsilon)^+$: donc $\psi_\varepsilon = 0$, et $G_N \phi_\varepsilon \leqq 0$, d'où enfin $G_N g \geqq G_N f$.

Remarque 2.

On peut aussi montrer à l'aide du corollaire 4 que le cône S possède la propriété d'additivité des réduites (le raisonnement s'étend aux "cônes de potentiels" définis plus loin).

a) Pour tous $u, v_1, v_2 \in S$ tels que $u \leqq v_1 + v_2$, il existe une décomposition de u en $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in S$, $u_2 \in S$, $u_1 \leqq v_1$, $u_2 \leqq v_2$.

Il suffit de prendre $u_1 = R(u-v_2)$ et $u_2 = u-u_1$ (vérification facile).

b) Rappelons la notation, pour $u \in S$, $A \in \underline{\underline{B}}$

$$R_u^A = R(u.1_A) = \inf\{v \in S : v \geqq u \quad \text{sur} \quad A\} .$$

De manière générale, $R^A_{u_1+u_2} \leq R^A_{u_1} + R^A_{u_2}$; donc il existe d'après

a) v_1 et $v_2 \in S$ tels que

$$v_1+v_2 = R^A_{u_1+u_2} \quad , \quad v_1 \leq R^A_{u_1} \quad , \quad v_2 \leq R^A_{u_2}$$

On en tire facilement que $v_1 = R^A_{u_1}$, $v_2 = R^A_{u_2}$.

Dans le cadre de cette étude, on est conduit à la définition suivante.

DEFINITION 7 .

On dira qu'un cône convexe S de fonctions mesurables positives finies sur $(X,\underline{\underline{B}})$ est un cône de potentiels s'il vérifie les propriétés suivantes

1°) Pour toute suite croissante $(f_n) \subset S$, majorée par un élément de S , $\sup\limits_n f_n \in S$.

2°) Pour tous u_1 , $u_2 \in S$.

$$R(u_1-u_2) \in S \quad \text{et} \quad (u_1-R(u_1-u_2)) \in S$$

3°) Pour toute suite $(u_n) \subset S$, décroissante au sens de l'ordre ordinaire, spécifiquement majorée (c'est-à-dire majorée pour l'ordre défini par S) par un élément de S , on a $\inf\limits_n u_n \in S$.

On dira que S est enveloppant (pour les fonctions bornées) si on a $R\,\phi \in S$ pour toute fonction ϕ mesurable et bornée.

On n'exige pas que S soit stable par enveloppe inférieure.

PROPOSITION 8 .

Soit (C_n) une suite décroissante de cônes de potentiels, et soit $C_\infty = \bigcap_n C_n$. Pour $n \leqq +\infty$, soit ${}^nR$ l'opérateur de réduite relative relativement au cône C_n . Alors

1) Si $u \in C_\infty - C_\infty$, ${}^nRu$ croît avec n , on a $\lim_{n\to\infty} {}^nRu = {}^\infty Ru$, et $\{u = {}^\infty Ru\} = \bigcap_n \{u = {}^nRu\}$.

2) C_∞ est un cône de potentiels. Si tous les cônes C_n sont enveloppants, et si C_∞ contient une fonction majorant 1 , C_∞ est aussi enveloppant, et on a ${}^\infty Ru = \sup_n {}^nRu$ pour toute fonction mesurable bornée u .

3) Si tous les cônes C_n sont réticulés (pour leurs ordres propres) C_∞ est aussi réticulé .

DEMONSTRATION

Nous nous appuierons sur le lemme évident suivant : soit (f_n) une suite décroissante, majorée par $g \in C_\infty$, telle que $f_n \in C_n$ pour tout n . Alors on a $\sup_n f_n \in C_\infty$.

