SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE MORANDO

Mesures aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 190-229
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__190_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.

STRASBOURG

1967-68

- Séminaire de Probabilités -

MESURES ALÉATOIRES

par Philippe MORANDO

Les deux exposés qui suivent sont les premiers d'une série consacrée aux mesures aléatoires. Le premier est d'ordre général : il contient des résultats que j'avais établis sur les mesures aléatoires avant de connaître les remarquables travaux de A. PREKOPA [5] [6] [7] sur ce sujet - travaux qui, de manière incompréhensible, semblent être presque inconnus dans les pays occidentaux (ils ne figurent en tout cas pas dans les bibliographies des articles que j'ai consultés). Bien que ces résultats se trouvent dans les articles de PREKOPA, les démonstrations semblent être assez différentes des siennes pour mériter d'être publiées dans ce séminaire. Par exemple, on évite ici par l'emploi de bornes essentielles certaines difficultés de mesurabilité qui ont arrêté PREKOPA, et cela permet de s'épargner de pénibles récurrences transfinies.

Le second exposé se présente de manière très différente : commencé lui aussi avant que j'aie eu connaissance de l'oeuvre de PREKOPA, il traite néanmoins de résultats "classiques" sur les mesures positives à accroissements indépendants : beaucoup de mathématiciens ont traité incidemment de cette question, et ont énoncé le théorème principal en le qualifiant de trivial. Mais en fait il est impossible de trouver une mise en forme véritable dans la littérature, si l'on excepte celle de PREKOPA citée plus haut, qui s'applique à des mesures beaucoup plus générales, et qui est très difficile à lire. Pour le cas positif, mon point de départ a été un article de KINGMAN, [2] qui prétend être une telle mise en forme, mais qui à mon avis laisse encore à désirer sur certains points.

Monsieur Lucien Le CAM m'a aimablement communiqué un travail fait sous sa direction par Mlle Nora SMIRIGA [9] sur un sujet voisin. La présentation de ce travail est très différente, et envisage les mesures aléatoires sous leur aspect "fonctionnel" plutôt qu'ensembliste. Je n'ai pas eu l'occasion de l'utiliser.

PROLONGEMENTS DES MESURES ALEATOIRES.

§ 1. PRELIMINAIRES.

1. FONCTIONS ADDITIVES ALEATOIRES.

1.1 On considère un ensemble X et une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de X (c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et stable pour les opérations de reunion finie et de passage au complémentaire).

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions étagées sur $(X,\mathcal{A})$. On considère d'autre part, un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et on note V l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles finies définies sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Pour simplifier l'écriture on notera :

$$f \sim g \quad \text{au lieu de} \quad f=g \quad \text{p.s.}$$
$$f \prec g \quad \text{au lieu de} \quad f\leq g \quad \text{p.s.}$$

1.2. <u>Définitions</u> : On appelle <u>fonction additive aléatoire</u> sur $(X,\mathcal{A})$ une application μ de $\mathcal{A}$ dans V telle que :

si A et B sont des éléments disjoints de $\mathcal{A}$, on a :

$$\mu(A \cup B) \sim \mu(A) + \mu(B) \quad \text{(additivité)}.$$

On appelle <u>intégrale aléatoire sur $\mathcal{E}$</u> une application de $\mathcal{E}$ dans V telle que :

1) $\mu(f+f') \sim \mu(f) + \mu(f')$ pour f et f' dans $\mathcal{E}$

2) $\mu(\lambda f) \sim \lambda\mu(f)$ pour $f \in \mathcal{E}$ et λ réel .

On établit facilement qu'il y a une correspondance bijective entre les fonctions additives aléatoires et les intégrales aléatoires, elle est **définie par**

$$\mu(f) = \sum_i c_i \mu(A_i) \text{ où } f = \sum_{i \in I \text{ fini}} c_i I_{A_i}$$

On dit que deux intégrales aléatoires μ et μ' (ou deux fonctions additives aléatoires) sont <u>indiscernables</u> si pour tout $f \in \mathcal{E}$ on a $\mu(f) \sim \mu'(f)$.

On dit qu'une fonction additive aléatoire est forte si elle vérifie :
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ dès que $A \cap B = \emptyset$.

1.3. <u>Lemme</u>.

Soit μ une fonction additive aléatoire sur $(X, \mathcal{A})$. Il en existe une modification indiscernable μ' qui est forte.

En effet, soit $\{f_\alpha\}$ une base de $\mathcal{E}$.
On obtient alors une fonction μ' qui convient en posant pour $f = \sum_\alpha c_\alpha f_\alpha$ (où les c_α sont nuls sauf un nombre fini)

$$\mu'(f) = \sum_\alpha c_\alpha \mu'(f_\alpha)$$

1.4. Définition.

Une fonction additive aléatoire μ est dite positive si, pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $\mu(A) \succsim 0$.

Il en résulte que si $A \subset B$ on a $\mu(A) \precsim \mu(B)$ (on dira d'une application μ possédant cette propriété qu'elle est presque monotone).

2. MESURES ALEATOIRES.

2.1. Définition.

Une mesure aléatoire sur $(X, \mathcal{A})$ est une application μ de $\mathcal{A}$ dans V telle que **si un élément A de $\mathcal{A}$ est réunion d'une famille dénombrable d'éléments $A_n \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints (ce que l'on note $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$) alors :**

$$\mu(A) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{ - additivité})$$

Les classes de mesures aléatoires pour la relation d'indiscernabilité sur $(X, \mathcal{A})$ forment un espace vectoriel réel ordonné par la relation : $m \succsim m'$ si $m(A) \succsim m'(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

2.2. Proposition.

1°) Si μ est une mesure aléatoire sur $(X, \mathcal{A})$ et si A_n est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ d'intersection vide (ce que l'on note $A_n \downarrow \emptyset$), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \sim 0$$

2°) Réciproquement, si une fonction additive aléatoire sur $(X,\mathcal{A})$ est continue pour les suites d'éléments de $\mathcal{A}$ qui décroissent vers $\emptyset$, c'est une mesure aléatoire.

Démontrons 1°)

Notons $B_n = A_n - A_{n+1}$. On a $B_n \in \mathcal{A}$ et $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Donc

$\mu(A_1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \sim \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)$. D'autre part, $A_1 = (A_1 - A_{n+1}) + A_{n+1}$

$$= \sum_{1}^{n} B_i + A_{n+1} .$$

Donc $\mu(A_1) \sim \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) + \mu(A_{n+1})$, d'où $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \sim 0$.

Démontrons 2°)

Soit $A = \sum_{1}^{\infty} A_n$. Notons $C_n = \sum_{n+1}^{\infty} A_n = A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, on a $C_n \in \mathcal{A}$ et $C_n \downarrow \emptyset$ donc $\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) \sim 0$.

D'autre part, en raison de l'additivité, on a

$$\mu(A) \sim \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(C_n) \quad \text{d'où le résultat.}$$

2.3. <u>Corollaire</u>.

Soit μ une mesure aléatoire sur $(X,\mathcal{A})$.

Si $A_n \uparrow A$ (où A_n et A sont dans $\mathcal{A}$) on a $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \sim \mu(A)$.

Si $A_n \downarrow A$ (où A_n et A sont dans $\mathcal{A}$) on a $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \sim \mu(A)$.

3. DECOMPOSITION DE JORDAN-HAHN.

3.1. Définition.

On dit qu'une mesure aléatoire μ sur $(X,\mathcal{O})$ est <u>décomposable</u> s'il existe deux mesures aléatoires positives μ_+ et μ_- telles que l'on ait pour $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) \sim \mu_+(A) - \mu_-(A) .$$

<u>Lemme</u> :

Soit μ' une version forte d'une mesure aléatoire décomposable. Il existe deux mesures aléatoires positives fortes μ'_+ et μ'_- telles que l'on ait pour tout $A \in \mathcal{O}$

$$\mu'(A) = \mu'_+(A) - \mu'_-(A) .$$

Démonstration. μ' **étant décomposable, on sait qu'il existe deux mesures aléatoires positives** μ_1 **et** μ_2 **telles que l'on ait pour tout** $A \in \mathcal{A}$

$$\mu'(A) \sim \mu_1(A) - \mu_2(A) .$$

Soit μ'_- une version forte de μ_2. Posons $\mu'_+(A)=\mu'(A)+\mu'_-(A)$; μ'_+ est une mesure aléatoire forte comme somme de mesures fortes et $\mu'_+(A) \sim \mu_1(A)$, donc μ'_+ est positive.

