SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Ensembles aléatoires I

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 97-114
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__97_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1967-68

- Séminaire de Probabilités -

ENSEMBLES ALEATOIRES I

par C. DELLACHERIE

Les deux exposés qui vont suivre sont un développement de mes deux notes aux C.R. (cf. [2]) : on trouvera dans ce premier exposé les démonstrations des résultats de la première note, et, dans le second, celles des principaux résultats de la seconde (je n'aborderai pratiquement pas les applications à la théorie des processus de Markov, exceptée la caractérisation des ensembles semi-polaires).

La motivation de ce travail était de résoudre les deux conjectures de MEYER sur les ensembles semi-polaires (cf. [6] p. 183) :

1. un ensemble presque-borélien, rencontré p.s. par les trajectoires suivant un ensemble dénombrable, est semi-polaire,

2. un ensemble presque-borélien, tel que tout compact inclus soit semi-polaire, est semi-polaire.

La première conjecture est démontrée dans cet exposé ; la seconde sera démontrée dans le suivant. Les démonstrations reposent sur des théorèmes de la théorie générale des processus, développée dans l'esprit de [5]. Ceux-ci sont eux-mêmes dérivés de trois théorèmes "polonais" oubliés, même par ceux qui se sont occupés ces dernières années de redonner vie aux admirables résultats des écoles russe et polonaise (BOURBAKI par ex.), et ils ne figurent même pas dans les articles de SION. Le premier exposé contient l'énoncé (sans démonstrations) et les conséquences des deux premiers théorèmes. Le second exposé sera consacré au troisième : le théorème sur les rabotages de SIERPINSKI.

En fait, je sais maintenant établir tous les théorèmes de la théorie des processus, contenus dans les deux exposés, uniquement à l'aide des rabotages de SIERPINSKI : toute référence à la théorie abstraite ou topologique des ensembles analytiques peut être éliminée. Je pense écrire prochainement une monographie sur la théorie générale des processus, qui serait entièrement fondée sur les rabotages de SIERPINSKI : ce livre contiendrait le développement du "Guide gris" de MEYER (cf. [5]) et le contenu remanié de ces deux exposés, ainsi que des applications à la théorie des processus de Markov.

§ 1. TERMINOLOGIE.

Tous les espaces topologiques considérés sont séparés.

1. Un espace topologique E est polonais s'il est métrisable, séparable, et s'il existe une distance compatible avec la topologie de E pour laquelle E soit complet.

Un espace topologique X est souslinien (resp. lusinien) s'il existe un espace polonais E et une surjection continue (resp. bijection continue) de E sur X.

2. Un espace topologique X sera toujours supposé muni de sa tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(X)$. Si $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ est un espace mesurable, une partie H de Ω est universellement mesurable si elle appartient à la tribu complétée de $\underline{\underline{F}}$

pour toute mesure de probabilité sur $(\Omega , \underline{\underline{F}})$. On sait que toute partie souslinienne d'un espace topologique est universellement mesurable (c'est un théorème de LUSIN datant de 1917 !) .

3. Les notions suivantes ne sont pas indispensables pour la suite, mais clarifient un peu la situation à certains égards. Nous ne donnerons pas les démonstrations de l'équivalence des définitions que nous allons donner : elles peuvent se calquer sur celles données par MEYER (cf. [7] - III - 15).

Un espace mesurable $(E , \underline{\underline{E}})$ est un espace de SOUSLIN (ou de BLACKWELL) s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

a) Il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$, où A est un espace topologique souslinien.

b) Il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$, où A est un sous-espace souslinien de $\mathbb{R}$.

Un tel espace est caractérisé par les deux propriétés suivantes : il existe une suite d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ qui sépare les points de E ; si f est une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$, $f(E)$ est une partie souslinienne de $\mathbb{R}$.
On notera que l'équivalence entre a) et b) ci-dessus est non classique : le fait qu'il existe, dans un espace souslinien quelconque (métrisable ou non), une suite de boréliens séparant les points est une conséquence facile du théorème de séparation des ensembles sousliniens (cf. [1]) (MOKOBODZKI a même montré qu'il existe une suite d'<u>ouverts</u> séparant les points : ce résultat n'est pas publié).