Soient u_1 et $u_2 \in C_\infty$, et $u = u_1 - u_2$; pour tout $n < \infty$, C_n est un cône de potentiels, donc

$$ {}^nR(u_1-u_2) \in C_n \qquad \text{et} \quad v_n = u_1 - {}^nR(u_1-u_2) \in C_n $$

La suite ${}^{n}R(u_1-u_2)$ est croissante, majorée par u_1+u_2 . On a donc $\sup\limits_n {}^{n}R(u_1-u_2) \in C_\infty$ d'après le lemme, et cette fonction est évidemment égale à ${}^{\infty}R(u_1-u_2)$. L'assertion 1) en découle, car $u \leq {}^{n}Ru \leq {}^{\infty}Ru$.

Pour tout n , la suite $(v_p)_{p \geqq n}$ est contenue dans C_n , et $u_1-v_p = {}^{p}R(u_1-u_2) \in C_n$. D'après la propriété 3 des cônes de potentiels , on a $v_\infty = \inf\limits_p v_p \in C_n$, donc $v_\infty \in C_\infty$. La vérification des autres propriétés des cônes de potentiels est immédiate.

3) Supposons tous les cônes C_n réticulés, et pour $u_1, u_2 \in C_\infty$ soient

$$w_n = u_1 \overset{n}{\vee} u_2 \quad \text{et} \quad v_n = u_1 \underset{n}{\wedge} u_2$$

les enveloppes supérieure et inférieure de u_1 et u_2 dans C_n . La suite w_n est croissante, la suite v_n est décroissante. Par construction les fonctions $w_\infty = \sup w_n$ et $v_\infty = \inf v_n$ sont dans C_∞ . Soit $w \in C_\infty$, tel que $(w-u_1) \in C_\infty$ et $(w-u_2) \in C_\infty$; les cônes C_n étant réticulés on a $(w-w_n) \in C_n$ pour tout n , donc aussi $w-w_\infty = \inf\limits_n (w-w_n)$.

THEOREME 9 .

Soit C un cône de potentiels sur $(X,\underline{\underline{B}})$ et soit $S \subset C$ un sous-cône convexe de C . Si S est un sous-cône héréditaire à gauche de C , et si l'enveloppe supérieure d'une suite croissante majorée d'éléments de S appartient à S , alors S est un cône de potentiels.

DEMONSTRATION:

Dire que S est héréditaire à gauche signifie que si $u \in S$, $u_1, u_2 \in C$ sont tels que $u_1 + u_2 = u$, alors $u_1, u_2 \in S$. Désignons respectivement par ${}^{C}R$ et ${}^{S}R$ les opérateurs de réduite par rapport aux cônes C et S. Pour $u_1, u_2 \in S$, on a

$$ {}^{S}R(u_1 - u_2) \geqq {}^{C}R(u_1 - u_2) $$
$$ u_1 = {}^{C}R(u_1 - u_2) + (u_1 - {}^{C}R(u_1 - u_2)) . $$

Ces deux fonctions appartiennent à C, leur somme est dans S, elles appartiennent donc à S. Il en résulte que ${}^{S}R(u_1 - u_2) = {}^{C}R(u_1 - u_2)$, et que S est un cône de potentiels (la propriété 3 des cônes de potentiels se vérifie immédiatement).

Cette technique de passage à la limite pour des cônes de potentiels est très fructueuse. En voici des applications

Exemple I. (Voir appendice).

Exemple II. Les notations seront celles de toute la seconde partie de l'exposé :

on se donne sur l'espace mesurable $(X, \underline{\underline{B}})$ une résolvante sousmarkovienne $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ telle que $V = \sup_\lambda V_\lambda$ soit un noyau borné. On désigne par B l'ensemble des fonctions réelles $\underline{\underline{B}}$-mesurables bornées par B^+ la partie positive de B. On introduit les notations suivantes :

- $C_\lambda = \{f \in B^+ \; ; \; \lambda V_\lambda f \leqq f\}$

- $C_\infty = \bigcap\limits_\lambda C_\lambda$: c'est le cône des fonctions surmédianes bornées

- $S = \{f \in C_\infty \; ; \; f = \sup\limits_\lambda \lambda V_\lambda f\}$: c'est le cône des fonctions excessives pour la résolvante.

