

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Un résultat de théorie du potentiel

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 3 (1969), p. 144-151

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1969\\_\\_3\\_\\_144\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__144_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UN RÉSULTAT DE THÉORIE DU POTENTIEL

(P.A.Meyer)

Notre objet est la démonstration du théorème suivant, nécessaire\* au travail de M.WEIL sur le comportement des fonctions co-excessives. Nous rappellerons en temps utile (§1) en quoi consistent les hypothèses de KUNITA-WATANABE.

THÉORÈME 1.- Sous les hypothèses K-W, soit  $\mu$  une mesure qui ne charge pas les ensembles polaires . Il existe alors une mesure  $\nu$  équivalente à  $\mu$  dont le potentiel de Green  $G\nu$  est borné.

Malgré l'aspect innocent de ce théorème ( qui est tout à fait banal en théorie classique du potentiel), nous ne savons pas le démontrer sans mettre en jeu toute la grosse artillerie des processus de Markov. On peut espérer que quelqu'un en trouvera un jour une démonstration plus simple !

§ 1. RAPPELS SUR LES HYPOTHÈSES K-W . RÉDUCTIONS PRÉLIMINAIRES

1.  $E$  est un espace localement compact à base dénombrable.  $(P_t)$  est un semi-groupe sous-markovien standard sur  $E$ , et on suppose pour simplifier que les noyaux  $P_t$  transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes. On désigne par  $(U_p)$  la résolvante de  $(P_t)$ , et on suppose que le noyau  $U=U_0$  transforme les éléments de  $\underline{C}_c^+$  ( fonctions positives continues à support compact) en fonctions (boréliennes) bornées.

Rappelons qu'on appelle conoyau sur  $E$  ( par abus de langage) un noyau sur  $E$  pour lequel on adopte des notations inverses des notations usuelles ( un conoyau opère à gauche sur les mesures, à droite sur les fonctions). On désigne par  $(\hat{U}_p)$  une résolvante sur  $E$ , non nécessairement sous-markovienne, constituée par des conoyaux " fortement fellériens": pour tout  $p, y$  compris  $p=0$ , la transformée  $f\hat{U}_p$  d'une fonction  $f$  borélienne bornée à support compact est continue bornée. De plus, on suppose que si  $f \in \underline{C}_c^+$ ,  $pf\hat{U}_p$  converge simplement vers  $f$  en restant bornée lorsque  $p \rightarrow \infty$ .

\*En fait, ce théorème ne sert plus dans la rédaction définitive de l'article de WEIL ( à paraître au Z. für W. ).

Les fonctions excessives par rapport à la résolvante  $(\hat{U}_p)$  seront appelées fonctions coexcessives. Le préfixe co- pourra être utilisé de manière analogue en d'autres circonstances.

Enfin, on désigne par  $\eta$  une mesure de Radon sur  $E$ , et on suppose que les deux résolvantes  $(U_p)$  et  $(\hat{U}_p)$  sont en dualité par rapport à  $\eta$  : nous énoncerons cette propriété sous la forme la plus forte (équivalente à des formes plus faibles qui ne nous intéresseront pas ici) : pour tout  $p > 0$ , il existe une fonction borélienne positive  $g_p(x, y)$  sur  $E \times E$ , telle que  $g_p(\cdot, y)$  soit  $p$ -excessive pour tout  $y \in E$ , que  $g_p(x, \cdot)$  soit  $p$ -coexcessive (donc s.c.i.) pour tout  $x \in E$ , et que l'on ait

$$U_p(x, dy) = g_p(x, y)\eta(dy) \quad , \quad \hat{U}_p(dx, y) = \eta(dx)g_p(x, y) \quad .$$

Nous écrirons  $g(x, y)$  au lieu de  $g_0(x, y)$ , et nous noterons  $g_y$  l'application  $g(\cdot, y)$ . Si  $\mu$  est une mesure positive, le potentiel de Green de la mesure  $\mu$  est par définition la fonction excessive  $G_\mu = \int g(\cdot, y)\mu(dy)$ . On définit de même le copotential de Green  $\mu\hat{G} = \int \mu(dx)g(x, \cdot)$ .

