SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO

Théorème de Stone et espérances conditionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 4 (1970), p. 132

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1970__4__132_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1968-69

THÉORÈME DE STONE ET ESPÉRANCES CONDITIONNELLES

par J. de SAM LAZARO (*)

La remarque suivante est certainement bien connue, mais elle est amusante.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé , et soit (θ_t) un flot sur cet espace - i.e. un groupe de transformations ponctuelles conservant la mesure. Comme d'habitude, nous notons (T_t) le groupe d'opérateurs unitaires sur $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ associé au flot, que nous supposons fortement continu ; ainsi, si $f\in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$, nous avons $T_t f=f\circ\theta_t$.

D'après le théorème spectral de STONE, ce groupe admet une représentation de la forme

$$T_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dE_u$$

où les projecteurs E_u sont tels que $E_u E_v = E_{u\wedge v}$. Il est naturel de se demander si les projecteurs E_u peuvent être des opérateurs d'espérance conditionnelle. Nous allons voir que c'est impossible.

En effet, supposons qu'il en soit ainsi ; alors $E_u f$ est réelle si f est réelle et nous avons donc, si f et g sont réelles

$$< T_t f,g > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d_u < E_u f,g >$$

Le premier membre étant un nombre réel, passons aux conjugués ; comme $<E_u f,g>$ est réelle

$$< T_t f, g > = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu} d_u < E_u f,g > = < T_{-t} f,g >$$

Donc $T_t=T_{-t}$, et $T_{2t}=I$; comme t est arbitraire, le flot est trivial.

(*) Rédaction par P.Meyer d'une lettre de J.Lazaro.