CLAUDE DELLACHERIE

Ensembles aléatoires II

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 3 (1969), p. 115-136
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1969__3__115_0>

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Rue René Descartes
STRASBOURG

1967-68

- Séminaire de Probabilités -

ENSEMBLES ALEATOIRES II

par C. DELLACHERIE

Dans l'exposé précédent, nous nous sommes occupés de la structure des ensembles mesurables (ou bien-mesurables) à coupes dénombrables. Nous nous occupons dans celui-ci des ensembles à coupes non-dénombrables. Les outils mathématiques utilisés sont des aménagements de ceux créés par SIERPINSKI dans [7], article dans lequel l'auteur montre que tout borélien non-dénombrable de R^n contient un ensemble parfait non vide. En premier lieu, nous donnons l'important théorème sur les rabotages, qui est une forme abstraite d'un théorème de SIERPINSKI : la démonstration initiale n'a pas été modifiée (cf. [7]) ; seuls les concepts de départ ont été considérablement élargis. On s'aperçoit alors qu'il entraîne aisément, par exemple, les deux formes du théorème de capacitabilité de CHOQUET (que SIERPINSKI aurait donc pu démontrer vers 1920, s'il avait eu des motivations pour en concevoir l'énoncé ...).

§ 1. LES RABOTAGES DE SIERPINSKI.

Le théorème de SIERPINSKI n'est pas difficile à démontrer, mais la situation est un peu compliquée à concevoir (bien que très naturelle). Nous travaillons sur un ensemble E, et nous définissons successivement :

1°) les "gros ensembles"

2°) les rabots de SIERPINSKI

3°) les enveloppes

4°) les ensembles lisses.

1) LES GROS ENSEMBLES.

On se donne une capacitance $\underline{\underline{C}}$ sur E (cf. [6]), i.e. une classe $\underline{\underline{C}}$ de parties de E vérifiant :

a) $A \in \underline{\underline{C}}$, $A \subset B \Rightarrow B \in \underline{\underline{C}}$

b) si (A_n) est une suite croissante de parties de E et si $\bigcup_n A_n \in \underline{\underline{C}}$, il existe un k tel que $A_k \in \underline{\underline{C}}$.

Exemples.

- La classe des parties non-dénombrables de E
- l'ensemble des parties A de E telles que $I(A) > \eta$, où $\eta \in \mathbb{R}$, et I est une capacité de CHOQUET sur E.

2) LES RABOTS DE SIERPINSKI.

DEFINITION 1.

Un rabotage est une suite $F = (f_n)_{n\geq 1}$ d'applications $f_n : (\mathcal{P}(E))^n \mapsto \mathcal{P}(E)$ telles que :

a) $f_n(P_1, \ldots, P_n) \subset P_n$

b) $P_n \in \underline{\underline{C}} \Rightarrow f_n(P_1, \ldots, P_n) \in \underline{\underline{C}}$.

La propriété a) exprime que l'on "rabote P_n" , la propriété b), que l'on "n'enlève pas de trop gros copeaux à P_n" . Il n'est pas facile de donner des exemples de rabotages en dehors de :

- $f_n(P_1, \ldots, P_n) = P_n$ (rabotage identique)
- $f_n(P_1, \ldots, P_n) = P_n$ si $P_n \in \underline{\underline{C}}$
  $= \emptyset$ si $P_n \notin \underline{\underline{C}}$.

<u>DEFINITION 2.</u>

<u>Une suite</u> $(P_n)_{n\geq 1}$ <u>de parties de</u> E <u>est</u> F-rabotée <u>si</u> :

a) $P_{n+1} \subset f_n(P_1, \ldots, P_n)$ <u>pour tout</u> n

b) $P_n \in \underline{\underline{C}}$ <u>pour tout</u> n .

Une telle suite est évidemment décroissante.

3) <u>LES ENVELOPPES.</u>

A toute suite décroissante $(A_n)_{n\geq 1}$ de parties de E , on fait correspondre une classe $H[(A_n)]$ de parties de E , appelées <u>enveloppes</u> de la suite (A_n) , satisfaisant à :

a) $A \in H[(A_n)]$, $A \subset B \Rightarrow B \in H[(A_n)]$

b) $H[(A_n)]$ est stable pour les intersections dénombrables

c) si (B_n) est une suite extraite de (A_n) , alors $H[(B_n)] = H[(A_n)]$.

<u>Exemples.</u>

- $H[(A_n)]$ est la classe des parties de E qui contiennent $\bigcap_n A_n$
- l'exemple précédent est sans intérêt, mais on obtient une situation fructueuse en supposant que E est un espace topologique, et en prenant pour $H[(A_n)]$ la classe des parties qui contiennent $\bigcap_n \overline{A}_n$.