<u>Remarque</u> :

Si μ est forte positive, on sait que $\mu(A) \gtrsim 0$ et non pas $\mu(A) \geq 0$.

3.2. Définition.

On dit qu'une mesure aléatoire μ est bornée s'il existe une v.a. $\varphi \in V$ telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on ait

$$|\mu(A)| \leqslant \varphi \; .$$

3.3. Proposition.

Soit μ une mesure aléatoire sur $(X, \mathcal{A})$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1°) La mesure μ est bornée.

2°) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe une v.a. $v(A)$ telle que

$\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \leqslant v(A)$ pour $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

Démontrons 2°) ⇒ 1°) . Puisque $X=A+(X-A)$ on a

$$|\mu(A)| + |\mu(X-A)| \leqslant v(X) \; .$$

Donc, en posant $\varphi=v(x)$, on a $|\mu(A)| \leqslant \varphi$

Démontrons 1°) ⇒ 2°) . On utilise le résultat suivant valable pour un ensemble fini de nombres réels $(x_i)_{i\in I}$:

$$\sum_{i\in I} |x_i| = \sup \{ \sum_{i\in I} \epsilon_i x_i \; , \; \epsilon_i = \pm 1 \}$$

(La démonstration en est laissée au lecteur).

Supposons donc qu'il existe $\varphi \in V$ telle que $|\mu(A)| \leqslant \varphi$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Considérons une décomposition $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mu(A_i)\right| = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mu(A_i) \ , \ \varepsilon_i = \pm 1 \} .$$

Considérons un des termes entre crochet et notons :

$$B_1 = \bigcup_{\{i,\varepsilon_i=1\}} A_i$$

$$B_2 = \bigcup_{\{i,\varepsilon_i=-1\}} A_i = A - B_1$$

On a alors $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mu(A_i) \sim \mu(B_1) - \mu(B_2) \lesssim 2 \varphi$.

En prenant la borne supérieure pour toutes les combinaisons possibles $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mu(A_i)\right| \lesssim 2 \varphi .$$

C.Q.F.D.

3.4. <u>Définition.</u>

Soit μ une mesure bornée. On appelle <u>valeur absolue de</u> μ et on note $|\mu|$ l'application (définie à des p.s. près) de $\mathfrak{A}$ dans V telle que

$$|\mu|(A) \sim \text{ess sup} \{ \sum_{i=1}^{n} \left|\mu(A_i)\right| , \ A = \sum_{i=1}^{n} A_i \} .$$

Cette définition est justifiée par la proposition précédente.

Notons que, si μ et μ' sont indiscernables, on a pour tout $A \in \mathfrak{A}$

$$|\mu|(A) \sim |\mu'|(A) .$$

3.4. Théorème.

Pour qu'une mesure aléatoire soit décomposable, il est nécessaire qu'elle soit bornée.

En effet, soit μ une mesure décomposable. Il existe deux mesures aléatoires positives μ_+ et μ_- telles que

$$\mu(A) \sim \mu_+(A) - \mu_-(A).$$

On a donc

$$|\mu(A)| \preccurlyeq \mu_+(A) + \mu_-(A) .$$

Les mesures μ_+ et μ_- étant monotones on a alors :

$$|\mu(A)| \preccurlyeq \mu_+(X) + \mu_-(X) .$$

Nous allons maintenant démontrer la réciproque de ce théorème.

3.5. Théorème de Jordan-Hahn

Soit μ une mesure aléatoire bornée sur $(X,\mathcal{A})$. Elle est décomposable et si

$$|\mu|(A) \sim \text{ess sup}\{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) , A = \sum_{i=1}^{n} A_i \},$$

on obtient une décomposition privilégiée de μ en posant

$$\mu_+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \qquad \mu_- = \frac{|\mu| - \mu}{2}$$

(décomposition de Jordan-Hahn).

Démonstration.

La variable aléatoire $|\mu|(A)$ est positive. Montrons que $|\mu|$ est σ-additive. Considérons $A = \sum_1^\infty A_n$

α) On a $|\mu|(A) \succcurlyeq \sum_1^\infty |\mu|(A_n)$.

En effet on obtient certaines décompositions de A en décomposant les p premiers A_n et en considérant en un seul bloc l'élément $\bigcup_{p+1}^\infty A_n$.

On a alors :

$$|\mu|(A) \succcurlyeq \text{ess sup } \{ \sum_{n=1}^{p} \sum_j |\mu(A_{n,j})| + |\mu(\bigcup_{p+1}^\infty A_n)|, \ A_n = \sum_j A_{n,j} \}$$

$$\succcurlyeq \text{ess sup } \{ \sum_{n=1}^{p} \sum_j |\mu(A_{n,j})|, \ A_n = \sum_j A_{n,j} \}$$

$$\sim \sum_{n=1}^{p} \text{ess sup } \{ \sum_j |\mu(A_{n,j})|, \ A_n = \sum_j A_{n,j} \}$$

$$|\mu|(A) \succcurlyeq \sum_{n=1}^{p} |\mu|(A_n).$$

Ceci étant valable pour tout entier p on a :

$$|\mu|(A) \succcurlyeq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n).$$

β) On a $|\mu|(A) \preccurlyeq \sum_1^\infty |\mu|(A_n)$.

En effet, $|\mu|(A) \sim \text{ess sup } \{ \sum_{i=1}^{p} |\mu(B_i)|, \ A = \sum_{i=1}^{p} B_i \}$

Choisissons une décomposition $A = \sum_{i=1}^{p} B_i$.

On peut écrire $B_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$ où $B_{i,n} = B_i \cap A_n$

On a alors

$$\mu(B_i) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_{i,n})$$

$$|\mu(B_i)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(B_{i,n})| .$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{p} |\mu(B_i)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} |\mu(B_{i,n})|$$

Mais $A_n = \sum_{i=1}^{p} B_{i,n}$ donc

$$\sum_{i=1}^{p} |\mu(B_{i,n})| \leqslant |\mu|(A_n) ;$$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{p} |\mu(B_{i,n})| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n)$.

Finalement

$$\sum_{i=1}^{p} |\mu(B_i)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \quad \text{pour toute décomposition} \quad A = \sum_{i=1}^{p} B_i ,$$

d'où le résultat

$$|\mu|(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) .$$

γ) Finalement $|\mu|$ est une mesure aléatoire positive (on a vu dans la proposition 3.3. qu'elle était bornée). Posons

$$\mu_+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{|\mu| - \mu}{2} .$$

On a $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$ pour tout $A \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}$. Donc μ_+ et μ_- sont des mesures aléatoires positives bornées et l'on a :

$$\mu(A) \sim \mu_+(A)-\mu_-(A) \quad \text{pour} \quad A \in \mathcal{A} .$$

Remarque.

On a même $\mu(A)=\mu_+(A)-\mu_-(A)$. Si μ est forte et si on a choisi les $|\mu|(A)$ de façon telle que la mesure aléatoire $|\mu|$ soit forte, les mesures μ_+ et μ_- seront fortes et on obtiendra ainsi la décomposition forte dont on a établi l'existence en 3.1.

3.6. Proposition.

Considérons la décomposition de Jordan-Hahn $\mu=\mu_+-\mu_-$ d'une mesure aléatoire bornée.

On a $\mu_+(A) \sim \operatorname{ess\,sup} \{\mu(B), B\in\mathcal{A}, B\subset A\}$

$\mu_-(A) \sim \operatorname{ess\,sup}\{-\mu(B), B\in\mathcal{A}, B\subset A\}$.

Il suffit de montrer la première égalité, la deuxième en résultant immédiatement si l'on remarque que $\mu_-=(-\mu)_+$.

