Séminaire de probabilités (Strasbourg)

CATHERINE HUBER

Un aspect de la loi du logarithme itéré pour des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 137-142
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__137_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE

Laboratoire Associé au C.N.R.S.

STRASBOURG

- Séminaire de Probabilités - 1967-68

UN ASPECT DE LA LOI DU LOGARITHME ITÉRÉ POUR DES VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES ET ÉQUIDISTRIBUÉES

Catherine HUBER *

Soit $(X_k)_{k\in N}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, et $(S_n)_{n\in N}$ la suite des sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On suppose que la suite (S_n) obéit à la loi du logarithme itéré. Comme l'a montré V. Strassen [1)], il faut et il suffit pour cela que les deux premiers moments de la loi commune des X_k existent et soient finis ; on ne restreindra pas la généralité du problème en les supposant égaux respectivement à 0 et à 1 .

$$E(X_k) = 0$$

$$E(X_k^2) = 1$$

Le problème considéré est alors le suivant :

Existe-t-il une fonction $\varphi(n)$ et une variable aléatoire Y non presque sûrement nulle et non presque sûrement infinie telle que

* Rapport sur un travail fait à Zurich.

$$\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n\mathrm{LogLog}n}}{\varphi(n)} = Y \quad \text{p. s.}$$

Nous allons en premier lieu montrer que la variable aléatoire Y, si elle existe, est presque sûrement égale à une constante, puis donner une valeur de $\varphi(n)$ dans le cas où la fonction de répartition des X_k est soumise à une certaine condition asymptotique.

1\. Y , si elle existe, est presque sûrement constante.

En effet, soit α une constante réelle fixée. Evaluons $P(Y > \alpha)$

$$P(Y > \alpha) = P\left(\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n\mathrm{LogLog}n}}{\varphi(n)} > \alpha\right)$$

$$= P\left(S_n > \sqrt{2n\mathrm{LogLog}n} + \alpha\varphi(n) \text{ pour une infinité de valeurs de } n\right)$$

Le théorème 1, dû à P. Lévy [2)], montre que cette probabilité ne peut être que 0 ou 1 .

Théorème 1 .

Si $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ sont les sommes successives d'une série à termes aléatoires indépendants et essentiellement divergente, si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont des constantes données, la probabilité que l'on ait $S_n > A_n$ pour une infinité de valeurs de n ne peut être que 0 ou 1 .

Par suite la variable aléatoire Y , si elle existe, est presque sûrement égale à une constante que l'on peut prendre égale à 1 .

Or, d'après le théorème 1, l'inégalité

$$S_n > \sqrt{n}\,\psi(n) \tag{1}$$

détermine une partition de l'ensemble de toutes les fonctions $\psi(n)$ en deux classes de la façon suivante :

$\psi(n)$ appartient à la classe supérieure S si :

$S_n > \sqrt{n}\,\psi(n)$ n'arrive que pour un nombre presque sûrement fini de valeurs de n .

$\psi(n)$ appartient à la classe inférieure I si :

$S_n > \sqrt{n}\,\psi(n)$ arrive pour une infinité de valeurs de n , et cela presque sûrement.

Le problème initial se ramène donc à celui de trouver un critère d'appartenance à la classe supérieure ou inférieure.

2. Existence et calcul de $\varphi(n)$ sous certaines hypothèses de régularité de la fonction de répartition des X_k .

W. Feller [3] a donné une caractérisation des classes supérieure et inférieure dans le cas où la fonction $\psi(n)$ est monotone. Soit

$$V(x) = P(X_k \leq x)$$

la fonction de répartition des X_k .

Théorème 2 .

[3] Si, quand x tend vers l'infini

$$\int_{\{|t| > x\}} t^2 dV(t) = O[(\mathrm{Log}\ \mathrm{Log}\ x)^{-1}] \tag{2}$$

alors la suite monotone $\psi(n)$ appartient à la classe supérieure (inférieure) si et seulement si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n} e^{-\frac{1}{2}\psi^2(n)} \tag{3}$$

est convergente (divergente). Ce critère n'est plus valable si

$$\text{Log Log } x \int_{\{|t| > x\}} t^2 \, dV(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Donc, si l'on considère une suite de variables aléatoires dont la fonction de répartition commune vérifie la condition (2), et une suite monotone $\psi(n)$ de la forme

$$\psi(n) = \sqrt{2\text{LogLogn} + \beta \text{ LogLogLogn}}$$

la série (3) converge pour $\beta > 3$

diverge pour $\beta \leq 3$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \sqrt{2\text{Log}_2 n + \beta \text{ Log}_3 n} &\in S \quad \text{si} \quad \beta > 3 \\ &\in I \quad \text{si} \quad \beta \leq 3 \end{aligned}$$

en notant $\text{LogLog}\ldots\text{Logn} = \text{Log}_k n$

c'est-à-dire que

$B_n = \left\{ S_n > \sqrt{2\text{Log}_2 n + \beta \text{ Log}_3 n} \sqrt{n} \right\}$ arrive une infinité de fois p. s. si $\beta \leq 3$

un nombre fini de fois p. s. si $\beta > 3$

L'évènement B_n peut aussi s'écrire

$$B_n = \left\{ S_n - \sqrt{2n\mathrm{Log}_2 n} > \sqrt{2n\mathrm{Log}_2 n} \left(\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Log}_3 n}{2\mathrm{Log}_2 n}} - 1\right) \right\}$$

$$> \sqrt{2n\mathrm{Log}_2 n} \left(\frac{\mathrm{Log}_3 n}{4\mathrm{Log}_2 n} + \frac{\mathrm{Log}_3 n}{\mathrm{Log}_2 n} \varepsilon \left(\frac{\mathrm{Log}_3 n}{\mathrm{Log}_2 n}\right) \right) \Big\}$$

$$\varepsilon \left(\frac{\mathrm{Log}_3 n}{\mathrm{Log}_2 n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$> \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{Log}_2 n}} \mathrm{Log}_3 n \, (1 + \varepsilon)$$

d'où

$$\limsup \frac{S_n - \sqrt{2n\mathrm{Log}_2 n}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{n}{2\mathrm{Log}_2 n}} \mathrm{Log}_3 n} = 1 \quad \text{p. s.}$$

Remarquons que cette solution du problème considéré

1) a été obtenue seulement sous l'hypothèse que la fonction de répartition commune aux variables aléatoires X_k vérifiait la condition (2)

2) n'est pas forcément unique, puisqu'elle peut dépendre du type de la fonction $\psi(n)$ choisie.

Références

[1] V. Strassen : A converse to the law of the iterated logarithm, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie (received sept. 1965)

[2] P. Lévy : Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris 1954 , p. 147

[3] W. Feller : The law of the iterated logarithm for identically distributed random variables, Annals of Mathematics vol.47 , n°4 (1946)

* *
*