– soit $\underline{\underline{E}}$ un pavage sur E, stable pour $(\cup f, \cap f)^{*}$. Un ensemble A est une enveloppe de la suite (A_n) s'il existe une suite décroissante (B_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cup \{E\}$, telle que l'on ait $A_n \subset B_n$ pour tout n et que A contienne $\bigcap_n B_n$. Les conditions a) et c) sont trivialement vérifiées. Vérifions la condition b) : soit (A^k) une suite d'enveloppes et, pour tout k, soit (B_n^k) une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cup \{E\}$ telle que $A_n \subset B_n^k$ pour tout n, et que $A^k \supset \bigcap_n B_n^k$. Posons alors $A = \bigcap_k A^k$ et $B_n = B_n^1 \cap B_n^2 \cap \ldots \cap B_n^n$ pour tout n. Il est clair que (B_n) est une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cup \{E\}$, que $A_n \subset B_n$ pour tout n, et que $A \supset \bigcap_n B_n$. Donc A est une enveloppe de la suite (A_n). (On remarquera que, si E est un espace topologique, et si $\underline{\underline{E}}$ est la classe des fermés, on retrouve l'exemple précédent).

4) <u>LES ENSEMBLES LISSES</u>.

DEFINITION 3.

<u>Un rabotage</u> F <u>est compatible avec</u> $A \in \mathcal{P}(E)$, <u>si pour toute suite</u> $(P_n)_{n\geq 1}$ F-<u>rabotée telle que</u> $P_1 \subset A$, <u>on a</u> $A \in H[(P_n)]$. <u>On dit que</u> A <u>est</u> lisse <u>s'il existe un rabotage compatible avec</u> A.

Remarquons que, si $A \notin \underline{\underline{C}}$, le rabotage identique est compatible avec A (il n'existe pas de suite rabotée dont le premier terme est inclus dans A) ; donc A est lisse. D'autre-part, si $A \in \underline{\underline{C}}$, et si A est lisse, il existe toujours une suite rabotée dont le premier terme est inclus dans A. Soit en effet F un rabotage compatible avec A ; il suffit alors de prendre $P_1 = A$, $P_2 = f_1(A)$, ..., $P_{n+1} = f_n(P_1, \ldots, P_n)$, ...

(*) "f" = "fini"

Voici maintenant le théorème, dont la démonstration est due à SIERPINSKI

THEOREME 1.

L'ensemble $\underline{\underline{L}}$ des parties lisses de E est stable pour $(\cup md, \cap d)^*$.

COROLLAIRE.

Soit $\underline{\underline{E}}$ une classe d'ensembles lisses stable pour $(\cup f, \cap f)^*$. La classe stabilisée de E pour $(\cup d, \cap d)^*$ est formée d'ensembles lisses.

Remarque.

On peut aussi montrer que, sous les conditions du corollaire, tout ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique est lisse. La démonstration de ce fait est rejetée en appendice.

ILLUSTRATION DU THEOREME DE SIERPINSKI.

Comme la situation est assez compliquée, nous allons déduire du théorème 1, avant de le démontrer, les théorèmes de capacitabilité de CHOQUET, pour des ensembles "boréliens". Bien entendu, on peut en déduire par projection les théorèmes analogues pour les ensembles analytiques, si on le veut à tout prix : après tout, pour avoir les théorèmes pour les ensembles analytiques, il suffit de les avoir pour des ensembles du type $\sigma\delta$ et de projeter.

1) CAS TOPOLOGIQUE.

Soit E un espace localement compact à base dénombrable, et soit $\underline{\underline{E}}$ le pavage formé par les parties compactes. Soit d'autre-part I une capacité de Choquet descendant sur les compacts (si K est l'intersection d'une suite

(*) "m" = "monotone"; "d" = "dénombrable"; "f" = "fini".

décroissante (K_n) de compacts , $I(K) = \inf I(K_n)$) . Nous allons montrer que tout borélien de E est capacitable, soit : si B est un borélien, et si $I(B) > \epsilon$, il existe un compact K , contenu dans B , tel que $I(K) \geq \epsilon$. Comme E est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$, on se ramène tout de suite au cas où E est lui-même compact.

1°) Nous prendrons pour capacitance la classe des parties A telles que $I(A) > \epsilon$,

2°) si (A_n) est une suite décroissante, A sera une enveloppe si $A \supset \bigcap_n \overline{A}_n$. Comme la classe des boréliens est égale à la classe stabilisée de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d , \cap d)$, tout borélien est lisse : en effet, tout compact est compatible avec le rabotage identique. Soit alors (f_n) un rabotage compatible avec B et posons $P_1 = B$, $P_2 = f_1(B), \ldots, P_{n+1} = f_n(P_1, \ldots, P_n)$, ... La suite (P_n) est rabotée et son premier terme est inclus dans B . Donc B contient $\bigcap_n \overline{P}_n$, qui est compact . Comme I descend sur les compacts et que $I(P_n) > \epsilon$ pour tout n , on a $I(\bigcap \overline{P}_n) \geq \epsilon$, et le théorème est établi.