On utilise le résultat suivant sur une suite finie de nombres réels $(x_i)_{i\in I}$: posons $x_i^+ = \sup (x_i,0)$. On a $\sum\limits_{i\in I} x_i^+ = \sup\limits_{J\subset I} \sum\limits_{j\in J} x_j$.

(La démonstration en est laissée au lecteur).

On a alors

$$\mu_+(A) = \frac{|\mu|(A) + \mu(A)}{2}$$

$$\sim \operatorname{ess\,sup} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mu(A_i)|+\mu(A_i)}{2} \quad , A = \sum_{i=1}^{n} A_i \right\} .$$

Mais $\sum_{i=1}^{n} \frac{|\mu(A_i)|+\mu(A_i)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)^+ = \sup_{J\subset I} \sum_{j\in J} \mu(A_j)$

$$\sim \sup_{J\subset I} \mu(B_J) \text{ où } B_J = \bigcup_{j\in J} A_j$$

$$\leqslant \operatorname{ess\,sup} \{\mu(B),\ B\in\mathcal{A},\ B\subset A\}.$$

D'où

$$\mu_+(A) \leqslant \operatorname{ess\,sup} \{\mu(B),\ B\in\mathcal{A},\ B\subset A\}.$$

D'autre part, si $B\subset A$, on a $\mu(B) \leqslant \mu_+(B) \leqslant \mu_+(A)$,

donc $\operatorname{ess\,sup} \{\mu(B), B\in\mathcal{A},\ B\subset\mathcal{A}\} \leqslant \mu_+(A)$, d'où l'égalité.

3.7. Proposition.

Soit μ une mesure aléatoire bornée, μ_+ et μ_- les termes de sa décomposition de Jordan-Hahn. Alors μ_+(resp μ_-) est la plus petite des mesures aléatoires positives qui majorent μ (resp. $-\mu$).

En effet, soit m une mesure aléatoire positive majorant μ. On a pour $B\subset A$, $B\in\mathcal{A}$:

$$m(A) \geqslant m(B) \geqslant \mu(B)$$

Donc $m(A) \geqslant \operatorname{ess\,sup} \{\mu(B), B\in\mathcal{A},\ B\subset\mathcal{A}\}$, c'est-à-dire $m \geqslant \mu_+$.

On a la même démonstration pour μ_- (on peut d'ailleurs remarquer que $\mu_- = (-\mu)_+$)

Corollaire :

Soit $\mu \sim m_1 - m_2$ une décomposition quelconque en deux mesures positives d'une mesure μ bornée . On a $m_1 \gtrsim \mu_+$ et $m_2 \gtrsim \mu_-$ (La démonstration est triviale).

3.8. Résumé.

Pour qu'une mesure aléatoire μ soit décomposable, il faut et il suffit qu'elle soit bornée. S'il en est ainsi, la formule

$$|\mu| (A) \sim \text{ess sup} \{ \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \ , \quad A = \sum_{i=1}^{n} A_i \}$$

définit une mesure aléatoire positive $|\mu|$. Posons alors

$$\mu_+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{|\mu| - \mu}{2}$$

On a $\mu = \mu_+ - \mu_-$ (décomposition de Jordan-Hahn)

La décomposition de Jordan-Hahn jouit des propriétés suivantes :

1) $\mu_+(A) \sim \text{ess sup} \{\mu(B), B \in \mathcal{A}, B \subset A \}$,

$\mu_-(A) \sim \text{ess sup} \{-\mu(B), B \in \mathcal{A}, B \subset A \}$;

2) si m est une mesure positive majorant μ , alors $m \gtrsim \mu_+$;

si m est une mesure positive majorant $-\mu$, alors $m \gtrsim \mu_-$;

3) si $\mu \sim m_1 - m_2$ est une autre décomposition de la mesure μ , on a $m_1 \gtrsim \mu_+$ et $m_2 \gtrsim \mu_-$.

§ II. PROLONGEMENT

On considère une mesure aléatoire bornée μ sur $(X,\mathcal{A})$. On se propose de la prolonger en une mesure aléatoire sur $(X,\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. La mesure μ étant différence de deux mesures positives, on va prouver qu'il existe un prolongement de μ en prolongeant d'abord les mesures positives. On notera $\mathcal{G}$ l'ensemble des réunions de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{A}$. (C'est aussi l'ensemble des réunions de suites quelconques d'éléments de $\mathcal{A}$).

1. PROLONGEMENT A $\mathcal{G}$ D'UNE MESURE POSITIVE.

Soit μ une mesure aléatoire positive sur $(X,\mathcal{A})$. Si $G \in \mathcal{G}$ on pose $\mu'(G) \sim \text{ess sup}\,\{\mu(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \subset G\}$. On a $\mu(A) \lesssim \mu(X)$. $\mu'(G)$ est donc bien définie. μ et μ' sont indiscernables sur $\mathcal{A}$. μ' est p.s. positive et p.s. monotone.

1.1. Proposition.

Si $G_n \in \mathcal{G}$ et si $G_n \uparrow G$ alors $G \in \mathcal{G}$ et $\lim_{n\to\infty} \mu'(G_n) \sim \mu'(G)$.

Démonstration.

Soit $\{A_{m,n}\}$ une suite croissante en m d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\bigcup_m A_{m,n} = G_n$.

Posons $D_m = \bigcup_{n \leq m} A_{m,n}$. On a donc $D_m \in \mathcal{A}$. La suite $\{D_m\}$

est croissante ; pour $n \leq m$ on a $A_{m,n} \subset D_m \subset G_m \subset G$. Faisons tendre m puis n vers l'infini. On obtient $D_m \uparrow G$. Donc $G \in \mathcal{G}$.

D'autre part si $A \in \mathcal{A}$ avec $A \subset G$ on a :

$$A \cap D_n \uparrow A$$

D'où $\mu(A) \sim \lim_n \mu(A \cap D_n) \precsim \lim_n \mu(D_n)$ (en vertu du corollaire I.2.3. et de la monotonie de μ).

On en déduit en vertu de la monotonie de μ'

$\mu'(G) \sim \operatorname{ess\,sup} \{\mu(A),\ A \in \mathcal{A},\ A \subset G\} \precsim \lim_n \mu(D_n) \precsim \lim_n \mu'(G_n)$ et

$\lim_n \mu'(G_n) \precsim \mu'(G)$. D'où $\lim_n \mu'(G_n) \sim \mu'(G)$.

1.2. <u>Proposition</u>.

Soient G et H deux éléments quelconques de $\mathcal{G}$. On a $G \cup H \in \mathcal{G}$, $G \cap H \in \mathcal{G}$ et de plus :

$$\mu'(G \cup H) + \mu'(G \cap H) \sim \mu'(G) + \mu'(H) .$$

En effet soit A_n une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ croissant vers G

B_n une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ croissant vers H

alors $A_n \cup B_n$ croît vers $G \cup H$ donc $G \cup H \in \mathcal{G}$

$A_n \cap B_n$ croît vers $G \cap H$ donc $G \cap H \in \mathcal{G}$.

On a d'autre part pour chaque n :

$$\mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n) \sim \mu(A_n) + \mu(B_n) .$$

On fait alors tendre n vers l'infini et la proposition précédente donne :

$$\mu'(G \cup H) + \mu'(G \cap H) \sim \mu'(G) + \mu'(H) .$$

2. PROLONGEMENT A $\mathcal{T}$ D'UNE MESURE POSITIVE.

Soit $T \in \mathcal{T}$ un élément de la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. On pose :

$$\nu(T) \sim \operatorname{ess\,inf} \{\mu'(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset T\}$$

ν et μ' sont indiscernables sur $\mathcal{G}$.

ν est p.s. positive et p.s. monotone.

Pour montrer que ν est une mesure aléatoire nous allons montrer que ν est continue pour les suites croissantes et additive.

2.1. Proposition.

Si $T_n \in \mathcal{T}$ et si $T_n \uparrow T$ alors $\lim\limits_n \nu(T_n) \sim \nu(T)$.

(1) Envisageons d'abord le cas du prolongement d'une mesure positive μ telle que $\mu(X) \sim 1$.

