PAUL-ANDRÉ MEYER

Un lemme de théorie des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 143

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__143_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1967/68

UN LEMME DE THÉORIE DES MARTINGALES

Le théorème suivant généralise un vieux lemme de DOOB. Il ne semble pas être classique, et pourtant il est trivial et utile. On sait (BLACKWELL et DUBINS) que la condition " les f_n sont majorées par une fonction intégrable" ne peut pas être supprimée, même si $\underline{\underline{F}}_n = \underline{\underline{F}}$ pour tout n.

THÉORÈME.- Soient $(\Omega, \underline{\underline{G}}, P)$ un espace probabilisé, $(\underline{\underline{F}}_n)$ une suite croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{F}}$ la tribu engendrée par la réunion des $\underline{\underline{F}}_n$. Soit (f_m) une suite de variables aléatoires majorées en module par une variable aléatoire intégrable g, qui converge p.s. vers une variable aléatoire f. Alors $E[f_n|\underline{\underline{F}}_n]$ converge p.s. vers $E[f|\underline{\underline{F}}]$.

DÉMONSTRATION.- Posons $u = \inf_{n \geq m} f_n$, $v = \sup_{n \geq m} f_n$, où m est choisi assez grand pour que $E[v-u]<\varepsilon$ (nombre >0 fixé). Alors, pour $n \geq m$,

$$E[u|\underline{\underline{F}}_n] \leq E[f_n|\underline{\underline{F}}_n] \leq E[v|\underline{\underline{F}}_n]$$

par conséquent, en appliquant le th. de convergence des martingales

$$E[u|\underline{\underline{F}}] \leq \liminf E[f_n|\underline{\underline{F}}_n] \leq \limsup E[f_n|\underline{\underline{F}}_n] \leq E[v|\underline{\underline{F}}]$$

et aussi, évidemment

$$E[u|\underline{\underline{F}}] \leq E[f|\underline{\underline{F}}] \leq E[v|\underline{\underline{F}}] .$$

On en déduit que $E[\limsup E[f_n|\underline{\underline{F}}_n] - \liminf E[f_n|\underline{\underline{F}}_n]] \leq \varepsilon$, ce qui entraîne que la suite $(E[f_n|\underline{\underline{F}}_n])$ converge p.s., puis que la limite de cette suite est $E[f|\underline{\underline{F}}]$.