PAUL-ANDRÉ MEYER

Processus à accroissements indépendants et positifs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 175-189
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__175_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

PROCESSUS À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS ET POSITIFS

(P.A.Meyer)

Les processus à accroissements indépendants, stationnaires et positifs (appelés ci-dessous, pour abréger, processus de LÉVY, bien que LÉVY ait inventé quantité d'autres processus !) sont des processus extraordinaires. On les rencontre très souvent en calcul des probabilités, en liaison avec les temps locaux ; ils ont servi à construire des contre-exemples en analyse harmonique (KAHANE). L'exposé ci-dessous avait pour but de présenter les résultats classiques sur ces processus (sans employer la théorie des générateurs infinitésimaux, ignorée des Strasbourgeois), et surtout de faire connaître le problème de l'équation de convolution de CHUNG . Ce problème, non résolu au moment où l'exposé a été rédigé (et la rédaction n'a pas été modifiée), a été résolu depuis, semble t'il, par H.KESTEN - par l'affirmative : l'équation est satisfaite partout. La démonstration de KESTEN n'est pas encore publiée.

I.NOTATIONS GÉNÉRALES

Nous notons $\mathbb{R}_+^*$ la demi-droite ouverte $]0,\infty[$, et $\mathbb{R}_+$ la demi-droite fermée . $\underline{\underline{P}}$ désigne l'ensemble des lois de probabilités sur $\mathbb{R}_+$, et $\underline{\underline{M}}$ l'ensemble des mesures positives μ sur $\mathbb{R}_+$ telles que e^{-px} soit intégrable pour tout $p>0$: nous désignons alors par $\underline{\underline{L}}\mu$ la transformée de Laplace $p \mapsto \int_0^\infty e^{-px}\mu(dx)$.

Nous appellerons semi-groupe de LÉVY sur $\mathbb{R}_+$ un semi-groupe markovien (P_t) sur $\mathbb{R}_+$, invariant par translation et faiblement continu. Dire qu'il est invariant par translation revient à dire que l'on a, pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbb{R}_+$

$$P_t f(x) = \int_0^\infty f(x+u)\mu_t(du)$$

où les mesures $\mu_t=\varepsilon_0 P_t$ forment un semi-groupe de convolution $(\mu_s * \mu_t=\mu_{s+t})$. Les noyaux markoviens P_t appliquent donc dans lui-même l'espace $\underline{\underline{C}}_0(\mathbb{R}_+)$ des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini, et la continuité faible à l'origine ($\mu_t \to \varepsilon_0$ vaguement lorsque $t \to 0+$) suffit à entraîner que (P_t) est un semi-groupe fellérien - donc un semi-groupe de HUNT particulier.

Nous pouvons donc construire les processus de Markov canoniques admettant (P_t) comme semi-groupe de transition : nous utiliserons les notations usuelles pour ces processus, à une légère modification près portant sur l'espace de base Ω. En effet, la loi de l'accroissement X_t-X_s, pour $s<t$, est μ_{t-s}, portée par la demi-droite positive. Il en résulte aussitôt que presque toutes les trajectoires des processus (X_t) - que l'on sait déjà être continues à droite, pourvues de limites à gauche - sont des fonctions croissantes. Il nous sera commode de restreindre l'espace de base à l'ensemble des applications croissantes et continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, et c'est cet ensemble que nous utiliserons dans la suite, comme espace de base des processus.

Le processus (X_t) est en fait un processus à accroissements indé-pendants : l'ensemble des fonctions boréliennes bornées f sur $\mathbb{R}_+$ telles que $E[f(X_t-X_s)|\underline{\underline{F}}_s] = <\mu_{t-s},f>$ contient en effet les exponentielles e^{-px} pour $p\geqq 0$ (cela ne fait qu'exprimer le comportement bien connu de la transformation de Laplace par rapport à la convolution). D'après un argument simple de classe monotone, il contient toutes les fonctions boréliennes bornées, d'où l'indépendance de $\underline{\underline{F}}_s$ et de X_t-X_s.

Le semi-groupe de LÉVY (P_t) est caractérisé uniquement par l'une quelconque des données suivantes :

$$\mu_1 = \mu$$
$$\phi = \underline{\underline{L}}\mu$$
$$g = -\log \phi$$

En effet, on a alors $\underline{\underline{L}}\mu_t = \phi^t$, ou $-\log \underline{\underline{L}}\mu_t = tg$. La loi μ est une loi i.d. (indéfiniment divisible) sur $\mathbb{R}_+$. La structure des lois i.d. sur $\mathbb{R}_+$ est donnée au paragraphe suivant.