Rappelons maintenant les résultats de KUNITA-WATANABE que nous utiliserons le plus. Tout d'abord, si une fonction excessive finie  $pp$   $u$  admet deux représentations de Green  $u = G_\mu = G_{\mu'}$ , on a  $\mu = \mu'$ .

Ensuite :

THÉORÈME A.- Soit  $u$  une fonction excessive finie  $pp$ , et soit  $A$  un ensemble borélien relativement compact dans  $E$ . La réduite  $P_A u$  est alors le potentiel de Green d'une mesure positive  $\mu$  unique, portée par  $\bar{A}$ . Il en est de même pour un ensemble borélien  $A$  quelconque si  $u$  (partout finie) est un potentiel de la classe (D).

(La seconde assertion est vraie en fait pour des "potentiels" plus généraux que les potentiels de la classe (D)).

De plus, les hypothèses K-W entraînent que le semi-groupe standard  $(P_t)$  satisfait à l'hypothèse (B) de HUNT. De manière précise, on a la propriété analytique que  $P_A G_\mu = G_\mu$  si  $\mu$  est portée par l'intérieur de  $A$ , et la propriété stochastique suivante :

THÉORÈME B.- Soient  $(X_t)$  un processus markovien standard admettant  $(P_t)$  comme semi-groupe de transition, et  $A$  un ensemble borélien

semi-polaire. Alors  $P\{\exists t > 0 : X_t \in A, X_t \neq X_{t-}\} = 0$ .

Un mot enfin sur les processus que nous utiliserons : nous les construirons sur l'ensemble  $\Omega$  de toutes les applications  $\omega$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E \cup \{\delta\}$ , continues à droite, admettant une durée de vie  $\zeta(\omega)$ , admettant des limites à gauche sur l'intervalle  $]0, \zeta(\omega)[$ . Comme d'habitude, nous désignerons par  $X_t$  les **variables aléatoires** du processus ( $X_t(\omega) = \omega(t)$ ), et nous utiliserons sans autre commentaire les autres notations usuelles.

2. Pour démontrer le th.1, nous allons nous ramener à traiter séparément les deux cas suivants :

a)  $\mu$  ne charge pas les ensembles semi-polaires

b)  $\mu$  ne charge pas les ensembles polaires, mais est portée par un ensemble borélien semi-polaire.

Il suffit évidemment de montrer que  $\mu$  peut se mettre sous la forme  $\mu = \mu' + \mu''$ , où  $\mu'$  possède la propriété a), et  $\mu''$  la propriété b). Cela résulte du lemme général suivant ( bien connu) appliqué à l'ensemble des boréliens semi-polaires.

LEMME 1.- Soient E un espace localement compact à base dénombrable\*,  $\underline{N}$  un ensemble de parties boréliennes de E, possédant la propriété suivante : pour toute suite  $(A_n)$  d'éléments de  $\underline{N}$ , on a  $\bigcup_n A_n \in \underline{N}$ . Alors toute mesure  $\mu$  sur E admet une décomposition unique de la forme  $\mu = \mu' + \mu''$ , où  $\mu'$  ne charge aucun élément de  $\underline{N}$ , et où  $\mu''$  est portée par un élément de  $\underline{N}$ .

DÉMONSTRATION.- Nous utiliserons le sous-lemme suivant : si I est un ensemble de mesures positives, filtrant croissant et majoré, il existe une partie dénombrable J de I admettant la même borne supérieure que I. En effet, choisissons un recouvrement dénombrable  $\underline{U}$  de E par des ouverts relativement compacts, et une partie dénombrable J de I telle que  $\sup_{\eta \in J} \eta(U) = \sup_{\eta \in I} \eta(U)$  pour  $U \in \underline{U}$ . Alors la mesure positive  $\lambda = \sup I - \sup J$  est telle que  $\lambda(U) = 0$  pour tout  $U \in \underline{U}$ , donc  $\lambda = 0$ .