Un espace mesurable $(E , \underline{\underline{E}})$ est un espace de LUSIN, s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

a) il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$ où A est lusinien,

b) il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$, où A est polonais,

c) il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$, où A est un sous-espace borélien d'un espace polonais (ou lusinien),

d) il est isomorphe à un espace mesurable $(A , \underline{\underline{B}}(A))$, où A est borélien dans $\mathbb{R}$.

Un tel espace est caractérisé par les deux propriétés suivantes : il existe une suite d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ qui sépare les points de E ; si f est une application mesurable, injective, de $(E , \underline{\underline{E}})$ dans $\mathbb{R}$, $f(E)$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

L'exemple suivant d'espace de Lusin m'a été communiqué par MEYER : **soit E un espace lusinien métrisable (en particulier un borélien d'un espace LCD) , muni d'une distance d compatible avec sa topologie.** On distingue un point δ de E et on considère l'ensemble W des applications w de $\mathbb{R}_+$ dans E vérifiant :

a) $t \mapsto w(t)$ est continue à droite

b) $w^{-1}(\{\delta\})$ est un intervalle de la forme $[\zeta(w), +\infty[$ $\quad(\zeta(w) \leq +\infty)$

c) $t \mapsto w(t)$ admet des limites à gauche sur $]0 , \zeta(w)[$.

On définit les applications coordonnées X_t par $X_t(w) = w(t)$, et on munit W de la tribu $\underline{\underline{W}}$ engendrée par les X_t . Autrement dit, $(W , \underline{\underline{W}})$ est l'espace d'épreuves canonique d'un processus standard de durée de vie ζ .

<u>PROPOSITION</u>.

<u>L'espace mesurable</u> $(W , \underline{\underline{W}})$ <u>est un espace de Lusin</u>.

<u>DEMONSTRATION</u>.

Soit i l'application $w \mapsto (X_r(w))_{r\in\mathbb{Q}}$ de W dans l'espace lusinien

$E^{\mathbb{Q}}$ *. Cette application est une bijection de W sur un sous-ensemble A de $E^{\mathbb{Q}}$, et on vérifie aussitôt que $\underline{\underline{W}}$ est l'image réciproque de $\underline{\underline{B}}(A)$ par i. Tout revient donc à montrer que A est un borélien de $E^{\mathbb{Q}}$. Sur $E^{\mathbb{Q}}$, définissons l'application ζ par

$$\zeta(f) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : f(r) = \delta\} \qquad f \in E^{\mathbb{Q}} .$$

On a évidemment $\zeta(w) = \zeta(i(w))$ pour $w \in W$, et on vérifie aisément que

a) ζ est une fonction mesurable sur $E^{\mathbb{Q}}$

b) $B = \{f \in E^{\mathbb{Q}} : f^{-1}(\{\delta\}) = \mathbb{Q} \cap [\zeta(f), +\infty[\}$ est un borélien de $E^{\mathbb{Q}}$.

D'autre part, si $f \in E^{\mathbb{Q}}$, posons pour tout $\epsilon > 0$:

$$T_0^{\epsilon}(f) = 0 \qquad T_1^{\epsilon}(f) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : d(f(0), f(r)) > \epsilon\}$$

$$Z_0^{\epsilon}(f) = f(0) \qquad Z_1^{\epsilon}(f) = \begin{cases} f(T_1^{\epsilon}+) & \text{si cette limite existe le long de } \mathbb{Q} \\ \delta & \text{si elle n'existe pas (ou si } T_1^{\epsilon}(f) = +\infty) \end{cases}$$

et ensuite, par récurrence :

si $Z_n^{\epsilon}(f) = \delta$, on pose $T_{n+1}^{\epsilon}(f) = T_n^{\epsilon}(f)$, $Z_{n+1}^{\epsilon}(f) = \delta$

si $Z_n^{\epsilon}(f) \neq \delta$, on pose $T_{n+1}^{\epsilon}(f) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : r > T_n^{\epsilon}(f), d(f(T_n^{\epsilon}), f(r)) > \epsilon\}$

$$Z_{n+1}^{\epsilon}(f) = \begin{cases} f(T_{n+1}^{\epsilon}+) & \text{si cette limite existe le long de } \mathbb{Q} \\ \delta & \text{si elle n'existe pas (ou si } T_{n+1}^{\epsilon}(f) = +\infty) . \end{cases}$$

* $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels.