- ${}^\lambda Ru = \inf\{v ; v \in C_\lambda, \; v \geqq u\}$, pour $u \in B$ et $\lambda \in]0,+\infty]$

- $Ru = \inf\{v \; ; \; v \in S \; , \; v \geqq u\}$, pour $u \in B$

- $(f_1 \underset{\lambda}{\prec} f_2) \Leftrightarrow ((f_2 - f_1) \in C_\lambda)$, pour $f_1, f_2 \in B$, $\lambda \in]0,+\infty]$

- $(f_1 \prec f_2) \Leftrightarrow ((f_2 - f_1) \in S)$

D'après l'équation résolvante, on a $(I+\lambda V) = (I-\lambda V_\lambda)^{-1} = G_{\lambda V_\lambda}$ donc le noyau λV_λ a un potentiel borné. Les cônes C_λ sont donc des cônes de potentiels réticulés, enveloppants, stables par enveloppe inférieure dénombrable. Montrons que $(\lambda < \mu) \Rightarrow (C_\mu \subset C_\lambda)$. En effet l'équation résolvante

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu$$

donne

$$\mu V_\mu - \lambda V_\lambda = (\mu - \lambda) V_\lambda [I - \mu V_\lambda]$$

de sorte que pour $\lambda < \mu$ et $f \in C_\mu$ on a

$$\mu V_\mu f \leqq f \quad \text{et} \quad \lambda V_\lambda f \leqq \mu V_\mu f \;, \; \text{donc} \;\; f \in C_\lambda \quad .$$

Le cône C_∞ des fonctions surmédianes est donc l'intersection d'une suite décroissante de cônes de potentiels réticulés et enveloppants : c'est donc aussi un cône de potentiels réticulé et enveloppant. D'autre part, le cône S des fonctions excessives est héréditaire à gauche dans C , fermé pour les limites de suites croissantes : c'est donc un cône de potentiels réticulé (mais il n'est pas stable par enveloppe inférieure en général, contrairement à C).

*

III. CALCUL DES DENSITÉS

*

Régularisation des fonctions surmédianes et applications.

Nous utilisons dans toute la suite les notations de l'exemple II précédent.

DEFINITION 10 .

On dira qu'un exemple $A \in \underline{\underline{B}}$ est V-négligeable si $V(1_A)=0$. On dira qu'une propriété a lieu V-presque partout (V.p.p.) si elle a lieu sauf sur un ensemble V-négligeable.

La réunion d'une suite de parties V-négligeables est V-négligeable.

Le résultat suivant est bien connu : cf. Meyer [1] .

LEMME

Soit u une fonction surmédiane, et soit $\hat{u} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda u$ sa régularisée excessive. Alors $u = \hat{u}$ V-presque-partout.

Pour toute fonction $f \in B$, posons

$$Tf = \limsup_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda f$$

L'opérateur T est sous-linéaire. On remarquera que $Tf \in B$ (la lim sup peut se calculer pour λ rationnel). Considérons le cône

$$\Gamma = \{f \in B \; ; \; Tf \leqq f \;\; \text{V-presque partout}\}$$

PROPOSITION 11.

1) Le cône convexe Γ contient l'espace vectoriel réticulé $H = C_\infty - C_\infty$.

2) Pour toute suite (f_n) d'éléments de Γ, bornée inférieurement, on a $\inf_n f_n \in \Gamma$.

3) Γ est fermé dans B pour la convergence uniforme.

DEMONSTRATION.

1) Il est clair que si $u \in B$ est telle que $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda u = u$ V-pp (en particulier si $u \in C_\infty$, ou $u \in H$), et si $v \in \Gamma$, on a $u+v \in \Gamma$, $T(u+v) = Tu+Tv$ V-pp. Il en résulte aussitôt que $H \subset \Gamma$.