VARIANTE.- Posons pour toute fonction borélienne bornée f <u>sur $\mathbb{R}$</u> , et pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$P_tf(x) = \int f(x+u)\mu_t(du)$$

Nous définissons ainsi un semi-groupe sur $\mathbb{R}$, qui nous permet de construire des processus admettant toute la droite comme espace d'états. Un certain nombre de propriétés sont plus claires sur les processus ainsi construits.

II. LOIS I.D. SUR $\mathbb{R}_+$

Les démonstrations données dans ce paragraphe ne sont pas les " vraies" démonstrations. Il existe une démonstration probabiliste de la formule de LÉVY , qui démonte complètement le processus et donne la signification de toutes les quantités introduites. Ce raisonnement, très intuitif, prendrait cependant trop de place ici. Notre démonstration est essentiellement celle du livre de FELLER.

Rappels sur les fonctions complètement monotones

Pour $h>0$, définissons les opérateurs de différence Δ_h^n de la manière suivante : pour toute fonction réelle f sur $\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\Delta_h^0 f=f \ ; \ \Delta_h^1 f(x)=f(x+h)-f(x) \ ; \ \Delta_h^n f = \ {}_h^1 \ \ {}_h^{n-1}f$$

DÉFINITION.- Une fonction réelle finie f sur $\mathbb{R}_+^*$ est complètement monotone si $(-1)^n\Delta_h^n f \geqq 0$ pour tout n et tout $h>0$.

En particulier, une telle fonction est positive, décroissante, convexe (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$. On a en fait le théorème suivant, qui est facile :

THÉORÈME.- f est complètement monotone si et seulement si f est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}_+^*$, et si $(-1)^n D^n f \geqq 0$ pour tout n.

Le théorème suivant (de S.BERNSTEIN) est une conséquence facile du théorème de KREIN-MILMAN. Cf. aussi FELLER, p.415-416.

THÉORÈME.- f est complètement monotone si et seulement s'il existe une mesure $\lambda \in \underline{\underline{M}}$ telle que $f=\underline{\underline{L}}\lambda$.

Il en résulte aussitôt qu'une fonction complètement monotone non nulle est partout $\neq 0$. On a $\lambda \in \underline{\underline{P}}$ si et seulement si $f(0+)=1$.

Le théorème suivant est également facile

THÉORÈME.- Soient $f_n=\underline{\underline{L}}\lambda_n$ des fonctions complètement monotones, qui convergent simplement vers une fonction finie f (complètement monotone). Soit λ l'unique mesure telle que $f=\underline{\underline{L}}\lambda$. Alors, pour tout $p>0$, les mesures $e^{-px}\lambda_n(dx)$ convergent étroitement vers $e^{-px}\lambda(dx)$, et les dérivées $D^k f_n$ convergent vers $D^k f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$.

(On a le même résultat pour p=0 si $f_n(0+) \to f(0+) < +\infty$).

Nous aurons besoin enfin du lemme suivant :

LEMME.- Soit η une loi de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, et soit $f=\underline{\underline{L}}\eta$. Alors $\exp[c(f-1)]$ est, pour tout $c>0$, la transformée de Laplace d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}_+$.

DÉMONSTRATION.- Construisons des v.a. indépendantes Y_i,N, les Y_i admettant toutes pour loi η, et N admettant une loi de Poisson de paramètre c. Soit ν la loi de la somme aléatoire $Y_1+\ldots+Y_N$: on vérifie aussitôt que $\underline{\underline{L}}\nu = \exp[c(f-1)]$.

Structure des lois i.d.

Désignons maintenant, comme au §I, par μ une loi sur $\mathbb{R}_+$, par ϕ sa transformée de Laplace, par g la fonction $-\log \phi$.

THÉORÈME (LÉVY) .- μ est i.d. si et seulement si g admet une représentation de la forme

$$g(p) = ap + \int_0^\infty (1-e^{-px})\lambda(dx)$$

où a est une constante ≥ 0, et λ une mesure positive sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\int_0^\infty (x\wedge 1)\, \lambda(dx) < +\infty$. Cette représentation est unique. Inversement, si a et λ sont donnés et satisfont aux conditions ci-dessus, il existe un semi-groupe de LÉVY tel que $-\log \underline{\underline{L}}\mu_t = tg$ pour tout t.