On vérifie aisément que les fonctions $T_n^\epsilon(.)$ et $Z_n^\epsilon(.)$ sont mesurables sur $E^{\mathbb{Q}}$. L'ensemble $C = \{f \in E^{\mathbb{Q}} :$ pour tout $\epsilon > 0$, $\lim T_n^\epsilon(f) \geq \zeta$ quand $n \to \infty\}$ est alors un borélien de $E^{\mathbb{Q}}$. Comme $A = B \cap C$, il en résulte que A est aussi borélien.

§ 2. LE THEOREME DE MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI ET SES CONSEQUENCES.

Si A est une partie d'un produit cartésien $X \times Y$, nous noterons $\pi(A)$ la projection de A sur Y, et $\gamma(A)$ l'ensemble des $y \in Y$ tels que la coupe $A(y)$ ne soit pas dénombrable (dans toute la suite, dénombrable signifie, vide, fini, ou infini dénombrable).

Le théorème suivant est dû à MAZURKIEWICZ-SIERPINSKI (cf. [4], § 35, VII) :

THEOREME 1.

Soient X et Y deux espaces sousliniens, A une partie souslinienne de $X \times Y$. L'ensemble $\gamma(A)$ est une partie souslinienne de Y.

Remarques.

a) Nous n'aurons besoin que du cas où A est borélien dans $X \times Y$; mais, bien entendu, ceci n'entraîne pas que $\gamma(A)$ est borélien, même si $X = Y = \mathbb{R}$!

b) Dans le même ordre d'idées, on peut montrer (et c'est beaucoup plus facile) que l'ensemble des $y \in Y$ tels que $A(y)$ comporte au moins k points (pour $k = 1, 2, \dots, \infty$) est souslinien dans Y.

Nous allons étendre maintenant ce théorème aux espaces mesurables abstraits :

THEOREME 1^a.

Soient $(X , \underline{\underline{X}})$ un espace de Souslin et $(\Omega , \underline{\underline{F}})$ un espace mesurable. Si A est une partie mesurable de $X \times \Omega$, l'ensemble $\gamma(A)$ est une partie universellement mesurable de Ω .

DEMONSTRATION.

Il existe une suite (B_n) de parties mesurables de $X \times \Omega$, de la forme $B_n = K_n \times L_n$, où $K_n \in \underline{\underline{X}}$ et $L_n \in \underline{\underline{F}}$, telle que A appartienne à la tribu engendrée par les B_n . Définissons un espace polonais Y et une application mesurable f de $(\Omega , \underline{\underline{F}})$ dans Y par : $Y = [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $f(\omega) = (I_{L_n}(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$. Désignons d'autre part par φ l'application $id_X \otimes f$ de $X \times \Omega$ dans $X \times Y$. Il existe alors une partie mesurable A' de $X \times Y$ telle que $A = \varphi^{-1}(A')$. D'après le théorème précédent, $\gamma(A')$ est souslinien dans Y , et donc $\gamma(A) = f^{-1}[\gamma(A')]$ est universellement mesurable.

Remarques :

a) $\gamma(A)$ est même un ensemble $\underline{\underline{F}}$-analytique.

b) En faisant $k = 1$ dans la remarque b) précédente, on retrouve le fait que $\pi(A)$ est universellement mesurable.

c) D'une manière générale, on pourrait tirer de la démonstration précédente un lemme général qui permet de ramener des problèmes abstraits à des problèmes topologiques (en particulier, pour tout ce qui concerne les ensembles analytiques abstraits en théorie des processus).

COROLLAIRE.

Soient $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ un espace probabilisé complet, et A une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, indistinguable d'une partie mesurable. Alors $\gamma(A)$ appartient à $\underline{\underline{F}}$.

Le théorème précédent nous amène à poser la définition suivante

DEFINITION 1.

Soient $(X, \underline{\underline{X}})$ un espace de Souslin et $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet. Si A est une partie de $X \times \Omega$, indistinguable d'une partie mesurable,

a) la partie A est dite mince si $\gamma(A) = \emptyset$ P - p.s.

b) la partie A est dite épaisse si $\gamma(A) = \pi(A)$ P - p.s.