On a alors, pour tout $T \in \mathcal{T}$, $\nu(T) \lesssim 1$. La suite des $\nu(T_n)$ est croissante majorée par $\nu(T)$, elle a donc une limite (p.s.) et l'on a :

$$0 \lesssim \lim_n \nu(T_n) \lesssim \nu(T) \lesssim 1 .$$

Pour montrer que $\lim\limits_n \nu(T_n) \sim \nu(T)$ il suffit de montrer que les espérances de ces deux v.a. sont les mêmes, ce qui revient à montrer :

$$\lim_n E[\nu(T_n)] = E[\nu(T)]$$

Lemme.

Posons pour $T \in \mathcal{T}$, $\alpha(T)=E[\nu(T)]$. α est une mesure (au sens ordinaire) positive sur $(X,\mathcal{C})$.

En effet, la σ-additivité de ν sur $\mathcal{A}$ entraîne la σ-additivité de α sur $\mathcal{A}$.

D'autre part, si $G \in \mathcal{G}$ s'écrit $G = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ où A_n est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\nu(G) \sim \lim_n \uparrow \nu(A_n)$, donc $\alpha(G) = \lim_n \uparrow \alpha(A_n)$.

Si $T \in \mathcal{C}$ on sait qu'il existe une suite G_n décroissante d'éléments de $\mathcal{G}$ contenant T telle que $\lim_n \nu(G_n) \sim \nu(T)$. On a alors $\lim_n \alpha(G_n) = \alpha(T)$. Mais on a évidemment $\alpha(T) \leq \inf_{\substack{G \supset T \\ G \in \mathcal{G}}} \alpha(G)$

d'où $\alpha(T) = \inf_{\substack{G \supset T \\ G \in \mathcal{G}}} \alpha(G)$.

Connaissant α sur $\mathcal{A}$ on a donc obtenu α sur $\mathcal{C}$ en faisant le prolongement de la manière classique (unique). D'où le lemme : Il est alors évident que si $T_n \uparrow T$ on a $\alpha(T_n) \to \alpha(T)$.

(2) Cas Général.

Notons $\varphi = \mu(X)$; φ est une v.a. positive (p.s.) et finie. Considérons une nouvelle application de $\mathcal{C}$ dans V définie de la façon suivante :

$$\mu_1(T)^\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi(\omega) \leq 0 \\ \dfrac{\mu(T)^\omega}{\varphi(\omega)} & \text{si } \varphi(\omega) > 0 \end{cases}$$

μ_1 est une mesure aléatoire positive sur $(X,\mathcal{A})$ et l'on a :

$$\mu_1(X) \sim 1 \qquad \mu(T) \sim \varphi\, \mu_1(T) .$$

Si $T_n \uparrow T$ on a $\lim_n \mu_1(T_n) \sim \mu_1(T)$ d'où

$$\lim_n \mu(T_n) \sim \mu(T).$$

2.2. <u>Proposition.</u> ν est additive.

On procède par étapes :

(α) Soient T et T' quelconques dans $\mathcal{T}$. On a :

$$\nu(T) + \nu(T') \gtrsim \nu(T \cup T') + \nu(T \cap T') .$$

En effet, $\nu(T) + \nu(T') \sim \text{ess inf } \{\mu'(G)+\mu'(H),\ G \supset T\ ,\ H \supset T'\ \}$. D'où **d'après 1.2.**

$$\nu(T)+\nu(T') > \text{ess inf } \{\mu'(G \cup H),\ G \supset T,\ H \supset T'\} + \text{ess inf}\{\mu'(G \cap H),\ G \supset T,\ H \supset T'\}$$

$$> \text{ess inf } \{\mu'(G),\ G \supset T \cup T'\} + \text{ess inf}\{\mu'(G),\ G \supset T \cap T'\} .$$

D'où

$$\nu(T) + \nu(T') \gtrsim \nu(T \cup T') + \nu(T \cup T') .$$

(β) $\nu(T)+\nu(T^c) \sim \mu(X)$ où l'on a posé $X-T=T^c$.

Soit $\mathcal{T}_o$ la classe des éléments de $\mathcal{T}$ solutions de cette équation. On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_o$ et $\mathcal{T}_o$ est stable par passage au complémentaire. Montrons que $\mathcal{T}_o$ est stable par passage à la limite croissante (classe monotone).

Si $T_n \uparrow T$ on a $\nu(T_n) \uparrow \nu(T)$ d'après ce qui précède. Si l'on a pour tout n :

$$\nu(T_n) + \nu\ (T_n^c\ ) \sim \mu(X)$$

on a encore $\qquad \nu(T_n) + \nu(T^c) \quad \lesssim \mu(X)$

On obtient en faisant tendre n vers ∞ :

$$\nu(T) + \nu(T^c) \lesssim \mu(X) .$$

Mais en vertu de (α) on a :

$$\nu(T) + \nu(T^c) \gtrsim \mu(X) .$$

Donc

$$\nu(T) + \nu(T^c) \sim \mu(X) .$$

On a finalement $\mathcal{T}_o = \mathcal{T}$.

(γ) ν est additive.

Appliquons (α) au couple T,T' puis au couple T^c, T'^c, on a

$$\nu(T \cup T') + \nu(T \cap T') \lesssim \nu(T) + \nu(T')$$

$$\nu((T \cap T')^c) + \nu ((T \cup T')^c) \lesssim \nu(T^c) + \nu(T'^c) .$$

En additionnant les deux membres on a $2\mu(X)$ de chaque côté en vertu de (β) Les deux inégalités précédentes sont donc des égalités et si $T \cap T' = \emptyset$ on a $\nu(T \cup T') \sim \nu(T) + \nu(T')$.

3. PROLONGEMENT D'UNE MESURE BORNÉE.

Théorème. Soit μ une mesure bornée sur $(X,\mathcal{A})$ et $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Il existe une mesure et une seule sur $(X,\mathcal{T})$ prolongeant la mesure μ (c'est-à-dire telle que ν et μ soient indiscernables sur $(X,\mathcal{A})$).

On décompose μ en différence de deux mesures positives et le paragraphe précédent donne un prolongement de μ . Il reste à montrer l'unicité. Soient ν et ν' deux prolongements de μ et considérons la classe $\mathcal{C}_o$ des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $\nu(T) \sim \nu(T')$.

On a $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_o$. $\mathcal{C}_o$ est stable par passage au complémentaire puisque $\nu(T) + \nu(T^c) \sim \mu(X)$ et $\mathcal{C}_o$ est stable pour les limites croissantes en vertu de la proposition 2.1. Donc $\mathcal{C}_o = \mathcal{C}$(classes monotones).

§ III. INDEPENDANCE

1. DÉFINITION ET PRÉLIMINAIRES.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de X et μ une mesure aléatoire sur $(X,\mathcal{A})$. On dit que μ est "à accroissements indépendants" si, pour tout système fini d'ensembles $A_1, A_2 .., A_p$ deux à deux disjoints appartenant à $\mathcal{A}$ le système formé des variables aléatoires $\{\mu(A_1) \cdots \mu(A_p)\}$ est indépendant (on écrira brièvement $\{\mu(A_i)\}$ est indépendant). On se propose de montrer que si μ est une mesure aléatoire bornée à accroissements indépendants, il en est de même de son prolongement à $(X,\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

En vertu de l'unicité du prolongement on considérera dans la suite une mesure aléatoire bornée sur $(X,\mathcal{C})$ dont la restriction à $(X,\mathcal{A})$ est à accroissements indépendants et on montrera qu'alors elle est à accroissements indépendants sur $(X,\mathcal{C})$. On notera $\mathcal{G}$ l'ensemble des réunions de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}_\delta$ l'ensemble des intersections des suites décroissantes d'éléments de $\mathcal{G}$.