2) <u>CAS ABSTRAIT</u>.

Ici, E est un ensemble quelconque, $\underline{\underline{E}}$ un pavage sur E , stable pour $(\cup f , \cap f)$, et I une capacité descendant bien sur $\underline{\underline{E}}$ (si F est l'intersection d'une suite décroissante (F_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, $I(F) = \inf I(F_n)$) . Nous allons montrer que tout élément de la classe stabilisée $\underline{\underline{F}}$ de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d , \cap d)$ est capacitable : si $F \in \underline{\underline{F}}$, et si $I(F) > \epsilon$, il existe $G \in \underline{\underline{E}}_\delta$, contenu dans F , tel que $I(G) \geq \epsilon$.

1°) Nous prendrons pour capacitance la classe des parties A telles que $I(A) > \epsilon$, 2°) si (A_n) est une suite décroissante, A est une enveloppe s'il existe une suite décroissante (B_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cup \{E\}$ telle que l'on ait $A_n \subset B_n$ pour tout n et que $A \supset \bigcap_n B_n$.

Tout élément de $\underline{\underline{F}}$ est lisse : en effet, tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est compatible avec le rabotage identique. Soit alors (f_n) un rabotage compatible avec F et posons comme ci-dessus : $P_1 = F$, $P_2 = f_1(P_1)$, ... , $P_{n+1} = f_n(P_1, \dots, P_n)$, ... La suite (P_n) est rabotée et son premier terme est inclus dans F : F est donc une enveloppe de (P_n) . Il existe donc une suite décroissante (G_n) d'éléments de $\underline{\underline{E}} \cup \{E\}$ telle que $I(G_n) > \epsilon$ pour tout n et que $F \supset \bigcap_n G_n$. Si $G_n = E$ pour tout n , $E = F$ est une $\underline{\underline{E}}_\sigma$ et est donc capacitable. Sinon, les G_n appartiennent à $\underline{\underline{E}}$ à partir d'un certain rang, et donc $I(\bigcap_n G_n) \geq \epsilon$. Donc F est capacitable.

DEMONSTRATION DU THEOREME DE SIERPINSKI.

a) Soit (A^k) une suite croissante d'ensembles lisses, et pour tout k , soit $F^k = (f_n^k)$ un rabotage compatible avec A^k . Soient d'autre-part A la réunion des A^k et $P_1, \dots, P_n$ des sous-ensembles de E . Nous posons alors

si $A \cap P_1 \notin \underline{\underline{C}}$ $\qquad f_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = P_n$

si $A \cap P_1 \in \underline{\underline{C}}$ $\qquad f_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = f_n^q(A^q \cap P_1, P_2, \dots, P_n)$ où q

est le plus petit entier k tel que $A^k \cap P_1 \in \underline{\underline{C}}$ (un tel entier existe d'après la définition d'une capacitance). La suite $F = (f_n)$ ainsi définie est évidemment un rabotage, et ce rabotage est compatible avec A . En effet, si $A \notin \underline{\underline{C}}$, c'est trivial ; si $A \in \underline{\underline{C}}$, soit (P_n) une suite F-rabotée telle que $P_1 \subset A$.

On a alors, puisque $A \cap P_1 \in \underline{\underline{C}}$,

$$f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = f_n^q(A^q \cap P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

où q est défini comme ci-dessus. Mais alors, la suite $A^q \cap P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ est F^q-rabotée, et son premier terme est contenu dans A^q. Comme A^q et F^q sont compatibles, A^q (et donc A) est une enveloppe de cette suite, donc aussi de la suite $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ qui ne diffère de la première que par un terme. Donc A est lisse.

b) Soit (A^k) une suite d'ensembles lisses, et, pour tout k, soit $F^k = (f_n^k)$ un rabotage compatible avec A^k. Soit d'autre-part A l'intersection des A^k. Nous allons montrer que A est lisse.

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit d'une manière unique $(2q_n - 1)2^{p_n - 1}$, où p_n et q_n sont des entiers ≥ 1. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des sous-ensembles de E. Nous posons :

$$f_n(P_1, P_2, \ldots, P_n) = f_{q_n}^{p_n}(P_{2^{p_n - 1}}, P_{3.2^{p_n - 1}}, P_{5.2^{p_n - 1}}, \ldots, P_{(2q_n - 1).2^{p_n - 1}}) .$$

On notera que le dernier indice est égal à n : il en résulte aussitôt que la suite $F = (f_n)$ est un rabotage. Nous allons montrer qu'il est compatible avec A. Si $A \notin \underline{\underline{C}}$, c'est trivial. Si $A \in \underline{\underline{C}}$, soit (P_n) une suite F-rabotée telle que $P_1 \subset A$. Les ensembles A^k appartiennent alors à $\underline{\underline{C}}$, et P_1 est contenu dans tous les A^k. Pour montrer que A est une enveloppe de (P_n), il suffit de montrer que A^k est une enveloppe de (P_n) pour tout k.