Il est clair qu'une partie indistinguable d'une partie mesurable se décompose, d'une manière essentiellement unique, en une partie mince et une partie épaisse dont les projections sur Ω sont disjointes.

Nous allons maintenant donner des applications du théorème 1 à la théorie des processus : soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille de tribus croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$, vérifiant les conditions habituelles (la famille est continue à droite, et $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles P-négligeables).

DEFINITION 2.

Soit A une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. On appelle temps de pénétration dans A la fonction T définie sur Ω par :

$$T(\omega) = \inf \{t : [0,t] \cap A(\omega) \text{ est non dénombrable}\}$$

PROPOSITION 1.

Si A est un ensemble progressivement mesurable, le temps de pénétration T dans A est un temps d'arrêt.

DEMONSTRATION.

L'ensemble $\{T < t\}$ est égal à $\gamma(A^t)$, où $A^t = A \cap ([0,t] \times \Omega)$. Comme A est progressivement mesurable, A^t appartient à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \otimes \underline{\underline{F}}_t$; on applique alors le théorème 1^a .

Remarque :

En faisant $k = 1$ dans la première remarque, b) , on retrouve le fait que le début d'un ensemble progressivement mesurable est un temps d'arrêt.

Si A est une partie progressivement mesurable, on sait que son adhérence $\bar{A}$ (i.e. l'ensemble dont les coupes sont les adhérences des coupes de A dans $\mathbb{R}_+$) est un ensemble bien-mesurable (cf. [5] p. 151-216). On a alors la proposition :

PROPOSITION 2.

Soit A un ensemble progressivement mesurable et soit

$$B = \{(t , \omega) : \forall \epsilon > 0 \ [t - \epsilon , t + \epsilon] \cap A(\omega) \text{ est non dénombrable}\} .$$

Alors B est un ensemble bien-mesurable.

DEMONSTRATION.

Pour tout r rationnel, soit T_r le temps de pénétration dans $A \cap ([r , \infty[\times \Omega)$. La réunion des graphes des temps d'arrêt T_r (pour r rationnel) est bien-mesurable, et B , qui est l'adhérence de cette réunion, est également bien-mesurable.

Si A est un fermé aléatoire (i.e. les coupes de A sont fermées), B est le noyau parfait de A (i.e. $B(\omega)$ est le noyau parfait de $A(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$). On a donc le corollaire :

COROLLAIRE.

Si A est un ensemble progressivement mesurable, fermé, son noyau parfait est bien-mesurable.

Il est clair, d'autre-part, que, si A est progressivement mesurable, $A \cap B$ est un ensemble épais, progressivement mesurable et $A - B$ est un ensemble mince, progressivement mesurable (on peut aussi remplacer partout "progressivement mesurable" par "bien-mesurable") : d'où une nouvelle décomposition en partie mince et partie épaisse.

§ 3. LE THEOREME DE LUSIN ET SES CONSEQUENCES.

Soient X et Y deux espaces lusiniens. Une partie G de $X \times Y$ est un *graphe borélien* s'il existe une application f, définie sur une partie borélienne de Y, et à valeurs dans X, borélienne, telle que $G = \{(x,y) : f(y) = x\}$. Pour que G soit un graphe borélien, il faut et il suffit que G soit borélien et que la coupe $G(y)$, pour tout $y \in Y$, comporte au plus un point : il est clair que la condition est nécessaire. Réciproquement, la restriction à G de la projection de $X \times Y$ sur Y est injective et donc la projection d'un borélien de $X \times Y$, contenu dans G, sur Y est un borélien de Y (cf. [1] corollaire du th. 3). Il est alors facile de construire une application f dont G est le graphe.

Le théorème suivant est dû à LUSIN (cf. [3] - § 46 - 3) :

THEOREME 2.

Soient X et Y deux espaces lusiniens, A une partie borélienne de $X \times Y$. Si la coupe $A(y)$ de A est dénombrable pour tout $y \in Y$

(soit, si $\gamma(A) = \emptyset$) , l'ensemble A est la réunion d'une suite (A_n) de graphes boréliens disjoints.

Ce théorème, qui est un des sommets de la théorie des fonctions implicites de LEBESGUE-LUSIN, est nettement plus difficile que le théorème précédent.