DÉMONSTRATION.- 1) Donnons nous a et λ comme ci-dessus : la fonction e^{-tg} est alors complètement monotone pour tout $t \geq 0$; c'est trivial lorsque λ est une masse unité (c'est alors la transformée de Laplace d'une loi de Poisson) ; d'où le résultat lorsque λ a un support fini, par convolution, et on passe enfin au cas général au moyen des sommes de Riemann approchant l'intégrale. Il existe donc une mesure μ_t telle que $\underline{\underline{L}}\mu_t = e^{-tg}$, et on vérifie aussitôt que μ_t est une loi de probabilité, que $\mu_{s+t}=\mu_s * \mu_t$, et que $\mu_t \to \varepsilon_0$ lorsque $t \to 0$. D'où aussitôt l'existence du semi-groupe de LÉVY cherché. Il en résulte en particulier que $\mu=\mu_1$ est i.d.

2) Réciproquement, supposons que μ soit i.d. . Ecrivons que

$$g(p) = -\log \phi(p) = \lim_n n(1-\phi^{1/n})$$

Comme $\phi^{1/n}$ est la transformée de Laplace d'une loi de probabilité, le lemme entraîne qu'il en est de même de $\exp[n(1-\phi^{1/n})]$. Lorsque $n \to \infty$, cette fonction converge vers ϕ, et donc ses dérivées convergent uniformément sur tout compact, vers les dérivées correspondantes de ϕ . En repassant aux logarithmes, on voit que

$$Dg = \lim_n D[n(1-\phi^{1/n})] = \lim_n [-D(n\phi^{1/n})]$$

Cela entraîne que Dg est complètement monotone : il existe donc une mesure $\theta \in \underline{\underline{M}}$ dont la transformée de Laplace est Dg. Comme $g(0+)=0$, on a

$$g(p) = \int_0^p Dg(q)dq = \int_0^p dq \int_0^\infty e^{-qx}\theta(dx)$$

Séparons θ en $a\varepsilon_0+\eta$, où η ne charge pas $\{0\}$. Il vient après interversion des intégrations

$$g(p) = ap + \int_0^\infty \frac{1-e^{-px}}{x}\eta(dx)$$

Il ne reste plus qu'à poser $\lambda(dx) = \frac{1}{x}\eta(dx)$ pour avoir la représentation cherchée.

3) unicité : elle résulte aussitôt du fait que la mesure $a\varepsilon_0(dx) + x\lambda(dx)$ admet pour transformée de Laplace Dg.

III. MARTINGALES FONDAMENTALES

Nous conservons les notations du §I, et celles du théorème de représentation. Nous introduisons en outre la " fonction de répartition" associée à la mesure de LÉVY λ :

$$\sigma(x) = \lambda(]x,\infty[)$$

et les noyaux potentiels du semi-groupe (P_t) (sur $\mathbb{R}_+$ ou sur $\mathbb{R}$) : ce sont les noyaux de convolution par les mesures

$$w_q = \int_0^\infty e^{-qt}\mu_t dt \quad \text{(on écrit } w_0=w)$$

De plus, nous posons pour toute fonction f croissante et dérivable (la seconde hypothèse est inutile si a=0)

$$Af(x) = a.Df(x) + \int_0^\infty [f(x+u)-f(x)]\lambda(du)$$

Ici encore, cette définition vaut sur $\mathbb{R}_+$ ou sur $\mathbb{R}$. La fonction Af est positive, mais peut prendre la valeur $+\infty$. On peut évidemment définir Af, par différence, pour certaines fonctions non croissantes. A est le "générateur infinitésimal" du semi-groupe, mais nous n'utiliserons absolument pas la théorie des générateurs infinitésimaux dans la suite.

Dans les calculs suivants, nous supposons que le semi-groupe (P_t) est construit sur l'espace d'état $\mathbb{R}_+$, ainsi que les processus.

LEMME 1.- La mesure potentiel w est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}_+$

En effet, $\int_0^\infty e^{-px}w(dx)=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-px}\mu_t(dx)=\int_0^\infty(\phi(p))^t dt= \frac{1}{g(p)}$.

