

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA

MARIE DUFLO

DANIEL REVUZ

Mesure invariante des processus de Markov récurrents

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 24-33

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__24_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITÉS

Année 1967-68

MESURE INVARIANTE DES PROCESSUS DE MARKOV RÉCURRENTS

par J. Azéma^{*}, M. Duflou^{*} et D. Revuz^{*}

Dans cet exposé nous allons reprendre quelques résultats de [3]; nous prendrons toutefois une hypothèse de récurrence un peu plus faible que l'hypothèse de récurrence fine et nous modifierons quelques démonstrations.

I. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES.

1.1 Nos notations seront à peu de choses près, celles qui sont habituelles en processus de Markov ([8] et [5]). Soit :

$$X = \{ \Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (P_x)_{x \in E} \},$$

un processus de Hunt à valeurs dans un sous-ensemble borélien E d'un espace L.C.D. Nous supposons que X vérifie la condition (H) suivante :

(H) Il existe une probabilité m sur E telle que :

$$m(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E \quad P_x \left[\int_0^\infty 1_A(X_s) ds = \infty \right] = 1 .$$

Cette condition est la transposition au temps continu de la condition de récurrence de Harris ([7]). On peut montrer que les processus finement récurrents

* Equipe de Recherche n°1 "Processus stochastiques et applications" dépendant de la section n°2 "Théories physiques et Probabilités" associée au C.N.R.S.

satisfont à (H) sur leurs classes conservatives et que sous (L), (H) est équivalente à la récurrence fine (cf [1], [4]). Commençons par quelques premières conséquences de (H) :

1.2 Proposition : Les fonctions excessives sont constantes m-presque sûrement.

Démonstration :

Soit f excessive ; quitte à considérer $f \wedge n$, nous pouvons supposer f bornée. Pour tout x de E la surmartingale $\{\Omega, \mathcal{F}_t, P_x, f \circ X_t\}$ converge presque sûrement vers une limite Z et l'on a $f(x) \geq E_x[Z]$. Maintenant si $m(\{f \geq k, k \in \mathbb{R}^+\}) > 0$, la condition (H) entraîne que $Z \geq k$ P_x -ps et par suite que $f(x) \geq k$ ce qui démontre la proposition.

1.3 Proposition :

Soit A une fonctionnelle additive ; on a toujours l'une des deux propriétés suivantes :

- 1) pour tout x de E $P_x[A_\infty = \infty] = 1$
- 2) m presque sûrement $P[A_\infty = 0] = 1$

Démonstration :

Supposons $P_m[A_\infty > 0] > 0$; ceci entraîne qu'il existe des nombres $\epsilon, k > 0$ tels que $m(\{x : P_x[T_\epsilon < \infty] > k\}) > 0$, où $T_\epsilon = \inf \{t > 0 : A_t > \epsilon\}$. Le lemme II.2 de [2] entraîne que $P_{X_t}[T_\epsilon < \infty]$ converge P_x -presque sûrement, vers une limite qui est nulle sur $\{T_\epsilon = \infty\}$; la condition (H) entraîne que cette limite est supérieure à $k > 0$ et par suite que $P_x[T_\epsilon = \infty] = 0$ pour tout x de E .

Soit alors $T_1 = T_\epsilon$, $T_2 = T_\epsilon + T_\epsilon \circ \theta_{T_\epsilon}$, ..., $T_n = T_{n-1} + T_\epsilon \circ \theta_{T_{n-1}}$,

la suite des itérés de T_ϵ ; il est facile de montrer par récurrence en utilisant la propriété forte de Markov que $P_x[T_n < \infty] = 1$ pour tout x de E ; et comme $A_{T_n} > n\epsilon$, il s'ensuit que $P_x[A_\infty = \infty] = 1$ pour tout x de E .

II. MESURE INVARIANTE.

Rappelons que si $N(x, \cdot)$ est un noyau sur E , on note μN la mesure $\int \mu(dx) N(x, \cdot)$. Une mesure μ σ -finie est dite invariante pour X , si $\mu P_t = \mu$ pour tout t de \mathbb{R}_+ .

2.1. Proposition : μ est invariante pour X si et seulement si $\mu U^1 = \mu$

Démonstration :

La nécessité est évidente. Supposons μ invariante par U^1 .