1.1. Etant donnée une suite $\{A_p\}$ de parties d'un ensemble E on note

$$\overline{\lim}\, A_p = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{p \geq i} A_p$$

$$\underline{\lim}\, A_p = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{p \geq i} A_p$$

On dit que A_p tend vers A quand p tend vers l'infini(et on note $A_p \longrightarrow A$) si l'on a $\overline{\lim}\, A_p = \underline{\lim}\, A_p = A$. C'est dire encore que l'indicatrice de A_p tend vers l'indicatrice de A . On rappelle les résultats suivants :

- si $A_n \to A$ et $B_n \to B$ alors $A_n - B_n \to A-B$
- en particulier si $A \cap B = \emptyset$ on a $A_n - B_n \to A$.

On utilisera en particulier la conséquence suivante : soient des A_i $(i=1,2,\ldots,p)$ en nombre fini, disjoints deux à deux, tels que $A_i = \lim_{n \to \infty} A_{i,n}$, alors $A_i = \lim_{n \to \infty} (A_{i,n} - \bigcup_{j \neq i} A_{j,n})$

- si $A_n \to A$ et $B_n \to B$ alors $A_n \cap B_n \to A \cap B$

  et $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

1.2. Lemme :

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des variables aléatoires réelles telles que $X_p = \lim_n X_{p,n}$ $\forall p = 1,2\ldots k$; supposons que pour n fixé le système $(X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{k,n})$ soit indépendant ; alros le système $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est indépendant.

En effet, soient $f_1, \ldots, f_k$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. On a alors $f_1(X_1)\ldots f_k(X_k) = \lim\limits_n f_1(X_{1,n})\ldots f_k(X_{k,n})$ d'où par le théorème de la convergence bornée

$$E[f_1(X_1)\ldots f_k(X_k)] = \lim_n E[f_1(X_{1,n})\ldots f_k(X_{k,n})]$$

$$= \lim_n E[f_1(X_{1,n})]\ldots E[f_k(X_{k,n})]$$

$$= E[f_1(X_1)]\ldots E[f_k(X_k)] .$$

1.3. <u>Lemme</u>.

Soit μ une mesure bornée sur $(X, \mathcal{C})$ et $A = \lim\limits_n A_n$ avec A et A_n appartenant à $\mathcal{C}$. Alors $\lim \mu(A_n) \sim \mu(A)$.

La mesure μ étant décomposable il suffit de traiter le cas d'une mesure μ positive.

Remarquons d'abord que $\overline{\lim}\ \mu(A_n)$ est bien définie car $\mu(A_n) \lesssim \mu(X)$ pour tout n .

Montrons d'abord que $\mu(\underline{\lim}\ A_n) < \underline{\lim}\ \mu(A_n)$. On a $\underline{\lim}\ A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k \geq n} A_k$. Posons $\bigcap\limits_{k \geq n} A_k = B_n$. B_n est une suite croissante tendant vers $\underline{\lim}(A_n)$.

Donc (*) $$\mu(\underline{\lim}\ A_n) \sim \lim_n \mu(B_n)$$

D'autre part pour $k \geq n$ on a $B_n \subset A_k$ donc

$$\mu(B_n) \lesssim \mu(A_k) \quad \text{si} \quad k \geq n$$

$$\lesssim \inf_{k \geq n} \mu(A_k)$$

D'où (**) $$\mu(B_n) \leqslant \sup_n \inf_{k\geq n} \mu(A_k) = \underline{\lim}\, \mu(A_n) .$$

En rapprochant (*) et (**) on a le résultat cherché.

On démontre de manière analogue : $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n)$. On termine alors la démonstration en écrivant :

$$\mu(A) \sim \mu(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n) \leqslant \mu(\overline{\lim}\, A_n) = \mu(A) .$$

D'où

$$\overline{\lim}\, \mu(A_n) \sim \underline{\lim}\, \mu(A_n) \sim \mu(A)$$

1.4. Lemme.

Soient μ une mesure bornée sur $(X,\mathcal{T})$ et $T\in\mathcal{T}$. Il existe un élément $D\in\mathcal{G}_\delta$ tel que $D\supset T$ et $|\mu|(D-T)\sim 0$. Ceci entraîne $\mu(T)\sim\mu(D)$ (car $|\mu(A)|\leqslant|\mu|(A)$ pour $A\in\mathcal{T}$) .

Démonstration.

$|\mu|$ est une mesure aléatoire positive. En démontrant la proposition II.2.1 on a remarqué que si $T\in\mathcal{T}$ il existe une suite $\{H_p\}$ décroissante d'éléments de $\mathcal{G}$ contenant T et tels que $|\mu|(T)\sim \lim\limits_p |\mu|(H_p)$. Posons $D=\bigcap\limits_p H_p$. On a $D\in\mathcal{G}_\delta$ et $\lim\limits_p|\mu|(H_p)\sim|\mu|(D)$ en vertu du lemme 1.3. D'où $|\mu|(T)\sim|\mu|(D)$ c'est-à-dire encore $|\mu|(T-D)\sim 0$.

2. THEOREME D'INDEPENDANCE.

On suppose donc qu'une mesure bornée sur $(X,\mathcal{T})$ est à accroissements indépendants sur $(X,\mathcal{A})$. On procède en deux étapes pour montrer l'indépendance sur $(X,\mathcal{T})$. On notera $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ l'ensemble des éléments de la forme $G_1 \cap G_2^c$, où G_1 et G_2 sont dans $\mathcal{G}$.

2.1. Lemme.

Soient $C_1, C_2, \dots, C_p$ des éléments de $\mathcal{G} - \mathcal{G}$ deux à deux disjoints. Le système $\{\mu(C_i)\}$ est indépendant.

En effet il existe pour chaque i deux suites croissantes $\{A_{i,n}\}$ et $\{B_{i,n}\}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que :

$$C_i = \lim_n A_{i,n} - \lim_n B_{i,n} \quad .$$

Posons $D_{i,n} = A_{i,n} - B_{i,n}$. On a $C_i = \lim_n D_{i,n}$ donc en posant $C_{i,n} = D_{i,n} - \bigcup_{j \neq i} D_{i,n}$ on a $C_i = \lim_n C_{i,n}$ (d'après 1.1.). On a $C_{i,n} \in \mathcal{A}$ et pour n fixé les $C_{i,n}$ sont deux à deux disjoints. Le système $\{\mu(C_{i,n})\}$ est donc indépendant . Les lemmes 1.2. et 1.3. montrent alors que le système $\{\mu(C_i)\}$ est indépendant.

2.2. Indépendance sur $\mathcal{T}$.

Considérons des éléments $T_1, T_2, \dots, T_p$ de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. On se propose de montrer que le système $\{\mu(T_i)\}$ est indépendant. Utilisant le lemme 1.4. on sait qu'il existe $D_i \in \mathcal{G}_\delta$ tel que $D_i \supset T_i$ et $|\mu|(D_i - T_i) \sim 0$. Montrons que si $i \neq j$ on a $|\mu|(D_i \cap D_j) \sim 0$.
En effet

$$D_i \cap D_j \subset (D_i - T_i) \cup (D_j - T_j)$$

Donc $$|\mu|(D_i \cap D_j) \leqslant |\mu|(D_i - T_i) + |\mu|(D_j - T_j)$$

d'où

$$|\mu|(D_i \cap D_j) \sim 0 \ .$$

On en déduit

$$|\mu|(\bigcup_{j\neq i}(D_i\cap D_j)) \leq \sum_{j\neq i}|\mu|(D_i\cap D_j) \sim 0$$

d'où

$$\mu(D_i \cap \bigcup_{j\neq i} D_j)\sim 0 \quad .$$

Pour montrer que le système $\{\mu(D_i)\}$ est indépendant, il suffit de poser $E_i=D_i-\bigcup_{j\neq i} D_j$ et de montrer que le système des $\{\mu(E_i)\}$ est indépendant (car $\mu(E_i)\sim \mu(D_i)$) .

Les E_i sont deux à deux disjoints. Il existe une suite $\{G_{i,n}\} \in \mathcal{G}$ telle que $D_i = \lim\limits_n G_{i,n}$.

