Paul-André Meyer

Un résultat élémentaire sur les temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 152-154
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__152_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

UN RÉSULTAT ÉLÉMENTAIRE SUR LES TEMPS D'ARRÊT

(P.A.Meyer)

La proposition 1, dont la démonstration est très facile, n'a pourtant été découverte que tout récemment (elle ne figure pas dans le Guide Gris : Séminaire de Probabilités II). Elle est très utile, en permettant de ramener de nombreux problèmes relatifs aux temps d'arrêt accessibles à des problèmes analogues concernant des temps d'arrêt <u>prévisibles</u> , beaucoup plus maniables en général. La proposition 2 en est une conséquence facile (la partie relative aux temps d'arrêt accessibles a déjà été exposée dans un autre travail).

Hypothèses et notations sont celles du Guide Gris.

PROPOSITION 1.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt accessible. Il existe une suite</u> (T_n) <u>de temps d'arrêt prévisibles telle que l'on ait</u>

$$[T] \subset \bigcup_n [T_n]$$

DEMONSTRATION.- 1) Soit (R_n) une suite croissante de temps d'arrêt, et soit $R = \lim_n R_n$. Posons

$$U = \{R_n < R \text{ pour tout } n,\ R < \infty\}$$

$$R'_n = R_n \text{ si } R_n < R$$

$$\qquad \infty \text{ si } R_n = R$$

$$R''_n = R'_n \wedge n$$

$$R' = \lim_n R'_n = \lim_n R''_n \ .$$

Je dis que R' est prévisible, et que R'= R sur U . Il est clair d'abord que la suite (R'_n) est croissante, et que l'on a $R'_n < R'$ pour tout n sur $\{R' < \infty\}$, donc $\lim R''_n = R'$, $R''_n < R'$ pour tout n. Ainsi R' est prévisible. L'égalité R'=R sur U est évidente.

2) Soit T un temps d'arrêt accessible. Il existe une suite (indexée par $k \geq 1$) de suites croissantes $(R^k_n)_{n \in N}$ de t.d'a. majorés par T, telles que

$$\{0<T<\infty\} = {}_{k}\{R^k_n < T \text{ pour tout } n,\ \lim_n R^k_n = T<\infty\}$$

Construisons un temps d'arrêt prévisible $R'^k = T_k$ à partir de la suite croissante (R^k_n) comme en 1) ci-dessus, et posons

$$T_0 = 0 \text{ si } T=0$$
$$\quad\ \infty \text{ si } T>0$$

Tous les temps d'arrêt T_k $(k\geq 0)$ sont prévisibles, et le graphe de T est contenu dans la réunion des graphes des T_k : la proposition 1 est établie.

Pour comprendre bien la prop.2, il importe de connaître un important résultat de DELLACHERIE (beaucoup plus difficile que la proposition 2 !) : une partie bien-mesurable de $\mathbb{R}_+\times\Omega$, dont la coupe par tout $\omega\in\Omega$ est dénombrable, est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt. Comme d'habitude, nous travaillons à un ensemble indistinguable de $\emptyset$ près.

PROPOSITION 2.- *Soit* H *une partie de* $\mathbb{R}_+\times\Omega$, *réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt* T_n. *Supposons* H *accessible* (*resp. prévisible*) ; *alors* H *est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt accessibles* (*resp. prévisibles*), *et ces graphes peuvent être supposés disjoints*.

1) Nous allons montrer, dans le cas où H est un ensemble accessible, que les T_k eux-mêmes sont accessibles. Décomposons T_k en sa partie accessible T'_k et sa partie totalement inaccessible T''_k. Le graphe d'un temps d'arrêt accessible étant un ensemble accessible, $H'' = H\setminus\bigcup_k [T'_k]$ est un ensemble accessible , contenu dans $\bigcup_k [T''_k]$. Si S est un temps d'arrêt accessible, on a $P\{S=T''_k<\infty\}=0$ pour tout k, donc $[S]$ rencontre H'' suivant un ensemble indistinguable de $\emptyset$, et le théorème de section pour les ensembles accessibles entraîne que la projection de H'' sur Ω est négligeable. Donc H est (indistinguable) de la réunion des graphes des T'_k . Comme $[T''_k]$ est contenu dans H, et $P\{T''_k = T'_n < \infty\}=0$ pour tout n du fait que T''_k est totalement inaccessible, T'_n accessible, on voit que $T''_k = \infty$ p.s., et il en résul -te que $T_k=T'_k$ est accessible.

Supposons maintenant H prévisible : d'après le résultat précédent, H est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt accessibles, et chacun de ces graphes est (prop.1) contenu dans la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles. Ainsi, H est contenu dans la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles S_k . Posons

$$T_k(\omega) = \begin{cases} S_k(\omega) & \text{si } (S_k(\omega),\omega) \in H \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

le graphe de la variable aléatoire T_k est l'ensemble prévisible $H \cap [S_k]$: T_k est donc un temps d'arrêt prévisible, et H est bien la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles.

Enfin, dans les deux cas on peut rendre ces graphes disjoints : si $A_0 = [T_0]$, $A_{k+1} = [T_{k+1}] \setminus \bigcup_{i \leq k} [T_i]$, les A_k sont des graphes disjoints, et des ensembles accessibles ou prévisibles suivant le cas, donc des graphes de temps d'arrêt accessibles ou prévisibles.