2) Tous les opérateurs V_λ sont positifs, donc croissants sur B ordonné par B^+, par suite T est aussi croissant. Soit (f_n) une suite (finie ou infinie) d'éléments de Γ, et soit $f = \inf f_n$.

On a V-pp.

$$Tf \leqq \inf Tf_n \leqq \inf f_n = f$$

donc $f \in \Gamma$.

3) Les noyaux λV_λ étant sousmarkoviens, la fonction 1 est surmédiane, et donc $0 \leqq T1 = \lim \lambda V_\lambda 1 \leqq 1$. Les relations $f \in B$, $g \in B$, $f-\epsilon \leqq g \leqq f + \epsilon$ entraînent donc $Tf-\epsilon \leqq Tg + \epsilon$ V-pp. , ou $|Tf-Tg| \leqq \epsilon$. La propriété 3 en résulte aussitôt .

Pour comprendre l'intérêt du cône convexe Γ , disons qu'il remplace dans ce cadre d'espace mesurable $(X,\underline{\underline{B}})$ le cône des fonctions semi-continues supérieurement sur un espace topologique.

La proposition qui suit est l'outil essentiel de ce travail.

PROPOSITION 12 .

Soient $w \in C$ et $u=V1-w$. La fonction Ru est excessive, et Ru est portée par l'ensemble $\{u=Ru\}$ au sens suivant :

$$Ru \prec V(1_{\{u=Ru\}})$$

DEMONSTRATION.

Nous avons vu plus haut (exemple II) que $I+\lambda V = G_{\lambda V_\lambda}$, et l'équation résolvante donne $u=(I+\lambda V)(u- \lambda V_\lambda u)$. Nous pouvons donc poser

$${}^\lambda Ru = (\frac{1}{\lambda} I + V)\, \phi_\lambda$$

avec $\quad 0 \leqq \phi_\lambda \leqq \lambda(u-\lambda V_\lambda u)^+ \quad$ (Lemme 2)

$\{\phi_\lambda > 0\} \subset \{u = {}^\lambda Ru\} = A_\lambda \quad$ (Corollaire 4)

Comme $u=V1-w$, on a $\lambda(u-\lambda V_\lambda u) \leqq 1$, donc $\phi_\lambda \leqq 1_{A_\lambda}$, et donc pour tout $\lambda > 0$

$$ {}^\lambda Ru + h_\lambda = \left(\frac{1}{\lambda} I + V \right) 1_{A_\lambda} \quad (h_\lambda \in C_\lambda) $$

Faisons tendre λ vers $+\infty$, par valeurs entières, et posons $\liminf h_\lambda = h$; h est surmédiane, ${}^\lambda Ru$ tend en croissant vers ${}^\infty Ru = Ru$, A_λ tend en décroissant vers $\{u=Ru\}$ (prop. 8), et il vient donc bien que $Ru \prec V(1_{A_\lambda})$.

DEFINITION 13

On appellera opérateur de dérivation de la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda > 0}$ l'opérateur D défini sur B par

$$ Df = \limsup_{\lambda \to \infty} \lambda(f - \lambda V_\lambda f) $$

Propriétés de l'opérateur de dérivation

1) Si w est surmédiane, on a $Dw \geqq 0$.

2) Si $(v_1 - v_2)$ est surmédiane, on a $Dv_1 \geqq Dv_2$.

3) Si $\lambda > 0$, $D(\lambda w) = \lambda Dw$.

4) Si $v_1, v_2 \in B$, on a $D(v_1+v_2) \leqq Dv_1 + Dv_2$ (si le second membre a un sens)

5) Si $w=V\phi$, d'après l'équation résolvante, $DV\phi = \limsup \lambda V_\lambda \phi = T\phi$.

6) Pour toute $\phi \in B$, $D\phi$ est mesurable. En effet, l'application $\lambda \mapsto \lambda(\phi-\lambda V_\lambda \phi)$ est continue pour la convergence uniforme dans B , et la limite peut donc être calculée le long des rationnels.