Appliquons cela à l'ordonné filtrant I des mesures  $\nu \leq \mu$  qui sont portées par un élément de  $\underline{N}$  : il en résulte aussitôt que la mesure  $\mu'' = \sup I$  est encore portée par un élément de  $\underline{N}$ , et  $\mu - \mu'' = \mu'$  ne charge évidemment aucun élément de  $\underline{N}$ .

\* S'étend aux mesures abstraites  $\sigma$ -finies.

§ 2. LE CAS OÙ  $\mu$  NE CHARGE PAS LES SEMI-POLAIRES

1. La discussion de ce cas repose sur le théorème suivant. Des modifications évidentes permettent de supposer A presque-borélien, au lieu de borélien.

**THÉORÈME 2.-** Soient A un ensemble borélien, et H l'ensemble des  $y \in A$  tels que  $P_A g_y \neq g_y$ . Alors H est borélien, et tout compact de H est semi-polaire.

( D'après un théorème récent de DELLACHERIE, H est donc semi-polaire)

**DÉMONSTRATION.-** Choisissons une fonction continue f, strictement positive en tout point, telle que  $f\hat{U}$  soit bornée ( il est aisé de construire f comme somme de fonctions continues à support compact). Soit  $Z = \{y : P_A g_y \neq g_y\}$  ; deux fonctions excessives égales presque partout étant égales partout, et  $\langle f, g_y \rangle_\eta = f\hat{U}(y)$  étant fini pour tout y, la relation  $P_A g_y \neq g_y$  équivaut à  $\langle f, P_A g_y \rangle_\eta < \langle f, g_y \rangle_\eta$ , ou à  $((f.\eta)P_A)\hat{G}^y < (f.\eta)\hat{G}^y$ . Ces deux fonctions sont des copotentiels ; elles sont donc semi-continues inférieurement, et il en résulte que Z est borélien. Par conséquent  $H = A \cap Z$  est borélien.

Soit K un compact de H : pour tout  $y \in K$  on a  $\langle f, P_H g_y \rangle_\eta < \langle f, g_y \rangle_\eta$ , et a fortiori  $\langle f, P_K g_y \rangle_\eta < \langle f, g_y \rangle_\eta$ , donc aussi  $\langle f, P_K \lambda \rangle_\eta < \langle f, G\lambda \rangle_\eta$  pour toute mesure  $\lambda \neq 0$  portée par K, et finalement  $P_K G\lambda \neq G\lambda$ .

Soit C un ensemble finement parfait contenu dans K : on a  $P_C P_C l = P_C l$ , donc  $P_K P_C l = P_C l$ . Mais, d'après le théorème A du §1, on peut écrire  $P_C l = G\lambda$ , où  $\lambda$  est une mesure portée par  $\bar{C}$ , donc par K. La relation précédente s'écrit alors  $P_K G\lambda = G\lambda$ , et entraîne  $\lambda = 0$ , donc  $P_C l = 0$ , et  $C = \emptyset$ . Autrement dit, K ne contient aucun ensemble finement parfait, et cela entraîne que K est semi-polaire ([ ], chap.XV, T67).

Voici une importante conséquence du théorème 2 :

**THÉORÈME 3.-** Soient  $\mu$  une mesure qui ne charge pas les ensembles semi-polaires. A un ensemble borélien portant  $\mu$ . Alors  $P_A G\mu = G\mu$ .

DÉMONSTRATION.- Comme  $\mu$  est portée par  $A$ , et ne charge aucun compact de  $H$ , on a  $P_A G\mu = \int_A P_A g_y \mu(dy) = \int_{A \setminus H} P_A g_y \mu(dy) = \int_{A \setminus H} g_y dy = G\mu$ .

