SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Rectification à des exposés antérieurs

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 160-162
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__160_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

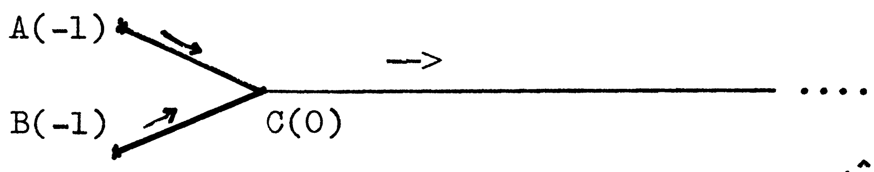
RECTIFICATIONS À DES EXPOSÉS ANTÉRIEURS
(retournement du temps, intégrales stochastiques)

par P.A.MEYER

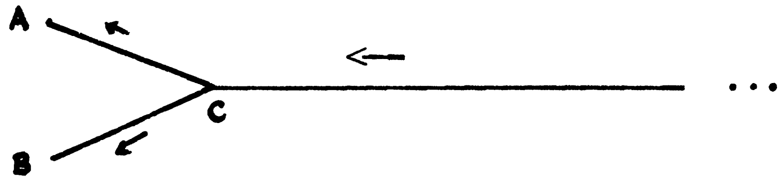
L'exposé de P.CARTIER, P.A.MEYER et M.WEIL sur le retournement du temps, qui figure dans le Séminaire de Probabilités II, comporte une erreur qui nous a été signalée par J.WALSH. Dans l'énoncé du th. fondamental (p.28), la dernière phrase " Cela s'étend à la valeur 0 du paramètre si X_{L-} existe p.s. (dans E) sur $\{0<L<\infty\}$ " est fausse. De même, les quatre dernières lignes de la p.30, affirmant que le processus retourné est toujours fortement markovien, sont fausses. L'erreur se trouve dans la phrase suivante (p.30, ligne 7) :"L'adjonction de 0 à l'ensemble des temps, si $\hat{X}_{0+}$ existe p.s., ne pose aucun problème " !!!!!

Cette question est reprise plus en détail dans le volume des Lecture Notes consacré à la frontière de Martin : il y est prouvé (correctement, on l'espère) que les assertions citées sont valables sous des hypothèses un peu plus fortes. Nous ne reprendrons pas la question ici, par conséquent, mais je donnerai juste l'exemple de J.WALSH, qui illustre bien les difficultés qui se présentent dans les retournements.

Le dessin suivant " représente" le processus (X_t) de semi-groupe (P_t) : c'est un processus déterministe de translation uniforme vers la droite avec la vitesse 1. Nous lui donnerons la mesure initiale $\mu=\frac{1}{2}(\varepsilon_A+\varepsilon_B)$:



Le dessin ci-dessous représente le semi-groupe $(\hat{P}_t)$: c'est un processus de translation uniforme vers la gauche avec la vitesse 1, tué en A et B. Une particule choisit, en atteignant C, la branche supérieure (resp. inférieure) avec la probabilité 1/2 :



Les processus obéissant au semi-groupe $(\hat{P}_t)$ ne sont pas fortement markoviens (considérer le temps d'arrêt T, temps d'entrée dans le segment AC) ; ils ne sont même pas markoviens par rapport à leur famille de tribus naturelle rendue continue à droite ! D'autre part, (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont en dualité par rapport à la mesure μU égale à λ (mesure de Lebesgue) sur (C,∞), à $\frac{\lambda}{2}$ sur les segments AC et BC. Ces deux semi-groupes satisfont donc aux hypothèses de dualité de l'exposé antérieur.

Considérons alors le temps de retour $L = \sup\{t : X_t \in AC\}$: le processus retourné à L est un processus $(\hat{X}_t)_{t>0}$ de translation uniforme vers la gauche sur la branche supérieure, tué en A. Sa loi d'entrée $(\nu_t)_{t>0}$ est donnée par $\nu_t = \frac{1}{2}\varepsilon_{s(t)}$ pour $0<t<1$, $s(t)$ étant le point d'abscisse $-t$ sur la branche supérieure, et $\nu_t = 0$ pour $t \geq 1$. Ce processus admet bien $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition, la limite $\hat{X}_{0+}$ existe et vaut C , mais le processus constitué par les v.a. $\hat{X}_{0+}$ et $\hat{X}_t$ $(t>0)$ <u>n'admet plus</u> $(\hat{P}_t)$ <u>comme semi-groupe de transition</u> : en effet, le processus admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe, $\frac{1}{2}\varepsilon_C$ comme loi initiale, emprunte la branche inférieure avec probabilité 1/4.

D'une manière générale, les exemples qui se multiplient maintenant de processus admettant des singularités à l'instant 0 (points de branchement, etc) suggèrent que l'ensemble d'indices naturel pour la théorie générale des processus de Markov est $]0,\infty[$, et non pas $[0,\infty[$. Le théorème du retournement est un bel exemple de cette situation.

RECTIFICATIONS AUX INTEGRALES STOCHASTIQUES

Les exposés sur les intégrales stochastiques contiennent un certain nombre d'erreurs (que j'ai ajoutées aux articles de S.WATANABE, MOTOO, IKEDA, etc). En voici trois qui méritent d'être signalées, car elles risquent d'être gênantes. Les n^{os} de page renvoient au volume I du Séminaire de Probabilités.

Page 81, lignes 15-16 .- Ces deux lignes contiennent des erreurs, dont la plus importante est la disparition d'un exposant ^{2}. Il faut lire

$$E[\int_0^t H_{ns}^2 d\langle N,N\rangle_s] = E[\int_0^t |H_{ns}|.(|H_{ns}|d\langle N,N\rangle_s] \leqq E[\int_0^t |H_{ns}|.(|H_s|d\{\langle N,N\rangle_s\})$$

$$\leqq E[\int_0^t |H_{ns}|d\{\langle M,N\rangle_s\}] \leqq (E[\langle M,M\rangle_t])^{1/2}(E[\int_0^t H_{ns}^2 d\langle N,N\rangle_s])^{1/2}$$

et par conséquent $E[\int_0^t H_{ns}^2 d\langle N,N\rangle_s] \leqq E[\langle M,M\rangle_t]$, qui ne dépend pas de n. C'est le résultat cherché.

Page 120, ligne 22. - L'assertion suivant laquelle $A_t = t\wedge R$ est une fonctionnelle additive si R est un temps terminal est inexacte (sauf lorsque R est la durée de vie).

Page 145, ligne 2.- La définition de ν' est incorrecte : il faut définir ν' comme le premier saut de la fonctionnelle $I_K.B$.(*)

* Je remercie J.LAZARO et D.REVUZ, qui m'ont signalé ces erreurs.