1) Soit Γ un borélien de μ -mesure finie. L'équation résolvante conduit à la relation

$$(1) \quad \mu(\Gamma) - \mu U^\alpha(\Gamma) = (\alpha - 1) \mu U^\alpha(\Gamma) \quad \forall \alpha > 0.$$

si $\alpha > 1$ $\mu U^\alpha(\Gamma) \leq \mu U^1(\Gamma) = \mu(\Gamma) < \infty$,

on peut donc retrancher $\mu U^\alpha(\Gamma)$ aux deux membres de (1) ce qui donne

$$\mu(\Gamma) = \alpha \mu U^\alpha(\Gamma) \quad \forall \alpha \geq 1;$$

soit $\mu U^\alpha(\Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mu(\Gamma) dt$.

mais on a aussi $\mu U^\alpha(\Gamma) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mu P_t(\Gamma) dt$

soit finalement pour tout $\alpha \geq 0$:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-t} \mu P_t(\Gamma) dt = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-t} \mu(\Gamma) dt.$$

Il en résulte qu'il existe un ensemble N de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall t \notin N \quad \mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma)$$

2) Soit S un Π -système dénombrable d'ensembles de μ -mesure finie engendrant \mathcal{B} . Il existe un ensemble N de mesure de Lebesgue nulle tel que

$$\forall t \notin N, \forall \Gamma_n \in S \quad \mu P_t(\Gamma_n) = \mu(\Gamma_n),$$

et par suite, tel que pour tout borélien Γ et $\forall t \notin N$, $\mu P_t(\Gamma) = \mu(\Gamma)$.

Mais pour tout t de N , on peut trouver un t_0 de N^c tel que $t+t_0 \in N^c$, et l'on a pour toute fonction f borélienne :

$$\langle \mu P_t, f \rangle = \langle \mu, P_t f \rangle = \langle \mu P_{t_0}, P_t f \rangle = \langle \mu P_{t+t_0}, f \rangle = \langle \mu, f \rangle.$$

On a donc $\mu P_t = \mu$, quel que soit t dans \mathbb{R}_+ .

2.2 La proposition précédente ramène la recherche d'une mesure invariante par P_t à celle d'une mesure invariante par U^1 . Nous nous servirons pour cela de la modification suivante du théorème de Harrie [7] due à Foguel [6].

Théorème :

Soient (E, \mathfrak{B}, m) un espace probabilisé de type dénombrable et $P(x, A)$ une probabilité de transition sur E vérifiant les deux conditions suivantes :

$$1) P(x, E) = 1$$

2) S'il existe un x dans E tel que $\sum_1^\infty P^n(x, A) = 0$ alors $m(A) = 0$; il existe alors une mesure μ σ -finie surharmonique pour P et $m \ll \mu$.

2.3 Nous allons appliquer le théorème précédent à la fonction de transition $U^1(x, A)$. Il suffit de montrer qu'elle vérifie la condition 2) de l'énoncé précédent, or

$$(U^1)^n(x, A) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} P_t(x, A) dt$$

$$\sum_1^\infty (U^1)^n(x, A) = \int_0^\infty P_t(x, A) dt ;$$

Si cette quantité est nulle, la condition (H) entraîne évidemment que $m(A) = 0$; il existe donc une mesure σ -finie μ , surharmonique pour U^1 et telle que $m \ll \mu$. Soit Γ un borélien tel que $m(\Gamma) > 0$ et $\mu(\Gamma) < \infty$

$$\langle \mu - \mu U^1, \sum_1^N (U^1)^n(\cdot, \Gamma) \rangle = \mu U^1(\Gamma) - \mu (U^1)^{N+1}(\Gamma) \leq \mu(\Gamma) < \infty ,$$

mais d'autre part $\sum_1^\infty (U^1)^n(\cdot, \Gamma)$ est identiquement infini ce qui impose $\mu = \mu U^1$; la mesure μ est invariante. Ce raisonnement montre aussi que toute mesure excessive pour U^1 est invariante ; toute mesure excessive pour le processus est donc invariante.

2.4 Nous allons étudier la famille des mesures invariantes pour P_t , dont nous venons de voir qu'elle n'est pas vide.

Lemme 1 :

Soit A un ensemble absorbant pour X, v une mesure invariante, alors
 $m(A^c) = v(A^c) = 0$.

Démonstration :

Si $m(A^c) > 0$, alors $P_x[\int_0^\infty 1_{A^c}(X_s) ds = \infty] = 1$ pour tout x de A ce qui est impossible si A est absorbant.

D'autre part, si f est borélienne positive, $P_t f(x) = P_t(f 1_A)(x)$ sur A ; on a donc :

$$\int P_t f(x) 1_A(x) dv(x) \leq \int P_t(f 1_A)(x) dv(x) = \int_A f(x) dv(x) ;$$

$1_A \mu$ est donc excessive et par suite invariante. $1_{A^c} \mu$ différence de deux mesures invariantes est invariante. Or comme $m(A) > 0$, pour tout x de E, $U^1(x, A)$ est strictement positif, donc si v est une mesure positive non nulle $v U^1(A) = v(A)$ est strictement positif, $1_{A^c} \mu$ ne peut donc être que la mesure nulle.