2. Nous pouvons achever la démonstration de la première étape du th.1. Soit  $\mu$  une mesure qui ne charge pas les ensembles semi-polaires, et soit  $(A_n)$  une partition de  $E$  en une suite d'ensembles boréliens relativement compacts ; posons  $\mu_n = I_{A_n} \cdot \mu$ . Je dis que le potentiel  $G\mu_n$  est fini presque partout ( donc quasi-partout : [ ], chap.XV, T27). En effet, soit  $f$  une fonction continue strictement positive en tout point, telle que  $f\hat{U}$  soit bornée ;  $\mu_n$  étant une mesure à support compact, on a  $+\infty > \langle f\hat{U}, \mu_n \rangle = \langle f, G\mu_n \rangle$ . Posons alors  $A_{nm} = \{x \in A_n : m \leq G\mu_n(x)\}$ , et  $\mu_{nm} = I_{A_{nm}} \cdot \mu_n$ . Comme  $\mu_n$  ne charge pas l'ensemble polaire  $\{G\mu_n = +\infty\}$ , on a  $\mu_n = \sum_m \mu_{nm}$ . Comme  $G\mu_{nm}$  est bornée par  $m+1$  sur  $A_{nm}$  ( donc aussi sur son adhérence fine ),  $P_{A_{nm}} G\mu_{nm} \leq m+1$  partout ; d'autre part,  $\mu_{nm}$  ne chargeant pas les ensembles semi-polaires, le th.3 entraîne que  $P_{A_{nm}} G\mu_{nm} = G\mu_{nm}$ . Il ne reste plus qu'à poser  $\theta = \sum \frac{1}{2^{n+m}(m+1)} \mu_{nm}$  pour obtenir une mesure  $\theta$  équivalente à  $\mu$ , et dont le potentiel est borné.

### §3. LE CAS OÙ $\mu$ EST PORTÉE PAR UN ENSEMBLE SEMI-POLAIRE

1. Rappelons qu'un ensemble borélien  $A$  est dit totalemtent effilé si la fonction  $P_A^1 1$  est bornée sur  $A$  par une constante  $< 1$ . Tout ensemble semi-polaire étant réunion d'une suite d'ensembles totalemtent effilés ( cf [ ], chap.XV, T29). Il suffira de traiter le cas où  $\mu$  est portée par un ensemble totalemtent effilé  $A$ . Nous désignerons par  $T_n$  les temps d'arrêt définis par récurrence par  $T_0 = 0$ ,  $T_{n+1} = T_n + T_A \circ \theta_{T_n}$  : l'ensemble  $\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\}$  est alors la réunion des graphes des temps d'arrêt  $T_n$ .

Nous commencerons par un théorème général dû à BLUMENTHAL et GETTOOR ( sous la forme présente), et qui n'a rien à voir avec  $\mu$  ni avec  $A$ .

THÉOREME 4.- Soit  $(C_t)$  une fonctionnelle additive dont le potentiel  $U_C 1$  est fini, et qui possède la propriété suivante

pour toute loi  $\lambda$ ,  $P^\lambda \{ \exists t : X_t \neq X_{t-} \text{ et } C_t \neq C_{t-} \} = 0$ .

Soit  $\nu$  l'unique mesure telle que  $U_C 1 = G\nu$ . Alors  $U_C f = G(f.\nu)$  pour toute fonction positive borélienne  $f$ .

DÉMONSTRATION.- Montrons d'abord que  $P_G U_C f = U_C f$  si  $f$  est nulle hors de  $G$  ouvert. En effet,  $P_G U_C f = E^* [ \int_{T_G^+}^\infty f \circ X_s dC_s ]$ ,  $T_G$  étant

exclu de l'intervalle d'intégration, tandis que  $U_C f = E^* [ \int_{T_G^-}^\infty \dots ]$ ,  $T_G$  étant cette fois inclus, du fait que  $f \circ X_s = 0$  pour  $s < T_G^-$ . Tout revient donc à montrer que  $E^* [ f \circ X_{T_G} (C_{T_G} - C_{T_G^-}) ] = 0$ . Or, de deux choses l'une : ou bien  $X_{T_G} = X_{T_G^-}$ , et alors  $X_{T_G}$  appartient à la frontière de  $G$ , et  $f \circ X_{T_G} = 0$  ; ou bien  $X_{T_G} \neq X_{T_G^-}$ , et alors c'est

$C_{T_G} - C_{T_G^-}$  qui est nul : le produit est donc toujours nul, et le résultat cherché est établi.