Or, posons :

$$Q_n = P_{(2n-1).2^{k-1}} \quad .$$

Nous avons $Q_1 \subset P_1 \subset A \subset A^k$: nous allons montrer que <u>la suite</u> (Q_n) <u>est</u> F^k-<u>rabotée</u> . Comme A^k et F^k sont compatibles, cela entraînera que A^k est une enveloppe de (Q_n) , et donc de (P_n) , puisque (Q_n) est une suite extraite de (P_n) .

Comme les Q_n appartiennent à $\underline{\underline{C}}$, tout revient à montrer que

$$Q_{n+1} \subset f_n^k(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \qquad \text{pour tout } n$$

ou encore, en revenant à la définition des Q_i , que

$$P_{(2n+1).2^{k-1}} \subset f_n^k(P_{1.2^{k-1}}, P_{3.2^{k-1}}, \ldots, P_{(2n-1).2^{k-1}}).$$

mais cela résulte du fait que la suite (P_n) est F-rabotée, et que le second membre contient donc $P_{1+(2n-1).2^{k-1}}$, qui contient le premier membre. Donc A est lisse.

<u>Remarque</u>.

Au cours de la démonstration, nous avons montré ceci : soient $\underline{\underline{E}}$ une classe d'ensembles lisses et $\underline{\underline{F}}$ une classe contenant $\underline{\underline{E}}$, stable pour $(\cap f)$. Supposons que, pour tout élément A de $\underline{\underline{E}}$, il existe un rabotage (f_n) , compatible avec A , tel que chaque f_n envoie $\underline{\underline{F}}^n$ dans $\underline{\underline{F}}$: alors, il en est de même pour tout élément de la classe stabilisée de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup md , \cap d)$.

Dans toutes les applications que nous donnons, la situation est la suivante : $\underline{\underline{E}}$ est stable pour $(\cup f , \cap f)$ et tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est compatible avec le rabotage identique. Soit $\underline{\underline{F}}$ la classe stabilisée de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d , \cap d)$. Pour tout élément A de $\underline{\underline{F}}$, il existe alors un rabotage (f_n) , compatible avec A , tel que chaque f_n envoie $\underline{\underline{F}}^n$ dans $\underline{\underline{F}}$. Nous utiliserons cette remarque au paragraphe suivant.

§ 2. APPLICATIONS A LA THEORIE DES PROCESSUS.

Dans tout ce paragraphe, $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ désignera un espace probabilisé complet. Si A est une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous désignerons par $\pi(A)$ sa projection sur Ω , et par $\gamma(A)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la coupe $A(\omega)$ soit non-dénombrable. On sait que $\pi(A)$ et $\gamma(A)$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}$ si A est indistinguable d'une partie mesurable (corollaire du Th. 1^a du premier exposé). Nous rappelons d'autre-part qu'une telle partie A est dite <u>épaisse</u> si les ensembles $\pi(A)$ et $\gamma(A)$ sont P - p.s. égaux.

Une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est dite <u>fermée</u> (resp. <u>parfaite</u>) si ses coupes sont fermées (resp. parfaites) dans $\mathbb{R}_+$. On définit de manière évidente l'adhérence $\bar{A}$ d'une partie A de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, qui est mesurable si A est mesurable (cf. [3] - 216) .

THEOREME 2.

<u>Soit</u> A <u>une partie épaisse de</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. <u>Il existe un ensemble parfait mesurable</u> B , <u>contenu dans</u> A , <u>dont la projection sur</u> Ω <u>est p.s. égale à celle de</u> A (<u>soit encore</u> $\pi(A) = \gamma(A) = \gamma(B) = \pi(B)$ P - p.s.) .

Supposons que l'on ait établi l'existence d'un ensemble parfait mesurable B_1 contenu dans A, tel que $P[\pi(B_1)] \geq P[\pi(A)]/2$. Soit alors $A_1 = A$ et définissons par récurrence les ensembles épais A_n et les ensembles parfaits mesurables B_n en posant $A_n = A_{n-1} - (\mathbb{R}_+ \times \pi(B_{n-1}))$ et en prenant pour B_n un ensemble parfait mesurable, contenu dans A_n, tel que $P[\pi(B_n)] \geq P[\pi(A_n)]/2$. Comme les ensembles $\pi(B_n)$ sont disjoints, il suffira de poser $B = \bigcup_n B_n$. Nous nous sommes donc ramenés à démontrer le théorème suivant :

__THEOREME 2^a.__

__Soit__ A __une partie épaisse de__ $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ __et soit__ ϵ __un nombre tel que__ $0 \leq \epsilon < P[\gamma(A)]$. __Il existe un ensemble parfait mesurable__ B, __contenu dans__ A, __tel que__ $P[\gamma(B)] \geq \epsilon$.