Donc $E_i = \lim\limits_n [G_{i,n} - \bigcup_{j\neq i} G_{j,n}]$

Posons $E_{i,n} = G_{i,n} - \bigcup_{j\neq i} G_{j,n}$. On a $E_{i,n} \in \mathcal{G}-\mathcal{G}$ et les $E_{i,n}$ sont pour n fixé deux à deux disjoints. On est donc ramené à l'indépendance sur $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ compte tenu des lemmes 1.2. et 1.3.

--ooo 0 ooo---

REPRESENTATION DES MESURES ALEATOIRES POSITIVES A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

On s'intéresse dans cet exposé à une mesure aléatoire positive μ à accroissements indépendants, définie sur un espace mesurable $(X,\underline{\underline{X}})$. Nous désignerons par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ l'espace probabilisé (supposé complet) sur lequel sont définies les variables aléatoires $\mu(A,.)$ $(A\in\underline{\underline{X}})$.

Une première démarche consistera à déterminer les lois des variables aléatoires $\mu(A,.)$ - lois qui déterminent, en vertu de l'indépendance, la loi de la mesure aléatoire toute entière. Ensuite, nous étudierons le choix de bonnes "versions" de la mesure aléatoire.

§ 1. FORMULE DE REPRESENTATION DE LEVY .

1. Atomes

1.1. Définition.

On pose pour tout t réel >0 , et tout $A\in\underline{\underline{X}}$.

$$\lambda_t(A) = -\log E[e^{-t\mu(A,.)}]$$

On a évidemment les propriétés suivantes :

a) $\lambda_t(A) = 0 \iff \mu(A,.) = 0$ p.s.

b) $\lambda_t(A) < +\infty$ pour tout $A\in\underline{\underline{X}}$ (car $\mu(A) < \infty$ p.s. d'après la définition que nous avons adoptée pour les mesures aléatoires, donc $E[e^{-t\mu(A)}]>0$)

c) λ_t est une mesure positive sur $(X,\underline{\underline{X}})$.

1.2. Définition.

On dit que $A\in\underline{\underline{X}}$ est un atome de la mesure aléatoire μ si

1) $P\{\mu(A)\neq 0\} > 0$

2) pour tout $C \in \underline{\underline{X}}$ contenu dans A , ou bien $\mu(C,.) = \mu(A,.)$ p.s., ou bien $\mu(C,.) = 0$ p.s.

Compte tenu de la propriété a) ci-dessus, on a la proposition suivante, qui est évidente :

1.3. Proposition.

Les atomes de μ sont les mêmes que les atomes de la mesure λ_t , pour $t > 0$ quelconque.

Un théorème bien connu sur les mesures ordinaires permet d'écrire $X = \bigcup_n X_n$, où les ensembles X_n sont disjoints, où X_n est un atome de λ_t (donc de μ) pour tout $n > 1$, et où X_0 ne contient aucun atome de λ_t .

La mesure μ est alors somme de la série des mesures aléatoires indépendantes μ_n définies par $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$ $(A \in \underline{\underline{X}})$. La structure des mesures μ_n étant triviale pour $n \geqq 1$, on est ramené à étudier la structure de la partie non atomique μ_0 . Nous changerons donc de notation, et nous supposerons désormais que μ est sans atomes .

2. Représentation de Lévy .

Rappelons que toute loi de probabilité μ indéfiniment divisible sur la demi-droite positive admet une représentation de LEVY

$$- \log \int_0^\infty e^{-tx}\mu(dx) = ct + \int_0^\infty (1 - e^{-tu})q(du)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1 - e^{-tz}}{1 - e^{-z}} C(dz)$$

où c est une constante, q une mesure positive sur $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ telle que $\int_0^\infty 1 \wedge x \ q(dx) < \infty$, et où C est une mesure positive bornée sur $\mathbb{R}_+$. On passe aussitôt de l'une à l'autre de ces représentations.

2.1

La mesure λ_1 étant non atomique en vertu de ce qui précède, fixons $A\in\underline{\underline{X}}$ et posons $a = \lambda_1(\Lambda)$. Un théorème classique (Halmos, [I], p. 174) affirme l'existence pour tout entier n d'une partition de Λ en ensembles $\Lambda_{n,j}\in\underline{\underline{X}}$ $(j = 1,\dots,n)$ tels que

$$\lambda_1(\Lambda_{n,j}) = \frac{a}{n} \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,n .$$

On a alors $E[e^{-\mu(\Lambda_{n,j})}] = e^{-a/n}$ et donc, pour tout $c > 0$

$$P\{\mu(\Lambda_{n,j}) \geqq c\} \leqq \frac{1 - e^{-a/n}}{1 - e^{-c}}$$

Ainsi, $\mu(\Lambda,.)$ est somme des variables aléatoires indépendantes $\mu(\Lambda_{n,j},.)$ qui satisfont à la condition

$$\lim_{n\to\infty} \sup_j P\{\mu(\Lambda_{n,j}) \geqq c\} = 0 .$$

Ces variables aléatoires sont donc "uniformément asymptotiquement négligeables" (Loève,[3], 290), donc $\mu(\Lambda)$ a une loi indéfiniment divisible. Ecrivons la représentation de LEVY, sous sa seconde forme

$$\lambda_t(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - e^{-tz}}{1 - e^{-z}}\, C(\Lambda,dz)$$

où $C(\Lambda,.)$ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut considérer $C(.,.)$ comme une application de $\underline{\underline{X}}$ dans l'ensemble $\underline{\underline{M}}$ des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}_+$.

2.2. <u>Proposition</u>.

$\Lambda \mapsto C(\Lambda,.)$ est dénombrablement additive.

Supposons en effet que $A\in\underline{\underline{X}}$ soit réunion d'une suite (Λ_n) d'éléments disjoints de $\underline{\underline{X}}$; soit C' la mesure $\Sigma_n C(\Lambda_n,.)$ - mesure dont on ignore a priori si elle est bornée, ou même σ-finie. La relation $\lambda_t(\Lambda) = \Sigma_n \lambda_t(\Lambda_n)$

s'écrit

$$\int \frac{1 - e^{-tz}}{1 - e^{-z}} C'(dz) = \int \frac{1 - e^{-tz}}{1 - e^{-z}} C(\Lambda,dz) < \infty \ .$$

Remplaçons t par $1 + t$, soustrayons, il vient que les deux mesures C' et $C(\Lambda,.)$ ont même transformée de Laplace (finie), ce qui entraîne bien leur égalité.

2.3.

Passons maintenant à la première forme classique de LEVY. Soit c la mesure $\Lambda \mapsto C(\Lambda,\{0\})$ sur X , et soit $Q(\Lambda,.)$ la mesure sur $\mathbb{R}_+^*$

$$Q(\Lambda,dt) = \frac{C(\Lambda,dt)}{1 - e^{-t}}$$

La fonction $(\Lambda,B) \mapsto Q(\Lambda,B)$ est une <u>bimesure</u> sur $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}$ (où $\underline{\underline{B}}$ désignera dans toute la suite la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+^*$), c'est à dire une fonction positive, dénombrablement additive en chacun de ses arguments l'autre étant fixé. Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

2.4. <u>Théorème</u>.

Si la mesure μ est non atomique, il existe une mesure positive bornée c sur X et une bimesure positive Q sur $X \times \mathbb{R}_+^*$, telles que

1) $\int_0^\infty (1 \wedge x)\, Q(\Lambda,dx) < \infty$ pour $\Lambda \in \underline{\underline{X}}$

2 $\lambda_t(\Lambda) = -\log E[e^{-t\mu(\Lambda)}] = tc(\Lambda) + \int_0^\infty (1-e^{-tz})\, Q(\Lambda,dz)$

pour $\Lambda \in \underline{\underline{X}}$, $t > 0$.

La notion de bimesure, introduite par KINGMAN, est peu maniable Nous allons montrer en fait que, dans le cas qui nous occupe, cette notion se réduit à celle de mesure sur $X \times \mathbb{R}_+^*$. Quitte à remplacer $\mathbb{R}_+^*$ par

$[\varepsilon,\infty[$ $(\varepsilon > 0)$, puis à faire tendre ε vers 0 , nous pouvons supposer la bimesure <u>bornée</u>. Le théorème repose sur la régularité intérieure des mesures sur la droite.