LEMME 2.- Les processus suivants sont des martingales

a) $Z_t = \dfrac{\exp[-pX_t]}{(\phi(p))^t}$

b) $M_t = e^{-qt}e^{-pX_t} - e^{-pX_0} +(q+g(p))\int_0^t e^{-qs}e^{-pX_s}ds \qquad (q\geq 0)$

DÉMONSTRATION.- On a $Z_{t+s}=Z_t \dfrac{\exp(-p(X_{t+s}-X_t))}{(\phi(p))^s}$, d'où aussitôt le résultat en utilisant l'indépendance de $X_{t+s}-X_s$ et de $\underline{\underline{F}}_t$.

b) résultera alors de ce que $M_t= \int_0^t e^{-qs}(\phi(p))^s dZ_s$. On notera que ces intégrales stochastiques n'exigent pas une théorie très profonde : le processus (Z_s) est à variation bornée ! On a

$$dZ_s = \frac{1}{(\phi(p))^s}\, d(e^{-pX_s}) + e^{-pX_s}\, \frac{g(p)}{(\phi(p))^s}\, ds$$

$$e^{-qs}(\phi(p))^s dZ_s = e^{-qs}d(e^{-pX_s})+g(p)e^{-qs}e^{-pX_s}ds$$

Intégrons par parties. L'intégrale stochastique $\int_0^t e^{-qs}(\phi(p))^s dZ_s$ vaut $e^{-qt}e^{-pX_t} - e^{-pX_0} + (q+g(p))\int_0^t e^{-qs}e^{-pX_s}ds = M_t$

d'où le résultat.

LEMME 3.- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une dérivée bornée, et soit $\|f\|_{(1)} = \|f\| + \|Df\|$ ($\|\ \|$ désignant la norme de la convergence uniforme. On a alors une inégalité de la forme $\|Af\| \leq K\|f\|_{(1)}$.

DÉMONSTRATION.- $Af(x)$ est la somme de trois termes : $a.Df(x)$, $\int_0^1 [f(x+u)-f(x)]\lambda(du)$, $\int_1^\infty [f(x+u)-f(x)]\lambda(du)$. Le premier est majoré en module par $a\| Df \|$, le troisième par $2\|f\|\int_0^\infty \lambda(du)$, et le second par $\| Df \| \int_0^1 u\lambda(du)$ (formule des accroissements finis). D'où aussitôt le résultat.

LEMME 4.- <u>Soit</u> f <u>une fonction continue dans</u> $\mathbb{R}_+^*$, <u>admettant des limites finies en</u> 0 <u>et à l'infini, et dont la dérivée possède les mêmes propriétés. Alors le processus</u>

$$C_t^f = e^{-qs}f\circ X_s - f\circ X_0 + \int_0^t e^{-qs}(qf-Af)\circ X_s ds \qquad (q\geqq 0)$$

<u>est une martingale (continue à droite</u>).

DÉMONSTRATION.- Lorsque $f(x)=e^{-px}$, il s'agit de la martingale (M_t) du lemme 2. On approche alors f par une combinaison linéaire d'exponentielles, dans la norme $\| \;\; \|_{(1)}$, et on applique le lemme 3.

IV. L'ÉQUATION DE CONVOLUTION DE CHUNG

NOTATIONS.- Nous allons travailler, dans ce paragraphe, avec les processus canoniques construits en prenant $\mathbb{R}$, la droite toute entière, comme espace d'états. Soit r un nombre réel : nous désignerons par T_r le temps d'entrée dans la demi-droite ouverte $]r,\infty[$, et par S_r le temps d'entrée dans l'ensemble $\{r\}$.

Nous poserons de plus

$\sigma(x)= \lambda(]x,\infty[)$ si $x \geqq 0$, $\sigma(x)=0$ si $x<0$ (noter que $\sigma(0)=\sigma(0+)$)

$h(r)= P^0\{X_{T_r}=r\}$ si $r > 0$, $\qquad$ $h(r)=0$ si $r\leqq 0$

$e(r)= h(-r)$

CHUNG a posé le problème suivant : existe t'il une mesure V positive, portée par $\mathbb{R}_+$, telle que l'on ait, pour tout $r>0$

$$\int_{[0,r]} V(ds)\sigma(r-s) = 1$$

Ce problème n'est pas résolu, mais on peut toujours le résoudre (nous allons le voir) si l'on remplace l'expression " pour tout $r>0$" par l'expression " pour presque tout $r>0$" . En effet on a la proposition suivante, due à CHUNG :(*)

PROPOSITION.- Supposons que le coefficient de translation a soit nul. On a alors, pour presque tout $r>0$