On ne peut pas étendre ce théorème aux espaces mesurables ; cependant, il s'étend aux espaces mesurés. Soient $(X , \underline{\underline{X}})$ un espace de Lusin et $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ un espace probabilisé complet. Une partie G de $X \times \Omega$ est un graphe mesurable s'il existe une application f , définie sur une partie mesurable de Ω , et à valeurs dans X , mesurable, telle que $G = \{(x,\omega) : f(\omega) = x\}$. Pour que G soit un graphe mesurable, il faut et il suffit que G soit mesurable dans $X \times \Omega$ et que la coupe $G(\omega)$ comporte au plus un point pour tout $\omega \in \Omega$: il est clair que la condition est nécessaire. Réciproquement, la projection d'une partie mesurable de $X \times \Omega$ sur Ω appartient à $\underline{\underline{F}}$. Il est alors facile de construire une application f dont G est le graphe.

THEOREME 2^a.

Soient $(X , \underline{\underline{X}})$ un espace de Lusin et $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ un espace probabilisé complet. Si A est une partie mesurable de $X \times \Omega$, telle que $\gamma(A) = \emptyset$, alors A est la réunion d'une suite (A_n) de graphes mesurables disjoints.

DEMONSTRATION.

Reprenons les notations de la démonstration du théorème 1^a et désignons par Q la loi image $f(P)$: on a $Q[\gamma(A')] = 0$. Donc $\gamma(A')$ est contenu dans un ensemble borélien N , Q-négligeable. Soit alors $A'' = A' \cap (X \times N^c)$. D'après le théorème 1 , A'' est la réunion des graphes mesurables disjoints

(A'_n) . Soit $A_n = \varphi^{-1}(A'_n)$ pour tout n : les A_n sont des graphes mesurables, et l'ensemble $A - (\bigcup_n A_n)$ a une projection P-négligeable sur Ω . Il est facile alors de "compléter" par l'axiome de choix les A_n si on veut que la différence soit effectivement vide.

COROLLAIRE.

Soient $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ un espace probabilisé complet et A une partie mince de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Il existe une suite (Z_n) de v.a. positives, finies ou non, telle que A soit indistinguable de la réunion des graphes des Z_n .

APPLICATIONS A LA THEORIE DE LA MESURE.

Si $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ est un espace probabilisé, complet, il est intuitif qu'on ne peut placer dans Ω une famille non dénombrable d'ensembles mesurables, de mesure strictement positive, sans que certains points soient recouverts une infinité non dénombrable de fois. Les propositions suivantes sont des variations sur ce thème, avec de légères restrictions de mesurabilité.

THEOREME 3.

Soient $(X , \underline{\underline{X}})$ un espace de Lusin et $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ un espace probabilisé complet. Soient d'autre-part A une partie mesurable de $X \times \Omega$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties mesurables de $X \times \Omega$, contenues dans A et disjointes. Alors l'ensemble des $i \in I$ tels que $P[\pi(A_i) - \gamma(A)] > 0$ est dénombrable.

DEMONSTRATION.

On sait que $\gamma(A) \in \underline{\underline{F}}$. Quitte à remplacer A par $A' = A -(X \times \gamma(A))$

et A_i par $A'_i = A_i - (X \times \gamma(A))$, on se ramène aussitôt à montrer que, si $\gamma(A) = \emptyset$, l'ensemble des i tels que $P[\pi(A_i)] > 0$ est dénombrable. Comme $\gamma(A) = \emptyset$, nous pouvons représenter A comme une réunion dénombrable de graphes mesurables disjoints. Soient (T_n) la suite des applications mesurables associées aux graphes et (L_n) la suite de leurs domaines de définition dans Ω . Définissons alors une mesure bornée sur $X \times \Omega$, en posant, pour toute fonction mesurable, positive, f sur $X \times \Omega$:

$$\mu(f) = \sum_n 2^{-n} E[I_{L_n}(\omega) \cdot f(T_n(\omega), \omega)] \quad .$$

Si f est nulle hors de A , et si $\mu(f) = 0$, il est clair que f est alors indistinguable de 0 (en tant que processus indexé par X). Or les A_i sont des ensembles mesurables, disjoints, contenus dans A : l'ensemble J des $i \in I$ tels que $\mu(A_i) > 0$ est donc dénombrable, et A_i est indistinguable de $\emptyset$ pour $i \notin J$. Par conséquent, $P[\pi(A_i)] = 0$ pour $i \notin J$ et il s'ensuit que l'ensemble des i tels que $P[\pi(A_i)] > 0$ est dénombrable.