La suite de théorèmes qu'on va lire maintenant conduit aux résultats suivants : pour toute fonction surmédiane w , on a

$$VDw \underset{\infty}{\prec} w$$

et pour toute fonction excessive u telle que $u \prec V\phi (\phi \geqq 0)$, on a

$$VDu = u \quad .$$

THEOREME 14 .

Soit $u=u_1-u_2$, *où* u_1 *est surmédiane, et où* $u_2 = V\phi$, $0 \leqq \phi \leqq 1$. *La relation* $Du \geqq 0$ V-p.p. *entraîne que* u *est surmédiane*.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME.

Avec les notations précédentes, soit $h \geqq 0$, $h \in \Gamma$ (*c'est-à-dire* $h \in \underline{\underline{B}}$, $\limsup \lambda V_\lambda h = Th \leqq h$ V-p.p.). *Si* $u(x) \geqq Vh(x)$ *sur l'ensemble* $\{h>0\}$, *alors* $u \geqq Vh$.

DEMONSTRATION

Si l'on n'a pas $u \geqq Vh$, il existe $y \in X$, $\lambda > 0$, tels que $(Vh-u-\lambda V1)(y) > 0$. La fonction $t=Vh-u-\lambda V1$ s'écrit aussi

$$t=V(h+\phi)-u_1-\lambda V1=V(k)-[V(k-(h+\phi))+u_1+\lambda V1]$$

où $k=\sup(h+\phi)$, de sorte que Rt est excessive, $\not\leq 0$, et que

$$Rt \prec V(h+\phi) \quad Rt \prec kV(1_{\{t=Rt\}})$$

On a partout $Vh-\lambda V1-Rt \leqq u$, et $(Vh-\lambda V1-Rt)(x)=u(x)$ pour tout $x \in A = \{t=Rt\}$. On en tire, pour $x \in A$

$$Du(x) \leqq D(Vh-\lambda V1)(x)=T(h-\lambda)(x)=Th(x)-T\lambda(x) \ .$$

L'ensemble A n'est pas V-négligeable puisque $Rt \neq 0$ et les ensembles $\{T\lambda < \lambda\}$, $\{Th > h\}$, $\{V1=0\}$, $\{Du < 0\}$ sont V-négligeables. Il existe donc $x_o \in A$ tel que

a) $Du(x_o) \geqq 0$

b) $T\lambda(x_o) = \lambda$

c) $Th(x_o) \leqq h(x_o)$

d) $V1(x_o) > 0$

Comme $Rt=t$ en x_o , on a $t(x_o)=Rt(x_o) \geqq 0$, donc $(Vh-u-\lambda V1)(x_o) \geqq 0$, donc $Vh(x_o) > u(x_o)$ d'après d) ; comme u majore Vh sur $\{h > 0\}$ par hypothèse, on a donc $h(x_o)=0$, donc $Th(x_o)=0$ d'après c) , et $Th(x_o)-T\lambda(x_o)=-\lambda$ d'après b) , donc $Du(x_o) \leqq -\lambda$, en contradiction avec a). Le lemme est prouvé.

DEMONSTRATION DU THEOREME.

On reprend la démonstration de Meyer [1] . On a $\lambda V_\lambda u = V(\lambda(u-\lambda V_\lambda u))$, posons donc $\theta_\lambda = \lambda(u-\lambda V_\lambda u)$. Les fonctions $\theta_\lambda^+, \theta_\lambda^-$ sont dans Γ , on a $D(u+V\theta_\lambda^-) \geqq Du \geqq 0$, et

$$(u+V\theta_\lambda^-)(x) \geqq V\theta_\lambda^+(x) \text{ pour tout } x \in \{\theta_\lambda^+ > 0\} .$$

On peut donc appliquer le lemme précédent, qui nous donne $u+\theta_\lambda^- \geqq V\theta_\lambda^+$, ou encore $u \geqq \lambda V_\lambda u$.