(1) $$\int_{[0,r]} w(ds)\sigma(r-s) = 1$$

DÉMONSTRATION.- La relation $g(p)=\int_0^\infty (1-e^{-px})\lambda(dx)=-\int_0^\infty(1-e^{-px})d\sigma(x)$ nous donne, en intégrant par parties, $\int_0^\infty e^{-px}\sigma(x)dx = \frac{g(p)}{p}$. D'autre part, $\int_0^\infty e^{-px}w(dx)= \frac{1}{g(p)}$ (§III, lemme 1). Alors

$$\int_0^\infty e^{-pr}ds\int_0^r w(ds)\sigma(r-s) = \int_0^\infty w(ds)e^{-ps}\int_s^\infty e^{-p(r-s)}\sigma(r-s)dr$$
$$=(\int_0^\infty w(ds)e^{-ps})(\int_0^\infty e^{-pu}\sigma(u)du) = \frac{1}{g(p)}\,\frac{g(p)}{p} = \frac{1}{p}\,.$$

La proposition est établie.

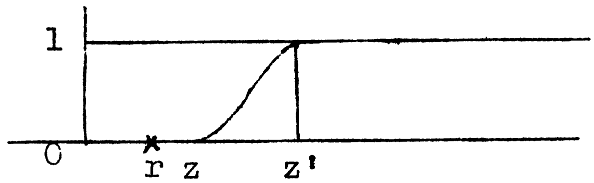
Nous allons maintenant voir l'interprétation probabiliste du premier membre de (1). La méthode que nous allons suivre, et qui vaut aussi pour $a\neq 0$, est essentiellement due à McKEAN, mais l'article de McKEAN comporte une légère erreur, qui lui fait omettre le terme complémentaire $h(r)$.(*)

PROPOSITION.- On a pour tout $r>0$

(2) $$\int_{[0,r]} w(ds)\sigma(r-s) = 1 - h(r) = 1 - P^0\{X_{T_r}=r\}$$

(*) Voir CHUNG : sur une équation de convolution. C.R.Acad.Sc. 260, 1965, p.4665, et H.McKEAN : an integral equation arising in connection with Markov chains. Z.W. 8, 1967, p.298 (nous avons mis la démonstration de McKEAN dans le langage des martingales).

DÉMONSTRATION.- Considérons une fonction f ayant l'allure suivante :



(croissante, à support dans $[z,\infty[$, où $r<z$, comprise entre 0 et 1, continûment dérivable, égale à 1 pour $t>z'$).

Donnons au paramètre q du lemme 4 la valeur 0, et considérons la martingale C_t^f. Notons que Af est une fonction bornée à support compact ($Af=0$ sur $[z',\infty[$). Par conséquent, toute fonction bornée à support compact ayant un potentiel fini, $\int_0^\infty Af\circ X_s ds$ est une variable aléatoire intégrable pour la mesure P^0, et la martingale (C_t^f) est uniformément intégrable. Appliquons lui le théorème d'arrêt à l'instant T_r (pour la loi P^0). Comme $C_0^f=0$, il vient

$$E^0[f\circ X_{T_r}] = E^0[\int_0^T Af\circ X_s ds]$$

où T peut être considéré comme exclu de l'intervalle d'intégration. Comme $z>r$, on a $Af(x)=\int f(x+u)\lambda(du)$ pour tout $x\leq r$, et donc

$$E^0[f\circ X_{T_r}] = E^0[\int_0^T ds\int_0^\infty f(X_s+u)\lambda(du) \qquad (3)$$

Faisons tendre f en croissant vers l'indicatrice de l'intervalle $]r,\infty[$: pour chaque x, $\int_0^\infty f(x+u)\lambda(du)$ tend en croissant vers $\sigma(r-x)$, quel que soit $x<r$ - et aussi pour $x=r$, car on a convenu de poser $\sigma(0)=\sigma(0+)=\lambda(]0,\infty[)$. Le second membre tend donc vers

$$E^0[\int_0^\infty \sigma(r-X_s)I_{[0,r]}\circ X_s ds]$$

Il faut prendre garde de fermer l'intervalle $[0,r]$, car T est le temps d'entrée dans l'intervalle ouvert $]r,\infty[$, et par conséquent le temps passé au point r (et que rien n'empêche a priori d'être >0) est du temps à compter avant T. Cette expression n'est autre que la valeur en 0 du potentiel de la fonction j définie par