COROLLAIRE 1.

Soit ϵ un nombre positif. Si l'on a $P[\pi(A_i)] > \epsilon$ pour une infinité non dénombrable de valeurs de i , on a aussi $P[\gamma(A)] > \epsilon$.

DEMONSTRATION.

En effet, il existe alors au moins un indice i tel que l'on ait $P[\pi(A_i)] > \epsilon$ et $\pi(A_i) \subset \gamma(A)$ à un ensemble P-négligeable près.

Nous allons énoncer un second corollaire, analogue à un lemme de Fatou : soient I un ensemble et f une application de I dans $\mathbb{R}_+$. Nous appellerons lim sup forte de f, la borne supérieure des nombres $s \in \mathbb{R}_+$ tels que l'ensemble $\{ i \in I : f(i) > s\}$ soit non dénombrable (si l'ensemble précédent est dénombrable pour tout s, la lim sup forte est nulle). On définit de même la lim sup forte d'une famille d'applications ou d'ensembles, indexée par I.

COROLLAIRE 2.

Soit $(H_x)_{x\in X}$ une famille mesurable de parties de Ω (i.e. l'ensemble $A = \{(x,\omega) : \omega \in H_x\}$ est mesurable). L'ensemble lim sup forte H_x appartient à $\underline{\underline{F}}$, et l'on a :

$$P\{\text{lim sup forte } H_x\} \geq \text{lim sup forte } P(H_x) \quad .$$

DEMONSTRATION.

Comme lim sup forte $H_x = \gamma(A)$, il suffit d'appliquer le corollaire 1, en posant $A_x = \{x\} \times H_x$.

Voici une autre application, à des familles de parties minces :

PROPOSITION 3.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties minces de $X \times \Omega$. Il existe alors une partie dénombrable J de I telle que l'ensemble $\bigcap\limits_{j\in J} A_j - A_i$ soit indistinguable de $\emptyset$ pour tout $i \in I$.

DEMONSTRATION.

Soit A un élément de la famille (A_i), et reprenons la mesure μ de la démonstration du théorème 3. Choisissons alors J de telle sorte que $\bigcap_{j\in J} A_j$ soit contenu dans A, et soit égal μ-p.s. à l'intersection essentielle de la famille (A_i). Pour tout $i \in I$, la différence $\bigcap_{j\in J} A_j - A_i$ est contenue dans A et est μ-négligeable. Elle est donc indistinguable de $\emptyset$.

APPLICATIONS A LA THEORIE DES PROCESSUS.

A bien des égards, le théorème suivant est le plus important de cet exposé (noter qu'il contient le corollaire du th. 2[a], en prenant $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{F}}$ pour tout t). L'assertion essentielle est celle qui concerne les ensembles bien-mesurables : il est possible d'en déduire les deux autres par une démonstration qui n'utilise plus le th. 3 (cf. "Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt" de MEYER, dans ce volume).

THEOREME 4.

Soit A une partie mince de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, bien-mesurable (resp. accessible, prévisible). Alors A est indistinguable de la réunion d'une suite de graphes disjoints de temps d'arrêt (resp. accessibles, prévisibles).

DEMONSTRATION.

Soit I l'ensemble des ordinaux dénombrables ; nous allons construire par récurrence transfinie une famille $(T_i)_{i\in I}$ de temps d'arrêt dont les graphes, disjoints, sont inclus dans A. En vertu du théorème de section (cf. [5] - p. 149), il existe un temps d'arrêt T_0 (resp. accessible, prévisible), dont le graphe est inclus dans $A = A_0$, et tel que

$P\{T_0 < \infty\} \geq P[\pi(A_0)]/2$. Supposons construits les ensembles A_j et les temps d'arrêt T_j , pour $j < i$. Nous prendrons alors $A_i = A - \bigcup_{j<i} [T_j]$ et T_i un temps d'arrêt (resp. accessible, prévisible) dont le graphe est contenu dans A_i , et tel que $P\{T_i < \infty\} \geq P[\pi(A_i)]/2$. En vertu du th. 3, il existe un ordinal dénombrable k tel que $T_k = \infty$ P - p.s. , et donc A_k est indistinguable de ϕ . Donc A est indistinguable de $\bigcup_{i<k} [T_i]$.