Nous dirons qu'un ensemble borélien  $H$  est C-négligeable si  $U_C(I_H) = 0$ . Soit  $\lambda$  une mesure équivalente à  $\eta$ , telle que  $\langle \lambda, U_C 1 \rangle < \infty$  ; la fonction excessive  $U_C(I_H)$  est nulle si et seulement si  $\langle \lambda, U_C I_H \rangle = 0$ . Autrement dit,  $H$  est C-négligeable si et seulement si  $H$  est négligeable pour la mesure  $\lambda U_C$ . On en déduit aussitôt que les ouverts  $V$  dont la frontière est à la fois C-négligeable et  $\nu$ -négligeable forment une base  $\underline{\underline{B}}$  de la topologie de  $E$ .

Il nous suffira maintenant de montrer que  $U_C \nu = G(\nu.\nu)$  lorsque  $\nu$  est l'indicatrice d'un ouvert  $\nu \in \underline{\underline{B}}$ . Soit  $W$  l'intérieur de  $V^c$ , et soit  $w$  l'indicatrice de  $W$ . La frontière de  $V$  et  $W$  étant C-négligeable, nous avons  $U_C 1 = U_C \nu + U_C w$ . D'après le th.A du §1, nous pouvons écrire  $U_C \nu = P_V U_C \nu = G\lambda$ , où  $\lambda$  est portée par  $\bar{V}$ . De même, on peut écrire  $U_C w = G\mu$ , où  $\mu$  est portée par  $\bar{W}$ . La relation  $G\lambda + G\mu = G\nu$  entraîne  $\lambda + \mu = \nu$ , et comme  $\nu$  ne charge pas les frontières on voit que  $\lambda$  est portée par  $V$ ,  $\mu$  par  $W$ . On n'a alors pas le choix :  $\lambda = \nu.\nu$ ,  $\mu = w.\nu$ , qui est le résultat cherché.

2. Nous passons maintenant à l'achèvement de la démonstration du th.1, qui utilisera quelques lemmes.

Choisissons d'abord une fonction continue  $g$ , strictement positive en tout point de  $E$ , dont le potentiel  $p=Ug$  est borné, et posons

$$q = P_A U g = P_A p \quad .$$

Comme  $p$  est un potentiel de la classe (D), il en est de même de  $q$ , et  $q$  est donc le potentiel  $U_H$  d'une fonctionnelle additive naturelle (au sens des "processus croissants naturels")  $H$ . Nous poserons  $C=I_A \cdot H$ .

LEMME 2 .- Tout sous-ensemble borélien C-négligeable de A est polaire.

DÉMONSTRATION.- Tout revient à montrer que si un sous-ensemble borélien  $B$  de  $A$  n'est pas polaire,  $B$  n'est pas  $C$ -négligeable. Or  $A$  étant totalement effilé, on montre aisément qu'il existe une loi  $\lambda$  telle que  $P^\lambda \{X_{T_A} \in B\} > 0$ . Le lemme sera donc établi si nous prouvons que l'on a p.s.  $G_{T_A} - C_{T_A} > 0$  (ou encore  $H_{T_A} - H_{T_A} > 0$ ) sur l'ensemble  $\{T_A < \infty\}$ . Les "p.s." sont ici relatifs à  $P^\lambda$ .

Notons d'abord que la variable aléatoire  $p \circ X_{T_A} - q \circ X_{T_A}$  est p.s.  $> 0$  sur  $\{T_A < \infty\}$ . Comme  $X_{T_A} \in A$  p.s., cela revient à montrer que  $p(x) - q(x) > 0$  pour tout  $x \in A$ ; mais cette expression est égale à  $E^x[\int_{T_A}^{\infty} g \circ X_s ds]$ ; comme  $T_A > 0$   $P^x$ -p.s., et que  $g$  est strictement positive, la relation  $p(x) - q(x) > 0$  est évidente.