$j(t)=0$ si $t>r$, $j(t)=\sigma(r-t)$ si $0\leq t\leq r$. Par conséquent, le second membre tend simplement vers

$$\int_{[0,r]} w(ds)\sigma(r-s)$$

D'autre part, T est p.s. fini (du fait que le semi-groupe est transient). Le second membre tend donc vers $1-P^0\{X_{T_r}=r\}$, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE.- Supposons que a=0. On peut affirmer que la fonction h est nulle, et que la relation (1) a lieu pour tout $r>0$, dans chacun des deux cas suivants :

a) $\sigma(0+)<\infty$

b) $\sigma(0+)=+\infty$, et w est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.(*)

DÉMONSTRATION.- Il est facile de donner une démonstration analytique de a) (le premier membre de (1) est une fonction continue à droite de r, égale à 1 pp sur $\mathbb{R}_+^*$, donc partout sur $\mathbb{R}_+^*$), mais il y a une démonstration probabiliste lumineuse : on sait que le nombre $N_t^c(\omega)$ de sauts du processus , sur $[0,t]$, dont l'amplitude dépasse $c>0$, est un processus de Poisson de paramètre $\lambda(]c,\infty[) = \sigma(c)$. La condition a), jointe à la condition a=0, exprime donc que les trajectoires du processus n'ont qu'un nombre fini de sauts, sur tout intervalle fini, et restent constantes entre ces sauts. Mais une telle trajectoire ne peut entrer dans la demi-droite ouverte $]r,\infty[$ au point r, et donc $h(r)=P^0\{X_{T_r}=r\}=0$ pour tout $r>0$.

Passons au cas b). Tout d'abord, la relation $1-h(r) \geq w(\{r\})\sigma(0)$ entraîne que $w(\{r\})=0$, donc que w est diffuse, ou que les points sont des ensembles de potentiel nul. Les trajectoires issues de $r\in\mathbb{R}$ quittent donc aussitôt ce point - comme elles sont croissantes, elles n'y reviennent jamais, et donc l'ensemble $\{r\}$ est effilé en r (et donc semi-polaire). La propriété de Markov forte entraîne

(*) Ces deux résultats sont dus à CHUNG, qui a aussi montré que w est absolument continue dès que λ a une composante absolument continue (résultat annoncé, mais non démontré, dans la Note de CHUNG) donc que $S_r = T_r$ p.s. sur l'ensemble $\{S_r < \infty\}$. Par conséquent, on a dans ce cas

$$h(r) = P^0\{S_r < \infty\} = P^{-r}\{S_0 < \infty\}$$

Autrement dit, la fonction e ($e(r) = h(-r)$) est la probabilité, partant de r, de rencontrer 0, c'est à dire le potentiel d'équilibre de l'ensemble $\{0\}$. Donc e est une fonction excessive pour le semi-groupe (P_t) ; elle est d'autre part nulle presque partout pour la mesure de Lebesgue. Si w est absolument continue, les ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue sont des ensembles de potentiel nul pour le semi-groupe (P_t), donc e est nulle sauf sur un ensemble de potentiel nul. Comme e est excessive, elle est alors identiquement nulle. Le corollaire est établi.

COROLLAIRE DE LA DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE .- L'équation de convolution (1) est satisfaite pour tout $r > 0$ (lorsque $a = 0, \sigma(0) = +\infty$) si et seulement si les points de $\mathbb{R}$ sont polaires pour le semi-groupe (P_t).

Quelques propriétés de la fonction h.

Nous continuons à supposer que $a = 0$, $\sigma(0+) = +\infty$. Nous désignons par h', e', les fonctions définies par $h'(x) = h(x)$ si $x \neq 0$, $h'(0) = 1$, $e'(x) = h'(-x)$ pour tout x.

Propriété 1. La fonction h est semi-continue supérieurement en tout point $x \neq 0$. La fonction h' est s.c.s. dans $\mathbb{R}$.

Il n'y a rien à démontrer pour $x \leq 0$. Pour $x > 0$, nous avons $1 - h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\hat{w}(x+du)$, où $f(u) = \sigma(u)$ pour $u \neq 0$, et $f(0) = 0$, et où $\hat{w}$ est la mesure symétrique de w par rapport à 0 (on a remplacé σ par f, du fait que w est diffuse). Comme w est diffuse, l'application $x \mapsto \hat{w}(x+du)$ est vaguement continue ; comme f est sci, 1-h est sci au point x, et la propriété 1 est établie.

Propriété 2. $h(r+s) \geq h(r)h(s)$.