THEOREME 15.

Pour toute fonction surmédiane finie u , on a $VDu \underset{\infty}{<} u$.

DEMONSTRATION.

Soit d'abord $h \in \Gamma$, $0 \leqq h \leqq Du$. On a $Du \leqq D(u-Vh)+DVh$, d'où $D(u-Vh) \geqq Du-DVh = Du-Th$; mais $Th \leqq h$ V-presque partout, d'où $D(u-Vh) \geqq Du-h \geqq 0$ V-p.p., et le théorème précédent nous donne

si $h \in \Gamma$, $0 \leqq h \leqq Du$, on a $u \underset{\infty}{>} Vh$.

Nous allons en déduire que $u \underset{\infty}{>} V(\inf(n,Du))$ pour tout n , et ceci entraînera le théorème.

Considérons $x \in X$; nous allons approcher $\inf(n,Du)$ dans l'espace $L^1(\varepsilon_x V)$. Posons $D_\lambda u = \lambda(u-\lambda V_\lambda u)$ pour λ rationnel ; nous avons $Du = \lim_{u \to \infty} \sup_{\lambda \geqq \mu} D_\lambda u$, d'où la même relation pour les d'où la même relation pour les $\inf(n,Du)$, $\inf(n,D_\lambda)$; nous pouvons trouver (la mesure $\epsilon_x V$ étant bornée) des fonctions de la forme $n \wedge (D_{\lambda_1} u \vee D_{\lambda_2} u .. \vee D_{\lambda_k} u)$ qui approchent $n \wedge Du$ dans $L^1(\epsilon_x V)$. Par extraction, nous pouvons construire une suite (f_p) de fonctions de ce type qui converge simplement vers $n \wedge Du$ en dehors d'un ensemble $\epsilon_x V$-négligeable. Toutes les fonctions f_p appartenant à Γ , il en est de même des fonctions $h_p = \inf_{m \geqq p} f_m$, qui convergent en croissant vers $\inf(n,Du)$ $\epsilon_x V$-p.p.

Nous avons d'autre part, $\lim\sup f_m \leqq n \wedge Du$ partout, d'après la forme de ces fonctions, et donc aussi $h_p \leqq Du$ partout. Par conséquent, $(u-Vh_p)$ est surmédiane. De l'équation résolvante $V=V_\lambda+\lambda V_\lambda V$, on tire $\epsilon_x V \geqq \epsilon_x(\lambda V_\lambda)V$, donc les h_p convergent vers $n \wedge Du(\epsilon_x \lambda V_\lambda V)$-p.p., et

$$< \epsilon_x \lambda V_\lambda V, \inf(n,Du) > = \sup_p < \epsilon_x \lambda V_\lambda V, h_p >$$

d'autre part, $u-Vh_p$ étant surmédiane

$$< \epsilon_x \lambda V_\lambda , u-Vh_p > \leqq < \epsilon_x , u-Vh_p >$$

Faisons tendre p vers $+\infty$ dans cette formule, il vient

$$< \epsilon_x \lambda V_\lambda , u-V(\inf(n,Du) > \leqq < \epsilon_x , u-V(\inf(n,Du)) >$$

donc $u-V(\inf(n,Du))$ est surmédiane, et le théorème est prouvé.

COROLLAIRE 16

Soit ϕ une fonction mesurable positive telle que $V\phi$ soit fini. Alors $V\phi = VDV\phi$.

DEMONSTRATION

Nous savons que $VDV\phi \underset{\infty}{\leq} V\phi$, il suffit de montrer l'inégalité inverse. Commençons par supposer $\phi \in B^+$.