Construisons ensuite une suite décroissante  $(U_n)$  d'ouverts contenant  $A$ , telle que les temps d'arrêt  $S_n = T_{U_n}$  convergent  $P^\lambda$ -p.s. vers  $T_A$  sur  $\{T_A < \infty\}$  (notons qu'il se peut que  $S_n$  tende vers  $\zeta < \infty$  sur  $\{T_A = \infty\}$ ). Comme la fonctionnelle  $H$  est naturelle, on a en posant  $S = \lim_n S_n$  ( $S = T_A$  sur  $\{T_A < \infty\}$ )

$$\begin{aligned} H_S - \lim_m H_{S_m} &= \lim_m E[H_S - H_{S_m} | \underline{F}_{S_m}] = \lim_m E[q \circ X_{S_m} - q \circ X_S | \underline{F}_{S_m}] \\ &= \lim_m E[\int_{S_m + T_A \circ \theta_{S_m}}^{\infty} g \circ X_s ds | \underline{F}_{S_m}] - E[q \circ X_S | \bigvee_m \underline{F}_{S_m}] \end{aligned}$$



Mais nous savons que  $X_{T_A} = X_{T_A-}$  p.s. sur  $\{T_A < \infty\}$  : on a donc  $S_m < T_A$  sur  $T_A < \infty$ , donc  $S_m + T_A \circ \theta_{S_m} = T_A$ , et la même relation est évidemment vraie sur  $\{T_A = \infty\}$ . La première intégrale vaut donc  $\int_{T_A}^{\infty} g \circ X_s ds$ , et la première espérance conditionnelle tend donc vers  $E[\int_{T_A}^{\infty} g \circ X_s | \bigvee_m \mathbb{F}_{S_m}] = E[\dots | \mathbb{F}_{T_A} | \bigvee_m \mathbb{F}_{S_m}] = E[p \circ X_{T_A} | \bigvee_m \mathbb{F}_{S_m}]$ . Comme  $q$  est nulle au point  $\partial$ , on a donc finalement

$$H_S - \lim_m H_{S_m} = E[(p-q) \circ X_{T_A} | \bigvee_m \mathbb{F}_{S_m}]$$

Notons maintenant le petit lemme suivant de théorie du conditionnement : si  $\phi$  est une variable aléatoire positive, et si  $\underline{G}$  est une tribu, l'ensemble  $\{E[\phi | \underline{G}] > 0\}$  contient p.s. l'ensemble  $\{\phi > 0\}$ . En effet, l'intégrale de  $\phi$  sur  $\{E[\phi | \underline{G}] = 0\}$  est nulle, donc  $\phi = 0$  p.s. sur cet ensemble, et le résultat s'ensuit par passage au complémentaire. Appliquons cela avec  $\phi = (p-q) \circ X_{T_A}$ ,  $\underline{G} = \bigvee_m \mathbb{F}_{S_m}$  : il vient que  $H_S > \lim_m H_{S_m}$  p.s. sur  $\{T_A < \infty\}$ . Le lemme est établi.

FIN DE LA DEMONSTRATION DU TH.1.- Reprenons une mesure  $\mu$  qui ne charge pas les ensembles polaires et qui est portée par  $A$  ; désignons par  $\nu$  la mesure dont le potentiel de Green est  $q = U_C 1$ . Cette mesure a un potentiel borné, et je dis que  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\nu$  : cela achèvera la démonstration.

Il suffit de prouver que toute partie de  $A$   $\nu$ -négligeable est  $\mu$ -négligeable ; or soit  $B$  une partie  $\nu$ -négligeable de  $A$  : la relation  $G(I_B, \nu) = 0$  entraîne  $U_C I_B = 0$ , en vertu du th.4 et du th.B du §1. Mais cela entraîne que  $B$  est polaire ( lemme 2), donc  $\mu$ -négligeable. Le théorème est prouvé.

#### BIBLIOGRAPHIE

Les références marquées [ ] renvoient toutes à MEYER, Processus de Markov, Lecture Notes in Math. vol.26 ; les résultats de KUNITA-WATANABE cités au début se trouvent dans leur article Markov Processes and Martin boundaries I, Ill. J. of M., 1965, 485-526.