Pour des raisons de commodité, nous allons travailler sur $[0,1] \times \Omega$ au lieu de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Il est clair qu'on ne perd ainsi aucune généralité. Nous supposerons aussi que A est une partie __mesurable__ de $[0,1] \times \Omega$.

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

__LEMME.__

__Soit__ $\underline{\underline{M}}$ __la classe des parties mesurables de__ $[0,1] \times \Omega$. __Il existe deux applications__ Φ_0 __et__ Φ_1 __de__ $\underline{\underline{M}}$ __dans__ $\underline{\underline{M}}$ __telles que :__

a) __pour tout__ $M \in \underline{\underline{M}}$, $\Phi_0(M)$ __et__ $\Phi_1(M)$ __ont leurs adhérences disjointes,__

b) __pour tout__ $M \in \underline{\underline{M}}$, __on a__ : $\gamma[\Phi_0(M)] = \gamma[\Phi_1(M)] = \gamma(M)$.

DEMONSTRATION.

Soit $M \in \underline{\underline{M}}$, et posons, si $\omega \in \gamma(M)$

$$U(\omega) = \inf \{s \in [0,1] : M(\omega) \cap [0,s] \text{ est non-dénombrable } \}$$

$$V(\omega) = \sup \{t \in [0,1] : M(\omega) \cap [t,1] \text{ est non-dénombrable } \}$$

et $U(\omega) = V(\omega) = 0$ si $\omega \notin \gamma(M)$. Les fonctions ainsi définies sur Ω sont des variables aléatoires (cf. prop. 1 du premier exposé). Soit alors

$$W_0 = U + (V - U)/3 \qquad\qquad W_1 = U + 2(V - U)/3 \quad .$$

Comme on a $U < V$ sur $\gamma(M)$, il suffit de prendre :

$$\Phi_0(M) = M \cap [U , W_0[\qquad\qquad \Phi_1(M) = M \cap]W_1 , V] \quad .$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 2^a :

Nous utiliserons les notations suivantes : D sera l'ensemble des mots dyadiques engendrés par 0 et 1 , D_n celui des mots de longueur n . Si $m \in D$, nous noterons $m0$ (resp. $m1$) le mot obtenu en ajoutant 0 (resp. 1) au bout de m . Les mots de longueur $1, \dots, n-1, n$ formés des premiers termes de $m \in D_n$ sont notés $m_1, \dots, m_{n-1}, m_n = m$. Nous adoptons des conventions analogues pour l'ensemble $D^\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des mots dyadiques infinis. Si m est un mot fini, μ un mot infini, la notation $m \prec \mu$ signifie que μ commence par le mot m .

Nous noterons d'autre-part P^* la probabilité extérieure associée à P . Nous allons appliquer le théorème 1 à l'ensemble $E = [0,1] \times \Omega$, muni du pavage stable pour $(\cup f , \cap f)$ $\underline{\underline{E}}$ formé par les ensembles mesurables fermés.

a) la capacitance $\underline{\underline{C}}$ est la classe des parties C de E telles que $P^*[\gamma(C)] > \epsilon$ (on vérifie immédiatement que cela définit bien une capacitance),

b) si (A_n) est une suite décroissante de parties de E , $H[(A_n)]$ est formée des parties de E qui contiennent $\bigcap_n \overline{A}_n$.

Comme la classe $\underline{\underline{M}}$ des parties mesurables est la classe stabilisée de $\underline{\underline{E}}$ pour $(\cup d , \cap d)$ tout élément de $\underline{\underline{M}}$ est lisse : en effet, tout élément de $\underline{\underline{E}}$ est compatible avec le rabotage identique. Soit (f_n) un rabotage compatible avec A tel que chaque f_n envoie $\underline{\underline{M}}^n$ dans $\underline{\underline{M}}$ (cf. la remarque finale du § 1) , et posons, si Φ_0 et Φ_1 sont les applications du lemme précédent :

$$A_\emptyset = A$$

$A_0 = \Phi_0(A)$ $\qquad$ $A_1 = \Phi_1(A)$

$A_{00} = \Phi_0[f_1(A_0)]$ $\qquad$ $A_{10} = \Phi_0[f_1(A_1)]$

$A_{01} = \Phi_1[f_1(A_0)]$ $\qquad$ $A_{11} = \Phi_1[f_1(A_1)]$

...... $\qquad$ ......

Soit, d'une manière générale, si m est un mot de longueur k ,

$$A_{m0} = \Phi_0[f_k(A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k})]$$
$$A_{m1} = \Phi_1[f_k(A_{m_1}, A_{m_2}, \dots, A_{m_k})]$$

et nous posons maintenant, pour tout mot dyadique infini μ :

$$F_\mu = \bigcap_{m<\mu} \overline{A}_m \qquad\qquad F = \bigcup_\mu F_\mu \quad .$$

Nous allons montrer que F est un ensemble mesurable, fermé, contenu dans A et tel que $P[\gamma(F)] \geq \epsilon$. Il suffira alors de prendre pour B le noyau parfait de F (cf. corollaire de la prop. 2 du premier exposé).