2.4. <u>Théorème</u>.

Soient $(X,\underline{\underline{X}})$ et $(Y,\underline{\underline{Y}})$ deux espaces mesurables, Q une bimesure positive sur $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{Y}}$, telle que $Q(X,Y) < +\infty$. Supposons que $\underline{\underline{Y}}$ contienne une classe compacte $\underline{\underline{K}}$ telle que l'on ait pour $A\in\underline{\underline{X}}, B\in\underline{\underline{Y}}$

$$Q(A,B) = \sup_{\substack{K\in\underline{\underline{K}} \\ K\subset B}} Q(A,K)$$

Il existe alors une mesure positive bornée Q^* sur $X \times Y$ (unique) telle que $Q(A,B) = Q^*(A \times B)$ pour $A\in\underline{\underline{X}}, B\in\underline{\underline{Y}}$.

<u>Démonstration</u>.

Considérons l'algèbre de Boole $\underline{\underline{I}}$ constituée par les ensembles G de la forme

(1) $$G = \bigcup_1^m A_i \times B_i \quad (m\in\mathbb{N} , A_i\in\underline{\underline{X}}, B_i\in\underline{\underline{Y}})$$

Tout élément G de $\underline{\underline{I}}$ admet une représentation de ce type, pour laquelle les ensembles A_i sont <u>disjoints</u>. Une telle représentation étant choisie, nous poserons

$$Q^*(G) = \sum_1^m Q(A_i,B_i)$$

On vérifie aussitôt que ce nombre ne dépend pas de la décomposition choisie, et que Q^* est additive sur $\underline{\underline{I}}$. Le théorème sera établi si nous montrons que :

> pour toute suite décroissante (G_n) d'éléments de $\underline{\underline{I}}$ telle que $\bigcap_n G_n = \emptyset$, on a $\lim_{n\to\infty} Q^*(G_n) = 0$.

Or soit $G \in \underline{\underline{I}}$, admettant la représentation (1) ci-dessus avec des A_i disjoints. Pour tout i , choisissons $K_i \in \underline{\underline{K}}$ tel que $K_i \subset B_i$ et

$$Q(A_i, B_i) \leqq Q(A_i, K_i) + \frac{\varepsilon}{m} \quad (\varepsilon > 0 \; ; \; i = 1, \ldots, m)$$

et posons $H = \bigcup_{1}^{m} A_i \times K_i$; on a $Q^*(G) \leqq Q^*(H) + \varepsilon$, $H \subset G$, et la coupe de H par tout $x \in X$ est un élément de la classe compacte $\underline{\underline{K}}$.

Associons alors aux G_n des ensembles H_n comme ci-dessus, de telle sorte que

$$Q^*(G_n) \leqq Q^*(H_n) + \varepsilon/2^{n+1}$$

Posons $L_n = H_0 \cap H_1 \ldots \cap H_n$; on a $L_n \subset G_n$ pour tout n , les L_n décroissent, leurs coupes par tout $x \in X$ appartiennent à $\underline{\underline{K}}$, et on a

$$Q^*(G_n) \leqq Q^*(L_n) + \Sigma_0^\infty \varepsilon/2^{i+1} \leqq Q^*(L_n) + \varepsilon \, .$$

Soit U_n la projection de L_n sur X ; la propriété des coupes "compactes" entraîne que $\bigcap_n U_n$ est la projection de $\bigcap_n L_n \subset \bigcap_n G_n = \emptyset$. Donc

$$Q^*(L_n) \leqq Q^*(U_n \times Y) = Q(U_n, Y) \quad \text{tend vers } 0 \text{ si } n \to \infty$$

cela entraîne $\limsup_{n \to \infty} Q^*(G_n) \leqq \varepsilon$, ce qui établit le théorème.

II. - CHOIX D'UNE VERSION DE LA MESURE ALEATOIRE

Dans la plupart des applications, l'espace mesurable $(X,\underline{\underline{X}})$ est un très bon espace (par exemple une variété munie de sa tribu borélienne). De là, l'intérêt de la proposition suivante, qui permet de choisir une bonne modification de la mesure aléatoire μ (sans changer l'espace de base Ω). Cela nous permettrait par exemple de construire des mesures de Poisson sur Ω lui-même , mais nous ne chercherons pas à travailler dans cette direction.

Les espaces mesurables lusiniens sont définis dans l'article de DELLACHERIE <u>Ensembles aléatoires I</u> , qui figure dans ce séminaire.

Nous supposons toujours que μ est sans atomes.

3.1. Proposition.

Si $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace mesurable lusinien, il existe une mesure aléatoire μ' satisfaisant aux propriétés suivantes :

1) Pour tout $A\in\underline{\underline{X}}$, $\mu(A,.) = \mu'(A,.)$ p.s.
2) Pour tout $\omega\in\Omega$, $\mu'(.,\omega)$ est une mesure positive bornée.

<u>Démonstration.</u>

Nous commencerons par traiter le cas où $(X,\underline{\underline{X}})$ est l'intervalle $I = [0,1]$, muni de sa tribu borélienne. Dans ce cas, posons pour tout t rationnel appartenant à $I, X_t(\omega) = \mu([0,t],\omega)$; la fonction $X_{\bullet}(\omega)$ sur les rationnels est p.s. une fonction croissante (du fait que μ est une mesure positive) et p.s. continue à droite. Quitte à jeter une partie de Ω de propabilité nulle, nous pouvons supposer que ces propriétés ont lieu pour tout ω . Définissons alors $X_t(\omega)$ pour tout $t\in[0,1]$ en posant

$$X_t(\omega) = \lim_{\substack{s \text{ rationnel} \\ s \downarrow t}} X_s(\omega)$$

et définissons une mesure aléatoire μ' en posant si Λ est borélien :

$$\mu'(\Lambda,\omega) = \int_0^1 1_\Lambda(t)\, d_t X_t(\omega) \quad \text{(intégrale de Stieltjes ordinaire)}$$

du fait que μ est sans atomes, μ et μ' coïncident p.s. sur les intervalles. Une application du théorème des classes monotones permet alors de montrer que $\mu(\Lambda) = \mu'(\Lambda)$ p.s. pour tout borélien Λ .

Passons au cas général : $(X,\underline{\underline{X}})$ étant un espace mesurable lusinien, il est facile de construire (au moyen d'une suite d'ensembles qui engendre la tribu $\underline{\underline{X}}$) une application mesurable injective de X dans I ; désignons-la par f . Définissons une mesure aléatoire ν sur I en posant

$$\nu(\Lambda,\omega) = \mu(f^{-1}(\Lambda),\omega) \quad \text{pour } \Lambda \text{ borélien dans } I .$$

En vertu d'une propriété fondamentale des espaces lusiniens, l'image d'un ensemble $B\in\underline{\underline{X}}$ est borélienne dans I . Il en résulte aussitôt que ν est sans atomes ; nous pouvons donc lui associer une mesure ν' comme ci-dessus. Pour obtenir alors la modification μ' de l'énoncé, il suffit de poser

$$\mu'(\Lambda,\omega) = \nu'(f(\Lambda),\omega) \quad (\Lambda\in\underline{\underline{X}}) .$$

<u>Remarque</u>.

En utilisant 1.3 on montrerait facilement que la proposition précédente est vérifiée en supposant μ positive bornée quelconque (sans hypothèse de non-atomicité).

4. Mesures de Poisson

4.1. Proposition.

Soit $(X,\underline{\underline{X}})$ un espace mesurable et soit λ une mesure sur X positive finie. Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une mesure aléatoire positive $(\Lambda,\omega) \longmapsto N(\Lambda,\omega)$ à accroissements indépendants, possédant les deux propriétés suivantes :

1) Pour tout $\omega \in \Omega$, $N(.,\omega)$ est une mesure sur $(X,\underline{\underline{X}})$, somme finie de masses unité.

2) Pour tout $\Lambda \in \underline{\underline{X}}$, $N(\Lambda,.)$ admet pour loi une loi de Poisson de paramètre $\lambda(\Lambda)$.