C'est évident si l'un des nombres r,s est ≤ 0, car alors le second membre est nul. Si r et s sont > 0, le premier membre vaut $P^0\{$ rencontrer $\{r+s\}\}$, et le second membre est le produit de

$P^0\{$rencontrer $\{r\}\}$ et de $P^r\{$ rencontrer $\{r+s\}\}$. D'où aussitôt le résultat , par la propriété de Markov forte.

Il en résulte que les x tels que $h(x)\neq 0$ forment un semi-groupe $S\subset \mathbb{R}_+^*$. Les x tels que $e(x)\neq 0$ forment donc aussi un semi-groupe $-S$, contenu dans la demi-droite négative. La fonction e étant excessive pour (P_t), ce semi-groupe $-S$ est finement ouvert, et son complémentaire est un ensemble absorbant, donc finement ouvert : autrement dit, $-S$ est aussi finement fermé. Comme e est scs, sauf au point 0, $-S$ est une réunion dénombrable de fermés. Les semi-groupes de ce genre ne sont pas des objets très fréquents dans la nature !(*)

La propriété suivante est la seule, parmi les propriétés connues des hypothétiques fonctions h, qui ne soit pas triviale.

<u>Propriété 3</u> . Ou bien h est nulle , ou bien on a $\limsup_{r\to 0+} h(r)=1$. Dans ce cas, on a aussi, pour tout $r>0$

$$h(r) = \limsup_{\substack{s\to r\\ s>r}} h(s)$$

DÉMONSTRATION.- Nous allons donner de ces faits une démonstration probabiliste assez compliquée. On notera d'abord que l'assertion relative à $r\neq 0$ résulte aussitôt de l'assertion relative à 0, et de la propriété 2.

Le semi-groupe (P_t) admet un noyau de LÉVY n, donné par

$$nf(x) = \int_0^\infty f(x+u)\lambda(du)$$

pour toute fonction borélienne positive f. **Ecrivons** la formule fondamentale d'IKEDA-WATANABE relative au noyau de LÉVY . Soit g une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$: on a

$$E^0\Big[\sum_{s\leq t} g(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\Big] = E^0\Big[\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}} n(X_s,dy)g(X_s,y)\Big]$$

Appliquons cela avec $g(x,y)=I_{\{r\}}(y)$. Au premier membre, nous obtenons $P^0\{\exists\ s\leq t : X_s=r,\ X_{s-}<r\}$; au second membre, $E^0[\int_0^t n(X_s,\{r\})ds]$

(*) Bien entendu, S est de mesure nulle (et non dénombrable).

Mais $n(x,\{r\})$ n'est $\neq 0$ que pour des x qui forment un ensemble dénombrable, donc de potentiel nul pour le semi-groupe (P_t) puisque la mesure w est diffuse. Le second membre est donc nul, et donc aussi le premier. Autrement dit

<u>on a P^0-p.s.</u> $X_{S_r} = X_{S_r-} = r$ <u>sur l'ensemble</u> $\{S_r<\infty\}$.

Soit e_r le potentiel d'équilibre de l'ensemble $\{r\}$: d'après un résultat classique de HUNT, si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt qui converge en croissant vers S_r, $e_r\circ X_{S_n}$ tend p.s. vers 1 sur l'ensemble $\{S_r<\infty\}$. Mais la phrase soulignée plus haut entraîne l'existence d'une telle suite (S_n) (le temps d'arrêt S_r étant prévisible). Par conséquent

$$(e_r\circ X_{S_r})_- = 1 \quad P^0\text{-p.s. sur l'ensemble } \{S_r<\infty\}$$

et en particulier , si e_r n'est pas nulle

$$\limsup_{\substack{s\to r\\ s<r}} e_r(s) = 1$$

On en déduit la propriété 3 en remarquant que $h(x)=e_0(-x)$.

UNE FORMULE DE McKEAN(*)

McKEAN a donné une formule qui permet de calculer la répartition d'entrée dans l'intervalle $]r,\infty[$, et de donner au problème une autre forme analytique. Introduisons (comme déjà plus haut) les temps d'arrêt T_r, pour $r>0$

$$T_r = \inf\{s : X_s>r\}$$

Nous avons p.s. $T_0=0$, $\lim_{r\to\infty} T_r=\infty$, et nous avons pour toute fonction borélienne $f\geqq 0$ sur $\mathbb{R}_+$

$$\int_0^\infty f\circ X_u\, du = \int_0^\infty f(u)dT_u$$

En particulier, en prenant pour f l'indicatrice de $[0,r]$:

$$E[T_r] = w([0,t]).$$

Reprenons maintenant la martingale uniformément intégrable (M_t) du lemme 2 (§III), et écrivons que $M_{T_r} = E[M_\infty | \underline{\underline{F}}_{T_r}]$. Il vient