1°) Il résulte aussitôt du lemme (et de la définition des rabotages) que tous les ensembles A_m appartiennent à $\underline{\underline{C}} \cap \underline{\underline{M}}$.

2°) Il est alors facile de voir que la suite $(A_{\mu_n})_{n\geq 1}$ est une suite rabotée, pour tout mot dyadique infini μ . Comme A contient le premier terme de la suite, le fait que A est lisse entraîne que A contient $\bigcap_n \overline{A}_{\mu_n}$. Ainsi, A <u>contient</u> F_μ <u>pour tout mot infini</u> μ , et donc A <u>contient</u> F .

3°) Pour tout k , l'ensemble D_k des mots de longueur k est fini. Posons $F_k = \bigcup_{m\in D_k} \overline{A}_m$: c'est un ensemble mesurable, fermé. D'autre-part, $F = \bigcap_k F_k$ (formule de distributivité des réunions et et intersections) : donc F <u>est aussi un ensemble mesurable fermé</u>.

4°) Nous allons montrer que $P^*[\gamma(F)] \geq \epsilon$, ce qui achèvera la démonstration du théorème. Tout d'abord, les ensembles $\overline{A}_{\mu_n}$, pour $\mu \in D^\infty$, forment une suite décroissante et ont leurs coupes compactes. Nous avons donc :

$$\pi(F_\mu) = \bigcap_{m<\mu} \pi(\overline{A}_m)$$

donc le premier membre a une probabilité $\geq \epsilon$, puisque les $A_{\mu_n} \in \underline{\underline{C}}$. D'autre-part, nous savons que $\overline{A}_{m0}$ et $\overline{A}_{m1}$ sont disjoints pour tout mot m (cf. le lemme). Il en résulte que $F_\mu \cap F_{\mu'} = \emptyset$ si $\mu \neq \mu'$. Comme D^∞ n'est pas dénombrable, le corollaire 1 du théorème 3 du premier exposé entraîne que

$$P[\gamma(F)] \geq \epsilon$$

et le théorème est démontré.

MEYER m'a signalé une conséquence intéressante de cette démonstration, qui permet d'obtenir des résultats analogues à ceux obtenus grâce au théorème de L.C. YOUNG (cf. [1] - Th. 3) : remarquons que le diamètre de $F_m(\omega)$ est au plus égal à $(1/3)^{|m|}$, où $|m|$ est la longueur du mot m . Il en résulte que la coupe de F_μ par ω comporte au plus un point, quel que soit $\mu \in D^\infty$. Si nous posons pour toute partie mesurable K de $[0,1] \times \Omega$:

$$\xi_\mu(K) = P[\pi(K \cap F_\mu)]$$

nous obtenons une mesure sur $[0,1] \times \Omega$, portée par F_μ . Si les coupes de K sont fermées, nous avons :

$$\xi_\mu(K) = \lim P[\pi(K \cap \overline{A}_{\mu_n})] \qquad \text{quand } n \to \infty \quad .$$

Il en résulte aussitôt que ξ_μ dépend mesurablement de μ . Munissons alors $D^\infty = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la mesure θ du "jeu de pile ou face", et posons :

$$\xi = \int_{D^\infty} \xi_\mu \, \theta(d\mu) \quad .$$

Nous obtenons ainsi une mesure sur $[0,1] \times \Omega$, portée par F , de masse ≤ 1 , et dont la projection sur Ω est absolument continue par rapport à P .

Soit G un graphe de variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$: G est la réunion des ensembles $G \cap F_\mu$ disjoints. D'après le corollaire 1 du th. 3 du premier exposé, et le fait que $\gamma(G)$ **est** vide, l'ensemble des μ tels que la projection de $G \cap F_\mu$ ne soit pas négligeable est dénombrable, et donc

θ-négligeable. Donc $\xi(G) = 0$, et ξ ne charge pas les ensembles minces.

Soit Q la projection de ξ sur Ω . Comme on a, pour tout $H \in \underline{\underline{F}}$, $\xi_\mu([0,1] \times H) \leq P(H)$ on a $Q \leq P$. D'autre-part, prenons $H = \gamma(F)$; d'après le th. 3 du premier exposé, on a $F_\mu \subset [0,1] \times H$, à un ensemble de projection négligeable près, sauf pour des μ qui forment un ensemble dénombrable. Par conséquent, on a $\xi_\mu([0,1] \times H) = P(H)$ pour θ-presque tout μ , et enfin $Q(H) = P(H)$. Les mesures Q et P coïncident donc sur H . Enfin, on peut réappliquer le découpage exécuté après l'énoncé du th. 2 . Nous revenons à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ pour l'énoncé :

THEOREME 3.