On a $V\phi = (V + \frac{1}{\lambda} I)\lambda V_\lambda \phi$; dans le cône convexe C_λ , on a donc

$$V\phi \underset{\lambda}{\prec} (V+ \frac{1}{\lambda} I)[\sup_{\mu \geqq \lambda} \mu V_\mu \phi]$$

Notons u_λ le second membre ; l'application $\lambda \mapsto u_\lambda$ est décroissante, et $VDV\phi = \inf_\lambda u_\lambda$. Ecrivons $u_\lambda = V\phi + h_\lambda$ $(h_\lambda \in C_\lambda)$, faisons tendre λ vers $+\infty$ par valeurs entières, posons $h = \liminf h_\lambda \in C_\infty$, il vient $VDV\phi = h + V\phi$, d'où $VDV\phi \underset{\infty}{\geq} V\phi$.

Passons au cas général : nous avons $V(\phi \wedge n) = V(DV(\phi \wedge n)) \prec VDV\phi$, d'après ce qui précède, donc $V\phi \prec VDV\phi$.

COROLLAIRE 17.

Pour toute fonction mesurable positive ϕ , telle que $V\phi$ soit finie, $\lambda V_\lambda \phi$ converge simplement V-p.p. vers $DV\phi (= T\phi$ si $\phi \in B^+)$.

DEMONSTRATION

Commençons par le cas où $\phi \in B^+$: supposons $0 \leqq \phi \leqq 1$, et posons $\phi' = 1-\phi$. On a $\limsup \lambda V_\lambda \phi = T\phi$ et

$$\liminf \lambda V_\lambda \phi = T1 - T\phi'$$

donc $V(\overline{\lim}-\underline{\lim})=V(T\phi-T1+T\phi')=V\phi-V1+V\phi'=0$.

Passons au cas général : nous savons d'après le corollaire 17 que

$$V(\limsup \lambda V_\lambda \phi)=V(DV\phi)=V\phi$$

il nous suffit donc de démontrer que $V(\liminf \lambda V_\lambda \phi) \geqq V\phi$, car il en résulte aussitôt que $V(\overline{\lim} - \underline{\lim})=0$. Or soit $\phi_n=\inf(\phi,n)$. On a

$$V(\liminf \lambda V_\lambda \phi) \geqq V(\lim \lambda V_\lambda \phi_n)=V\phi_n$$

d'après le cas particulier, d'où le résultat cherché lorsque $n\to\infty$.

<u>COROLLAIRE 18</u>

<u>Soit</u> $\phi \geqq 0$ <u>mesurable telle que</u> $V\phi$ <u>soit partout fini,</u> <u>et soient</u> u_1, u_2 <u>des fonctions excessives telles que</u> $u_1+u_2 = V\phi$. <u>Alors on a</u> $u_1 = VDu_1$, $u_2 = VDu_2$.

<u>DEMONSTRATION.</u>

On a $DVu_1 \prec u_1$, $DVu_2 \prec u_2$, mais d'autre part $DV\phi \leq Du_1+Du_2$ et donc

$$u_1+u_2=\phi=VDV\phi \prec V(Du_1 + Du_2)$$

donc $u_1 = DVu_1$, $u_2=DVu_2$.

COROLLAIRE 19

Pour toute fonction surmédiane u , $\lambda(u-\lambda V_\lambda u)$ *converge simplement* V-p.p. (vers Du) *lorsque* $\lambda \to +\infty$.

DEMONSTRATION.

D'après le théorème 15, pour toute fonction surmédiane u, l'ensemble $\{Du = +\infty\}$ est V-négligeable. D'autre part, pour toute $\phi \in B^+$ telle que $V\phi \prec u$ on a $DV\phi \leqq Du$, donc $V\phi = VDV\phi \prec VDu$: VDu est donc la borne supérieure des potentiels de fonctions $Vh \prec u$, et la relation $Vh \prec u-VDu$ entraîne $h=0$ V-p.p. Par conséquent $D(u-VDu)=0$ V-p.p. Autrement dit, le corollaire est établi pour $u-VDu$, et il suffit de le prouver pour VDu . Or il est vrai que si v est un potentiel de fonction $V\phi$, $\lambda(v-\lambda V_\lambda v)=\lambda V_\lambda\phi$ converge simplement lorsque $\lambda \to \infty$ (corollaire 17) .