(*) Private communication .

$$e^{-qT_r}e^{-pX_{T_r}} = (q+g(p))E[\int_{T_r}^{\infty} e^{-qs}e^{-pX_s}ds\,|\,\underline{\underline{F}}_{T_r}]$$

Faisons tendre q vers 0, et prenons des espérances [le théorème de Lebesgue s'applique, du fait que $E[\int_{T_r}^{\infty} e^{-pX_s}ds] \leq E[\int_0^{\infty} e^{-pu}dT_u]$(*) $= \int_0^{\infty} e^{-pu}w(du) = \frac{1}{g(p)} < \infty$]. Il vient

$$E[e^{-pX_{T_r}}] = g(p)E[\int_{T_r}^{\infty} e^{-pX_s}ds] = g(p)E[\int_0^{\infty} I_{[r,\infty[}\circ X_s e^{-pX_s}ds]$$

$$= g(p)E[\int_{r-}^{\infty} e^{-pu}dT_u] = g(p)\int_r^{\infty} e^{-pu}w(du)$$

C'est la formule de McKEAN annoncée. Elle permet théoriquement de calculer $P^0\{X_{T_r}=r\}=h(r)$: c'est l'atome en r de la loi de X_{T_r}, c'est à dire

$$h(r) = \lim_{p\to\infty} E[e^{-p(X_{T_r}-r)}] = \lim g(p)e^{pr}\int_r^{\infty} e^{-pu}w(du)$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{e^{pr}\int_r^{\infty} e^{-pu}w(du)}{\int_0^{\infty} e^{-pu}w(du)}$$

Tout cela est bien curieux................

DERNIÈRE INTERPRÉTATION DU PROBLÈME

On rencontre fréquemment la situation suivante : (Z_t) est un processus de Markov à valeurs dans un espace d'états H, et a est un état fixe - nous supposerons le processus (Z_t) issu de a, continu à droite, fortement markovien, mais nous ne chercherons pas à préciser davantage les hypothèses, car ce qui suit est purement heuristique.

L'état a peut alors être :

A) absorbant (les trajectoires restent toujours en a)

B) stable (les trajectoires restent en a pour un intervalle de temps initial : l'ensemble {a} est finement ouvert).

(*) Le symbole E est ici une abréviation pour E^0.

C) Instantané (les trajectoires quittent aussitôt a). Cette catégorie est à diviser en quatre :

C1) a est instantané, mais $\{a\}$ n'est pas un ensemble de potentiel nul . Exemple : états instantanés dans les chaînes de Markov.

C2) $\{a\}$ est un ensemble de potentiel nul, mais n'est pas semi-polaire : a est régulier pour $\{a\}$, et l'ensemble des t tels que $Z_t(\omega)$ =a a l'air d'un ensemble de Cantor. Exemple :"sticky boundaries!"

C3) $\{a\}$ est semi-polaire, mais non polaire. L'ensemble des t tels que $Z_t(\omega)$=a est discret. Exemple :"non sticky boundaries!"

C4) $\{a\}$ est polaire : les trajectoires n'arrivent plus à retrouver a après l'avoir perdu.

Le cas C2) est celui où se pose le plus naturellement le problème des <u>temps locaux</u>. Admettons que nous soyons parvenu à construire un temps local pour a, i.e. une fonctionnelle additive continue (T_t) du processus (Z_t) dont les points de croissance sont exactement les instants de rencontre de a, et posons

$$X_t(\omega) = \inf \{r : T_r > t\}$$

Il est alors facile de voir, en vertu de la propriété de Markov forte, que (X_t) est un processus de LÉVY , et que T_r est précisément le temps d'arrêt ainsi désigné plus haut, i.e. $T_r = \inf\{s : X_s > r\}$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} h(r) &= P\{X_{T_r} = r\} = P\{r \text{ est un point de croissance de } T_.\} \\ &= P\{Z_r = a\} \end{aligned}$$

Ainsi la relation $h(r) \neq 0$ signifie que <u>bien que</u> $\{a\}$ <u>soit un ensemble de potentiel nul</u>, <u>le processus</u>(Z_t) <u>a une probabilité positive d'être dans</u> a <u>à l'instant</u> r . On voit alors clairement pourquoi les r possédant cette propriété forment un semi-groupe de mesure nulle.