

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Un lemme de théorie des martingales

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 3 (1969), p. 143

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1969\\_\\_3\\_\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__143_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UN LEMME DE THÉORIE DES MARTINGALES

Le théorème suivant généralise un vieux lemme de DOOB. Il ne semble pas être classique, et pourtant il est trivial et utile. On sait (BLACKWELL et DUBINS) que la condition "les  $f_n$  sont majorées par une fonction intégrable" ne peut pas être  $f_n$  supprimée, même si  $\underline{F}_n = \underline{F}$  pour tout  $n$ .

**THÉORÈME.** - Soient  $(\Omega, \underline{G}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $(\underline{F}_n)$  une suite croissante de sous-tribus de  $\underline{G}$ ,  $\underline{F}$  la tribu engendrée par la réunion des  $\underline{F}_n$ . Soit  $(f_m)$  une suite de variables aléatoires majorées en module par une variable aléatoire intégrable  $g$ , qui converge p.s. vers une variable aléatoire  $f$ . Alors  $\mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n]$  converge p.s. vers  $\mathbb{E}[f | \underline{F}]$ .

**DÉMONSTRATION.** - Posons  $u = \inf_{n \geq m} f_n$ ,  $v = \sup_{n \geq m} f_n$ , où  $m$  est choisi assez grand pour que  $\mathbb{E}[v-u] < \varepsilon$  (nombre  $> 0$  fixé). Alors, pour  $n \geq m$ ,

$$\mathbb{E}[u | \underline{F}_n] \leq \mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n] \leq \mathbb{E}[v | \underline{F}_n]$$

par conséquent, en appliquant le th. de convergence des martingales

$$\mathbb{E}[u | \underline{F}] \leq \liminf \mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n] \leq \limsup \mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n] \leq \mathbb{E}[v | \underline{F}]$$

et aussi, évidemment

$$\mathbb{E}[u | \underline{F}] \leq \mathbb{E}[f | \underline{F}] \leq \mathbb{E}[v | \underline{F}] .$$

On en déduit que  $\mathbb{E}[\limsup \mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n] - \liminf \mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n]] \leq \varepsilon$ , ce qui entraîne que la suite  $(\mathbb{E}[f_n | \underline{F}_n])$  converge p.s., puis que la limite de cette suite est  $\mathbb{E}[f | \underline{F}]$ .