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Il existe une mesure ξ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, de masse ≤ 1 , possèdent les propriétés suivantes :

1°) ξ est portée par un ensemble mesurable, fermé, contenu dans $\mathbb{R}_+ \times \gamma(A)$

2°) ξ ne charge pas les ensembles minces

3°) la projection Q de ξ sur Ω est majorée par P , et coïncide avec P sur $\gamma(A)$.

On peut désintégrer la mesure ξ par rapport à P pour obtenir un processus croissant, continu et borné. Plus précisément, on a le résultat suivant, si on munit l'espace $(\Omega , \underline{\underline{F}} , P)$ d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$ de tribus, vérifiant les conditions habituelles (l'énoncé dans [1]-prop. 1 est incorrect) :

PROPOSITION.

Soit A un ensemble bien-mesurable. Il existe un processus croissant (C_t) prévisible, continu et borné, tel que A porte (C_t) et que $\gamma(A)$ soit P - p.s. égal à l'ensemble $\{\omega : \exists\, t \; C(t,\omega) > 0\}$.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de cette proposition : elle repose essentiellement sur une méthode de projection due à C. DOLEANS (cf. [2]) .

§ 3. APPLICATION A LA THEORIE DES PROCESSUS DE MARKOV.

Nous appliquons le théorème précédent aux processus de Markov, avec les notations de l'exposé 1 , th. 5 .

THEOREME 4.

Soit F un ensemble presque-borélien, non semi-polaire. Alors F contient un compact K non semi-polaire (et donc un ensemble presque-borélien, finement parfait : cf. [4] - XV - T. 67).

DEMONSTRATION.

λ désignant une mesure de référence de masse 1 , appliquons le th. 3 en prenant $P = P^{\lambda}$ et $A = \{(t,\omega) : X_t(\omega) \in F\}$ - ensemble qui n'est pas mince du fait que F n'est pas semi-polaire (exposé 1, th. 5) . Nous obtenons une mesure ξ non nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, portée par A , et ne chargeant pas les ensembles minces. Posons maintenant pour tout $H \in \underline{\underline{B}}_u(E)$:

$$\nu(H) = \int I_H \circ X_t(\omega)\, \xi(dt , d\omega) \quad .$$

Cette mesure est non nulle, portée par F , et ne charge pas les ensembles semi-polaires. Soit K un compact contenu dans F tel que $\nu(K) > 0$: K ne peut être semi-polaire, et le th. 4 est établi.

§ 4. APPENDICE : RABOTAGES ET ENSEMBLES ANALYTIQUES.

Cet appendice est consacré à la démonstration du théorème sur les rabotages pour les ensembles analytiques. Comme le théorème 1 permet de faire l'économie de la théorie des ensembles analytiques abstraits - tout au moins pour la théorie des processus - nous déconseillons vivement la lecture de ce paragraphe ! Pour le lecteur intéressé par les ensembles analytiques, nous nous réfèrons implicitement à l'exposé de la théorie fait par MEYER (cf. [5]).

PROPOSITION.

Soit $\underline{\underline{E}}$ une classe d'ensembles lisses, stable pour $(\cup f , \cap f)$. Tout ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique est lisse.

DEMONSTRATION.

On se donne une fois pour toute un ensemble H , $\underline{\underline{E}}$-analytique. Il existe alors un ensemble pavé auxiliaire $(K , \underline{\underline{K}})$ vérifiant, si $p(.)$ est la projection de $K \times E$ sur E :

a) $\underline{\underline{K}}$ est un pavage semi-compact, stable pour $(\cup f , \cap f)$

b) il existe une partie $H' \in (\underline{\underline{K}} \times \underline{\underline{E}})_{\sigma\delta}$ telle que $H = p(H')$.

Nous supposerons d'autre-part que $K \in \underline{\underline{K}}_\sigma$: cette hypothèse, non classique, ne restreint évidemment pas la généralité. Comme d'ordinaire, nous allons remonter le problème sur $K \times E$. Nous posons :

a) $E' = K \times E$

b) $\underline{\underline{E}}'$ la classe stabilisée de $\underline{\underline{K}} \times \underline{\underline{E}}$ pour $(\cup f, \cap f)$

c) $\underline{\underline{C}}'$ la capacitance formée par les parties A' de E' telles que $p(A') \in \underline{\underline{C}}$

d) les enveloppes : soit (A'_n) une suite décroissante de parties de E'.

Une partie A' de E' est une enveloppe de la suite s'il contient un ensemble $B' \in \underline{\underline{E}}'_\delta$ tel que $p(B')$ soit une enveloppe de la suite $(p(A'_n))$ de parties de E.

Comme la projection de l'intersection d'une suite décroissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}'_\delta$ est égale à l'intersection de leurs projections, il est clair que l'on définit ainsi des enveloppes.