Remarque :

Dans la proposition 1.3 on peut remplacer m-ps par v-ps

Lemme 2 :

Toute mesure invariante non nulle est équivalente à la mesure $m U^1$

Démonstration :

$m U^1(B) > 0$ entraîne $m\{x : U^1(x, B) > 0\} > 0$, donc d'après la proposition 1.3, $U^1(x, B) > 0$ partout; si v est invariante non nulle on a donc $v(B) = v U^1(B) > 0$.

Inversement $m U^1(B) = 0$ entraîne $m\{x : U^1(x, B) > 0\} = 0$, soit d'après la proposition 1.3 $P_x[\int_0^\infty 1_B(X_s) ds = 0] = 1$ m-presque partout, or l'ensemble $\{x : P_x[\int_0^\infty 1_B(X_s) ds = 0] = 1\}$ est absorbant, donc d'après le lemme 1 son complémentaire est de v-mesure nulle et par suite $v(B) = v U^1(B) = 0$.

2.5 Théorème :

Il existe pour le semi-groupe P_t , une mesure excessive σ -finie unique. Cette mesure est invariante et équivalente à $m U^1$.

Démonstration : Il reste à montrer l'unicité.

Remarquons tout d'abord que P_t est pour tout t une contraction positive et conservatrice de $L^1(\mu)$, en effet si F est un ensemble de mesure finie et positive la fonction

$$f(x) = \int_0^t P_s(x, F) ds$$

est un élément de $\mathcal{L}_+^1(\mu)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_t)^n f(x) = E_x \int_0^{\infty} 1_F(X_s) ds = \infty$$

quelque soit x de E d'après la proposition 1.3. Soit P_t^* le transposé de P_t , on peut le prolonger à toutes les fonctions mesurables finies et positives ([9]) et l'on sait que $P_t^* h \leq h$ si et seulement si $P_t^* h = h$. Maintenant d'après ce qui précède, toute mesure invariante est de la forme $h\mu$, où h vérifie $P_t^* h = h$ pour tout t . Et l'on sait [9] que $1_{\{h < a\}}$ et $1_{\{h \geq a\}}$ sont encore des fonctions de ce type. Il en résulte que $1_{\{h < a\}}\mu$ et $1_{\{h \geq a\}}\mu$ sont des mesures invariantes qui ne peuvent être équivalentes; une des deux est donc nulle et par suite $h = \text{cte}\mu - \text{ps}$. La mesure μ est la seule mesure invariante.

Remarque :

Le processus X satisfait à la condition (H) relativement à la mesure μ .

- 2.6 La mesure invariante ne charge pas les ensembles semi-polaires. Sous l'hypothèse (L) elle admet donc un support fin qui est finement parfait ([1]). Ce support est un ensemble absorbant et tous ses points sont finement récurrents ([2]). μ est alors équivalente à $U^\lambda(x, \cdot)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout x du support ([3]). Si le processus est de plus à résolvante fortement fellerienne, le support de μ est fermé au sens ordinaire et l'on a la proposition suivante :

Proposition :

Si X est à résolvante fortement fellerienne la mesure invariante est une mesure de Radon.

Démonstration :

Soit H un ensemble tel que $0 < \mu(H) < \infty$, et K un compact; soit

$a > 0$ la borne inférieure de $U^1(\cdot, H)$ sur K ; on a

$$\mu(H) \geq \int_K \mu(dx) U^1(x, H) \geq a \int_K \mu(dx) = a \mu(K)$$

ce qui démontre la proposition.

III. THEOREMES ERGODIQUES

3.1 Si A est une fonctionnelle additive du processus X , la fonction $t \rightarrow E_\mu [A_t]$ est linéaire et par suite l'application

$$f \rightsquigarrow \frac{1}{t} E_\mu \left[\int_0^t f(X_s) dA_s \right]$$

pour f borélienne, définit une mesure que nous appellerons ν_A . Nous poserons $\|\nu_A\| = \frac{1}{t} E_\mu [A_t]$.

Définition :

Si $\|\nu_A\|$ est finie, A sera dite intégrable. Si E est réunion d'une suite d'ensembles E_n tels que les fonctionnelles $1_{E_n} A$ soient intégrables, A sera dite σ -intégrable.

Nous allons énoncer quelques propriétés des mesures ν_A .

Théorème :

Soient A et B deux fonctionnelles additives et supposons $\|\nu_B\| > 0$,

alors

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_x[A_t]}{E_x[B_t]} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_B\|} \quad \mu\text{-ps}$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_t}{B_t} = \frac{\|\nu_A\|}{\|\nu_B\|} \quad P_x\text{-ps pour tout } x \text{ de } E$$

Nous ne démontrerons pas ici ce théorème ; la démonstration est exactement celle de [3] auquel nous renvoyons.