Pour terminer, donnons une extension du corollaire 4 .

THEOREME 20.

Soient u_1,u_2 *des fonctions excessives telles que* $u_1 \prec V1$, *et soit* $u=u_1-u_2$. *Alors* $DRu = 0$ V-*presque partout dans l'ensemble* $\{Ru > u\}$.

DEMONSTRATION.

Posons $v_1 = Ru + u_2 + 1$, $v_2 = u + u_2 + 1$. Les fonctions v_1,v_2 sont surmédianes et $\{v_1=v_2\} = \{u=Ru\}$. Pour tout $x \notin \{Ru=u\}$, il existe $\lambda,\mu>0$, $\lambda<\mu$, tels que

$$\mu v_2(y)-\lambda v_1(y) \geqq 1 \quad \text{pour tout} \quad y\in\{Ru=u\}$$

(il suffit pour cela que $\mu-\lambda\geqq 1$) et que

$$\mu v_2(x)-\lambda v_1(x)<0 \quad \text{(dès que } \mu/\lambda \text{ est assez voisin de } 1) .$$

Posons d'une manière générale $h_{\lambda,\mu} = \inf\,(1,(\mu v_2-\lambda v_1)^+)$. Il résulte de ce qui précède que $1_{\{Ru=u\}}$ est l'enveloppe inférieure des fonctions $h_{n,n+1}$; chacune de ces fonctions appartenant à Γ , on a aussi $1_{\{Ru=u\}}\in\Gamma$. Comme $Ru \prec V(1_{\{Ru=u\}})$ (prop. 12), on a $DRu \leqq DV(1_{\{Ru=u\}}) = T(1_{\{Ru=u\}}) \leqq 1_{\{Ru=u\}}$ V-p.p. . Le théorème est établi.

COROLLAIRE 21.

On suppose de plus que l'enveloppe inférieure de deux fonctions excessives est une fonction excessive. Avec les hypothèses du théorème précédent, on a $DRu = 0$ dans l'ensemble $\{Ru>u\}$.

DEMONSTRATION.

Dans le raisonnement précédent, remplaçons v_1 et v_2 par

$$w_1 = Ru + u_2 + T1 \quad , \; w_2 = u+u_2+T1 .$$

Pour tout $x\notin\{Ru=u\}$, on a comme plus haut, pour λ,μ bien choisis

$$\mu w_2(y)-\lambda w_1(y) \geqq 1 \quad \text{pour} \quad y\in\{Ru=u\}\cap\{T1=1\}$$

$$\mu w_2(x)-\lambda w_1(x) \leqq 0$$

Posons encore $h_{\lambda,\mu} = (\mu w_2 - \lambda w_1)^+$, et $\phi = \inf_n h_{n,n+1}$; nous avons ici

$$1_{\{Ru=u\} \cap \{T1=1\}} \leqq \phi$$

d'autre part, comme $\{T1<1\}$ est V-négligeable, $Ru \prec V(1_{\{Ru=u\} \cap \{T1=1\}})$.
Enfin, on a $Th_{\lambda,\mu} = h_{\lambda,\mu}$, car $h_{\lambda,\mu}$ est une différence de fonctions excessives d'après l'hypothèse, donc $T\phi \leqq \phi$ partout
La relation $Ru \prec V\phi$ entraîne alors $DRu \leqq DV\phi = T\phi \leqq \phi$, donc $DRu=0$ dans $\{\phi=0\}$, qui contient $\{Ru>u\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. MEYER. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris.

[2] G. MOKOBODZKI . Densité relative de deux potentiels comparables sans ultrafiltres rapides. Séminaire d'Analyse. (G. CHOQUET), 1968-69, exposé n°1 .

*** ***