D'après le corollaire du théorème 1, pour montrer que H' est lisse (dans E'), il suffit de montrer que tout élément de $\underline{\underline{E}}'$ est lisse. Soit alors $A' \in E'$; nous allons montrer qu'il existe un rabotage compatible avec A. La projection A de A' appartient à $\underline{\underline{E}}$: elle est donc lisse dans E. Soit $F = (f_n)$ un rabotage compatible avec A et posons, si $P'_1, \ldots, P'_n$ sont des parties de E',

$$f'_n(P'_1, \ldots, P'_n) = P'_n \cap (K \times f_n(P_1, \ldots, P_n))$$

où $P_i = p(P'_i)$. Comme $f_n(P_1, \ldots, P_n) \subset P_n$, il est clair que la projection de $f'_n(P'_1, \ldots, P'_n)$ est égale à $f_n(P_1, \ldots, P_n)$; il en résulte immédiatement que la suite $F' = (f'_n)$ est un rabotage sur E' . Montrons qu'il est compatible avec A' : soit (P'_n) une suite F'-rabotée telle que $P'_1 \subset A'$. La suite (P_n) , où $P_n = (p(P'_n)$, est alors une suite F-rabotée telle que $P_1 \subset A$: en effet, $P_n \in \underline{\underline{C}}$ pour tout n , et on a

$$P_{n+1} \subset p(f'_n(P'_1, \ldots, P'_n)) = f_n(P_1, \ldots, P_n) \quad .$$

Donc $A = p(A')$ est une enveloppe de la suite $(P_n) = (p(P'_n))$. Comme $A' \in \underline{\underline{E}}'$, cela entraîne que A' est une enveloppe de (P'_n) . Donc A' est lisse.

L'ensemble H' , dont la projection est égale à l'ensemble $\underline{\underline{E}}$-analytique H , est donc lisse en vertu du théorème 1, puisque $H' \in \underline{\underline{E}}'_{\sigma\delta}$. Soit $F' = (f'_n)$ un rabotage compatible avec H' . Nous allons construire un rabotage compatible avec H . Si $P_1, \ldots, P_n$ sont des parties de E , nous définissons par récurrence les ensembles $Q'_1, \ldots, Q'_n$ en posant :

$$Q'_1 = H' \cap (K \times P_1)$$

$$Q'_{k+1} = H' \cap (K \times P_{k+1}) \cap f'_k(Q'_1, \ldots, Q'_k) \qquad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n-1 \quad .$$

Nous poserons alors

$$P'_1 = Q'_1 \qquad \text{si} \qquad P_1 \subset H$$

$$P'_{k+1} = Q'_{k+1} \qquad \text{si} \qquad P_{k+1} \subset H \cap p(f'_k(Q'_1, \ldots, Q'_k))$$

et

$$P'_1 = (K \times P_1) \quad \text{si} \qquad P_1 \not\subset H$$

$$P'_{k+1} = (K \times P_{k+1}) \quad \text{si} \quad P_{k+1} \not\subset H \cap p(f'_k(Q'_1, \ldots, Q'_k)) \quad .$$

Il est clair que $F = (f_n)$ est un rabotage. Nous allons montrer que F est compatible avec H : soit (P_n) une suite F-rabotée telle que $P_1 \subset H$. Si les (P'_i) et (Q'_i) sont définis comme ci-dessus, on a $P'_1 = Q'_1 \subset H'$; supposons démontré que $P'_n = Q'_n$ pour $n \leq k$. Alors $P_{k+1} \subset f_k(P_1, \ldots, P_k) = p(f'_k(P'_1, \ldots, P'_k)) = p(f'_k(Q'_1, \ldots, Q'_k))$ par hypothèse, et donc $P'_{k+1} = Q'_{k+1}$ puisque $P_{k+1} \subset P_1 \subset H$. Comme $p(P'_i) = P_i$ pour tout i, il est alors clair que la suite $(P'_n) = (Q'_n)$ est une suite F'-rabotée telle que $P'_1 \subset H'$. H' est donc une enveloppe de la suite (P'_n), et cela entraîne que $H = p(H')$ est une enveloppe de la suite $(P_n) = (p(P'_n))$. Donc H est lisse.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DELLACHERIE (C.) Comptes-Rendus, 266, série A, 1968, p. 1258-1261.

[2] DOLEANS (C.) Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de la classe (D) (Z. für W. 9, 309-314 (1968).

[3] MEYER (P.A.) Guide détaillé de la théorie générale des processus (Séminaire de Probabilités II, Lecture Notes in Mathematics n° 51, Springer, Heidelberg 1968).

[4] MEYER (P.A.) Processus de Markov (Lecture Notes in Mathematics n° 26, Springer, Heidelberg 1967).

[5] MEYER (P.A.) Probabilités et potentiel (Hermann, Paris ; Blaisdell , Boston 1966).

[6] SION (M.) On capacitability and measurability (Ann. Inst. Fourier 13, 1963, p. 88 - 99).

[7] SIERPINSKI (W.) Sur la puissance des ensembles mesurables (B) (Fund. Math. 5, 1924, p. 166) .

* *
*