Nous dirons que N est une mesure de Poisson régulière de paramètre (ou de moyenne) λ .

Démonstration.

Soit ∂ un point situé hors de X . On pose $X^\circ = \{\partial\}$ et
$X^k = \underbrace{X \times X \ldots\ldots\ldots \times X}_{k}$ $\quad k \geq 1$.

On considère la tribu triviale $\underline{\underline{X}}^\circ$ sur X° et la tribu produit $\underline{\underline{X}}^k$ sur X^k .
Sur $(X^\circ,\underline{\underline{X}}^\circ)$ on place la mesure définie par $\lambda_o(\{\partial\}) = 1$ et sur $(X^k,\underline{\underline{X}}^k)$ la mesure $\lambda_k = \underbrace{\lambda \otimes \lambda \ldots\ldots \otimes \lambda}_{k}$ pour $k \geq 1$. On a pour $k \geq 1$

$$\lambda_k(X^k) = \lambda(X)^k$$

Considérons alors $\Omega = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathbin{\cup\!\!\!\!\cdot}}} X^k$

$$\underline{\underline{F}} = \{F \; ; F = \overset{\infty}{\underset{k=0}{\mathbin{\cup\!\!\!\!\cdot}}} F_k \; , \; F_k \in \underline{\underline{X}}^k\}$$

Posons

$$P(F) = \sum_{k=0}^{\infty} P(F_k) \qquad \text{où} \qquad P(F_k) = \frac{e^{-\lambda(X)}\ \lambda_k(F_k)}{k!}$$

On a bien $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X^k) = 1$.

On définit alors la mesure aléatoire N sur $(X,\underline{\underline{X}})$ de la façon suivante : soit $\Lambda \in \underline{\underline{X}}$ et $\omega = (x_1 \ldots x_k) \in X^k$. On pose

$$N(\Lambda,\omega) = \text{nombre des entiers } i \text{ tels que } x_i \in \Lambda$$

$$N(\Lambda,\partial) = 0$$

Il est clair que l'on définit ainsi une variable aléatoire $N(\Lambda,.)$ et que N est une mesure aléatoire satisfaisant la propriété 1 . Vérifions la seconde propriété :

Si $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} P\{N(\Lambda) = n\} &= \sum_{k\geq n} P\{\omega = (x_1 \ldots x_k)\ ;\ n \text{ de ces points sont dans } \Lambda\} \\ &= \sum_{k\geq n} C_k^n\, P\{\omega = (x_1 \ldots x_k)\ ;\ x_i \in \Lambda \text{ pour } i \leq n\ , \\ &\qquad\qquad x_i \notin \Lambda \text{ pour } i > n\} \\ &= \sum_{k\geq n} C_k^n\, \frac{e^{-\lambda(X)}}{k!}\, \lambda(\Lambda)^n\, (\lambda(X) - \lambda(\Lambda))^{k-n} \\ &= \frac{e^{-\lambda(\Lambda)}\ \lambda(\Lambda)^n}{n!} \end{aligned}$$

d'autre part

$$P\{N(\Lambda) = 0\} = P\{\omega = \partial\} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^0\, \frac{e^{-\lambda(X)}}{k!}\, (\lambda(X) - \lambda(\Lambda))^k = e^{-\lambda(\Lambda)}$$

Il reste à montrer que la mesure N est à accroissements indépendants. Pour faciliter l'écriture, nous nous contentons de considérer deux éléments disjoints Λ et B de $\underline{\underline{X}}$ et des entiers n et p non nuls.

On a alors :

$$P\{N(\Lambda)=n,\ N(B)=p\} = \sum_{k\geq n+p} C_k^{n+p}\, C_{n+p}^{p}\, P\{\omega=(x_1\ldots x_k)\ ;\ x_i \in \Lambda \text{ si } i \leq n\ ,\ x_i \in B \text{ si } n < i \leq n+p\ ,\ x_i \in (\Lambda \cup B)^c \text{ si } i \geq n+p\}$$

$$= \sum_{k\geq n+p} \frac{e^{-\lambda(X)}\lambda(\Lambda)^n\lambda(B)^p}{n!\quad p!}\ (\lambda(X) - \lambda(\Lambda) - \lambda(B))^{k-n-p}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(\Lambda)}\lambda(\Lambda)^n}{n!} \quad \frac{e^{-\lambda(B)}\lambda(B)^p}{p!}$$

La proposition suivante est une extention de celle qui précède

4.2. Proposition.

Soit $(X,\underline{\underline{X}})$ un espace mesurable, et soit λ une mesure positive σ-finie sur cet espace. Il existe alors un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une fonction $(\Lambda,\omega) \longmapsto N(\Lambda,\omega)$ sur $\underline{\underline{X}} \times \Omega$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, tels que

1) Pour tout $\omega\in\Omega$, $N(.,\omega)$ est une mesure positive (non nécessairement finie, mais σ-finie), somme d'une suite de masses unité.

2) Pour tout Λ tel que $n(\Lambda) < +\infty$, $N(\Lambda,.)$ admet pour loi une loi de Poisson de paramètre $\lambda(\Lambda)$.

3) Si (Λ_n) est une suite d'éléments disjoints de $\underline{\underline{X}}$, les variables aléatoires $N(\Lambda_n,.)$ sont indépendantes.

Nous dirons que N est une mesure de Poisson régulière de moyenne λ.

Démonstration.

Soit (X_i) une partition de X en sous-ensembles mesurables de mesure finie pour λ ; pour chaque i , faisons la construction précédente pour la mesure $\lambda_i = 1_{X_i} . \lambda$, sur un espace probabilisé $(\Omega_i,\underline{\underline{F}}_i,P_i)$, et prenons pour $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ le produit de tous ces espaces probabilisés ; soit $\phi_i : \Omega \longmapsto \Omega_i$ la i-ième application coordonnée, et soit N_i la i-ième mesure de Poisson sur Ω_i ; il suffit de poser

$$N(\Lambda,\omega) = \Sigma_i \ N_i(\Lambda\cap\phi_i(\omega)) \ .$$

Nous pouvons maintenant aborder la représentation d'une mesure aléatoire positive à accroissements indépendants (sans atomes). Reprenons les notations du paragraphe 1 ; μ étant supposée sans atomes, nous avons la représentation :

$$(1) \qquad \lambda_t(\Lambda) = tc(\Lambda) + \int_{\Lambda\times R_+^*} (1-e^{-tu})Q^*(dx,du)$$

Construisons alors sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ une mesure de Poisson régulière N admettant pour moyenne la mesure σ-finie Q^* sur $X \times R_+^*$.
Nous avons le théorème suivant dont la démonstration est facile :

4.3. Théorème.

Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\Lambda \in \underline{\underline{X}}$, posons

$$\mu'(\Lambda,\omega) = c(\Lambda) + \int_{\Lambda\times R_+^*} u \ N(dx,du,\omega)$$

où l'intégrale au second membre est une intégrale de Stieltjes ordinaire.
Alors $\mu'(.,.)$ est une mesure positive à accroissements indépendants satisfaisant à (1) [en particulier, c'est une version de la mesure μ qui nous a été donnée au départ] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.R. HALMOS Measure Theory - Van Nostrand (1950)

[2] J.F.C. KINGMAN Completely Random Measures. Pacific Journal of Mathematics Vol. 21 . N°1 (1967) .

[3] LOEVE Probability Theory. Van Nostrand (1963).

[4] Ph. MORANDO Mesures aléatoires bornées. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris T.265 (27 Nov. 1967).

[5] A. PREKOPA On Stochastic Set Functions I . Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. Tomus VII. Fasciculus 2. (1956) . (désigné dans la suite par S.S.F.I.)

[6] A. PREKOPA S.S.F. II idem Tomus VIII (1957) .

[7] A. PREKOPA S.S.F. III idem Tomus VIII (1957) .

[8] A. PREKOPA On Poisson and composed Poisson stochastic set functions. Studia Mathematica. Tome XVI (1957) .

[9] N.S. SMIRIGA Stochastic Processes with independent pieces. (Non publié) University of California. Berkeley .

* *
*