3.2 Proposition :

Si A ^{finie} est continue et σ -intégrable alors ν_A est invariante pour où τ_t est le changement de temps associé à A ; et c'est la seule mesure excessive pour P_{τ_t} .

Démonstration :

Sur la vue du lemme 2.1 il suffit de montrer que ν_A est invariante pour la résolvante V^1 de P_{τ_t} ; or

$$V^1 f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-A_t} f(X_t) dA_t .$$

Soit f une fonction positive telle que $\langle \nu_A, f \rangle < \infty$ et calculons $\langle \nu_A, V^1 f \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \nu_A, V^1 f \rangle &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s (E_{X_u} \int_0^\infty e^{-A_t} f(X_t) dA_t) dA_u \right] \\ &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s dA_u \int_0^\infty e^{-A_t \circ \theta_u} f(X_{t+u}) dA_{t+u} \right] \\ &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{A_u} dA_u \int_u^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] \\ &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{-A_v} f(X_v) dA_v \int_0^v e^{A_u} dA_u + \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \int_0^s e^{A_u} dA_u \right] \\ &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s e^{-A_v} f(X_v) (e^{A_v} - 1) dA_v + (e^A - 1) \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] \\ &= \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s f(X_v) dA_v - \int_0^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v + e^A \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] ; \\ \text{or} \quad &= E_\mu \left[e^A \int_s^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] = E_\mu \left[\int_0^\infty e^{-A_v} f(X_v) dA_v \right] , \end{aligned}$$

il vient donc

$$\langle \nu_A, V^1 f \rangle = \frac{1}{s} E_\mu \left[\int_0^s f(X_v) dA_v \right] = \langle \nu_A, f \rangle$$

ce qui démontre la première assertion ; la seconde se montrerait comme en 2.3 .

3.3 Il est clair que les mesures ν_A ne chargent pas les ensembles polaires et que si A est continue ν_A ne charge pas les ensembles semi-polaires.

Nous allons énoncer un résultat en sens inverse. Rappelons tout d'abord ([1]) que si F est un ensemble presque analytique on a :

$$\forall x \in E \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P_{X_t} [T_F < \infty] = 1_{R_F} \quad P_x\text{-ps}$$

$$\text{où} \quad R_F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [T_F \circ \theta_n < \infty] = \left[\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} 1_F(X_t) = 1 \right];$$

on en déduit que la fonction excessive $P \cdot [T_F < \infty]$ n'a que deux comportements possibles

$$\text{- ou bien} \quad \forall x \in E \quad P_x [T_F < \infty] = P_x [R_F] = 1$$

$$\text{- ou bien} \quad \mu\text{-ps} \quad P_x [T_F < \infty] = P_x [R_F] = 0 \quad .$$

on posera donc la définition suivante :

Définition :

Un ensemble presque-analytique F est dit transient si $P_\mu [T_F < \infty] = 0$
Un ensemble est dit transient s'il est contenu dans un ensemble presque-analytique transient. Un ensemble non transient est dit récurrent.

Sous l'hypothèse (L) si tous les points de E sont finement récurrents les ensembles transients sont les ensembles polaires.

Proposition :

Un ensemble est transient si et seulement si il est de mesure nulle pour toutes les mesures ν_A associées aux fonctionnelles additives intégrables.

Cette proposition est démontrée dans [4] .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AZEMA, M. DUFLO, D. REVUZ : Classes récurrentes des Processus de Markov.
Sém. Cal. Prob. Fac. Sciences, Strasbourg
1967, Springer-Verlag. Lect. Notes in Math. Vol. 51.
- [2] Récurrence fine des Processus de Markov. Ann.
Inst. Henri Poincaré, II n°3, 185-220 (1966).
- [3] Mesure invariante sur les classes récurrentes
des processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeits-
theorie 8, 157-181 (1967).
- [4] Propriétés relatives des Processus de Markov
récurrents. A paraître.
- [5] R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETTOOR : Markov processes and Potential theory. Academic
Press, 1968.
- [6] FOGUEL S.R. : Limit theorems for Markov processes. T.A.M.S.
121, n° 1 pp. 200-209, 1966.
- [7] T.E. HARRIS : The existence of stationary measures for cer-
tain Markov processes. Proceedings of the third
Berkeley symposium, vol. II, pp. 113-124.
- [8] P.A. MEYER : Processus de Markov. Lectures Notes. Springer.
- [9] J. NEVEU : Bases mathématiques du calcul des Probabilités.
Paris, Masson, 1963.