§ 4. APPLICATIONS A LA THEORIE DES PROCESSUS DE MARKOV.

Nous utiliserons les notations de [6] . Nous supposons que le semi-groupe (P_t) , défini sur un borélien E d'un espace LCD , est fortement markovien et qu'il satisfait l'hypothèse de continuité absolue. Nous travaillons sur la réalisation canonique représentée par ses symboles habituels.

THEOREME 5.

Soit λ une mesure de référence bornée, et soit G un ensemble presque-borélien tel que , pour P^λ-presque tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{t : X_t(\omega) \in G\}$ soit dénombrable. Alors G est semi-polaire.

DEMONSTRATION.

Soit $A = \{(t,\omega) : X_t(\omega) \in G\}$; par hypothèse, cet ensemble est mince pour P^λ . Le théorème 4 nous permet de choisir une suite (T_n) de temps d'arrêt (par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t^\lambda)$) , telle que A soit indistinguable de la réunion des graphes des T_n (N.B. : le fait que les T_n sont des temps d'arrêt ne sera pas utilisé : le corollaire du th. 2^a nous suffirait). Posons, pour tout $H \in \underline{\underline{B}}_u(E)$:

$$\mu(H) = E^\lambda [\sum_n 2^{-n} I_H \circ X_{t_n}]$$

(on notera que, cette fois-ci, μ est une mesure sur E , et non sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$) . Si $H \subset G$, et $\mu(H) = 0$, P^λ-presque aucune trajectoire ne rencontre H , et donc H est polaire. Nous pouvons décomposer μ en une somme : $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 ne charge pas les semi-polaires, et μ_2 est portée par un ensemble semi-polaire. Ces deux mesures sont évidemment portées par G ; de plus μ_1 est nulle. En effet, il suffit de vérifier que tout compact contenu dans G est semi-polaire, et cela résulte de [6] - XV - T. 67 & 68 . Ainsi, $\mu = \mu_2$, et μ est donc portée par un ensemble semi-polaire L , que l'on peut supposer contenu dans G , puisque G porte μ . Mais alors $\mu(G - L) = 0$, donc $G - L$ est polaire, et donc G est semi-polaire.

La proposition suivante est à rapprocher de la prop. 3, mais elle se démontre élémentairement (comme on sait que G est semi-polaire, on sait aussi d'avance que $\{(t,\omega) : X_t(\omega) \in G\}$ est indistinguable d'une réunion d'une suite de graphes). La démonstration, très simple, repose sur l'emploi d'une mesure μ telle que $H \subset G$, $\mu(H) = 0 \Rightarrow H$ est polaire, comme ci-dessus.

PROPOSITION 4.

Soit $(G_i)_{i \in I}$ *une famille d'ensembles semi-polaires. Il existe une partie dénombrable* J *de* I *telle que* $\bigcap_{j \in J} G_j - G_i$ *soit polaire pour tout* $i \in I$.

A noter aussi la conséquence suivante du corollaire 1 du th. 3

PROPOSITION 5.

Soit F *un ensemble presque-borélien. Si* F *contient une famille non dénombrable* $(F_i)_{i \in I}$ *d'ensembles presque-boréliens, disjoints, non polaires,* F *n'est pas semi-polaire.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (N.) Topologie générale, chap. IX, 2ème édition, Hermann, Paris 1958.

[2] DELLACHERIE (C.) Comptes-rendus, 266, série A, 1968, P. 1142-1144 & 1258-1261.

[3] HAUSDORFF (F.) Set theory, Chelsea Publishing Company, New-York 1962.

[4] KURATOWSKI (C.) Topologie I, 4ème édition, Warszawa 1958.

[5] MEYER (P.A.) Guide détaillé de la théorie générale des processus (Séminaire de Probabilités II, Lecture Notes in Mathematics n° 51, Springer, Heidelberg 1968).

[6] MEYER (P.A.) Processus de Markov (Lecture Notes in Mathematics n° 26, Springer, Heidelberg 1967).

[7] MEYER (P.A.) Probabilités et potentiel (Hermann, Paris ; Blaisdell, Boston 1966).

* *
*