SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GASTON GIROUX

Théorie des frontières dans les chaînes de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 75-110
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__75_0>

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

STRASBOURG

Séminaire de Probabilités

Théorie des frontières dans les chaînes de Markov

(par G. Giroux)

Cet exposé a pour but de donner une introduction à l'étude des solutions de l'équation: $P'_t = QP_t$, où (P_t) est un semi-groupe sous-markovien sur un espace dénombrable d'états, et Q est une matrice générateur infinitésimal.

Nous donnerons tout d'abord un aperçu sur les chaînes de Markov à temps continu , ayant un semi-groupe régulier pour fonction de transition; puis une brève introduction à la théorie des frontières, telle que développée par Doob[2] et Hunt[1] .

Nous pourrons alors par la suite traiter de la décomposition des solutions. Nous énoncerons le théorème qui permet la décomposition en lois de sortie par rapport à la solution minimale et en lois d'entrée par rapport à la solution donnée, tel que démontré dans Chung[2] . C'est-à-dire que les lois de sortie sont obtenues comme dérivées de certaines probabilités dépendant du temps, et les lois d'entrée par un passage à la limite sur des espérances conditionnelles dépendant du début du processus.

Notons cependant que sous des hypothèses plus fortes, K.L.Chung a démontré un théorème de décomposition en lois de sortie et d'entrée par rapport à la solution minimale.

Les premiers résultats remontent à Feller[1] . La décomposition a été donnée, à l'aide de méthodes analytiques, par Reuter[1,2,3] , et Williams[1] .

Nous nous sommes servis de l'article de Neveu[1] , pour énoncer les résultats relatifs aux lois de sortie et d'entrée.

§1. Semi-groupes, lois d'entrée et de sortie

Définition 1.: Semi-groupe sous-markovien régulier

Un semi-groupe sous-markovien (P_t) sur E, un ensemble dénombrable, est dit régulier si pour tout $i \in E$: $\lim\limits_{t\downarrow 0} p_t(i,i) = 1$

Par la suite, tous les semi-groupes seront réguliers.

Un semi-groupe sous-markovien régulier possède des propriétés en apparence plus fortes; en voici quelques-unes:

Théorème 1.1

1) pour tout $i \in E$, $p_t(i,j)$ est uniformément continue sur R_+, uniformément en j.

2) pour tout $i,j \in E$, les limites

$$q_i = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t}$$

$$q_{ij} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} \qquad j \neq i$$

existent et satisfont:

a) $0 \leq q_i \leq \infty$

b) $0 \leq q_{ij} < \infty$

c) $\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$

Démonstration

On a: $p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j) = \sum\limits_{k\neq i} p_h(i,k)p_t(k,j) - (1 - p_h(i,i))p_t(i,j)$

d'où: $-(1 - p_h(i,i)) \leq p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j) \leq \sum\limits_{k \neq i} p_h(i,k) \leq 1 - p_h(i,i)$

et on a alors l'inégalité: $|p_t(i,j) - p_s(i,j)| \leq 1 - p_{|t-s|}(i,i)$

ce qui implique 1)

on a $p_t(i,i) \geq [p_{t/n}(i,i)]^n > 0$, pour n assez grand

de même $p_{t+s}(i,i) \geq p_t(i,i)p_s(i,i)$

alors $u(t) = -\log p_t(i,i)$ est une fonction sous-additive à valeurs dans R_+

et $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(t) = 0$

d'où $0 \leq \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{u(t)}{t} = \sup\limits_{t>0} \frac{u(t)}{t} \leq \infty$

et $q_i = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1 - e^{-u(t)}}{u(t)} \frac{u(t)}{t} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{u(t)}{t}$ existe

pour j fixé on pose:

$$f_t^{(0)}(i,k) = \delta_{ik}$$

$$f_t^{(1)}(j,k) = 0 \quad , \quad f_t^{(1)}(i,k) = p_t(i,k) \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$f_t^{(n)}(i,k) = \sum_h f_t^{(n-1)}(i,h) f_t^{(1)}(h,k) \quad , \quad n \geq 1$$

on a alors pour $i \neq j$:

(A) $p_{mt}(i,j) = \sum\limits_{n=0}^{m-1} f_t^{(n)}(i,i)p_t(i,j)p_{(m-n-1)t}(j,j) + f_t^{(m)}(i,j)$

(B) $p_{mt}(i,i) = \sum\limits_{n=1}^{m-1} f_t^{(n)}(i,j)p_{(m-n)t}(j,i) + f_t^{(m)}(i,i)$

(C) $p_{mt}(i,j) = \sum\limits_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j)p_{(m-n)t}(j,j)$

mais on sait, par la régularité de P_t, que pour $i \neq j$ et $\varepsilon > 0$, il existe u

tel que: $p_s(i,j) < \varepsilon$, $p_s(j,i) < \varepsilon$, $p_s(i,i) > 1-\varepsilon$, $p_s(j,j) > 1-\varepsilon$, pour $s < u$

alors pour $mt < u$ on a par (C):

$$\sum_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j)(1 - \varepsilon) < \varepsilon$$

donc en prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a pour $mt < u$:

$$\sum_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j) < 1$$

alors par (B), on a pour $mt < u$

$$f_t^{(m)}(i,i) \geq p_{mt}(i,i) - \max_{1 \leq n \leq m} p_{(m-n)t}(j,i) > 1 - 2\varepsilon$$

d'où par (A), pour $mt < u$

$$p_{mt}(i,j) \geq \sum_{n=0}^{m-1} f_t^{(n)}(i,i) p_t(i,j) p_{(m-n-1)t}(j,j) \geq (1 - 3\varepsilon) \sum_{n=0}^{m-1} p_t(i,j)$$

et alors: $\dfrac{p_{mt}(i,j)}{mt} > (1 - 3\varepsilon) \dfrac{p_t(i,j)}{t}$

ce qui implique, en gardant mt fixe, que: $\underline{\lim}_{t \downarrow 0} \dfrac{p_t(i,j)}{t} < \infty$

il existe donc v tel que:

$$0 < v < u/2 \quad \text{et} \quad \frac{p_v(i,j)}{v} \leq \underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + \varepsilon$$

alors par 1) il existe δ satisfaisant $0 < \delta < v$ tel que:

$$\frac{p_t(i,j)}{t} < \underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + 2\varepsilon \quad , \quad \text{pour} \quad |t-v| < \delta$$

mais pour $0 < t < \delta$, il existe un entier m tel que: $v \leq mt < v+t < u$

alors on a:

$$(1 - 3\varepsilon) \frac{p_t(i,j)}{t} < \underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + 2\varepsilon \quad , \quad \text{pour} \quad 0 < t < \delta$$

d'où $q_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{p_t(i,j)}{t}$ existe et est finie

finalement par le lemme de Fatou on a: $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$

Définition 2.: Loi de sortie

Une famille $\{g_t\ ,\ t>0\}$ de fonctions positives sur E est appelée loi de sortie par rapport au semi-groupe P_t , si:

a) $P_t g_s = g_{t+s}$

b) il existe $T>0$ tel que: $\sup_i \int_0^T g_t(i)dt < \infty$

Remarques

1)l'inégalité de b) est vérifiée pour tout T, car

$$\int_0^{nT} g_t(i)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T g_{t+(k-1)T}dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \sum_j p_{(k-1)T}(i,j)g_t(j)dt \leq n\sup_i \int_0^T g_t(i)dt$$

2)on a: $0 \leq g_t(i) < \infty$, car par b) c'est vérifié pour tout i sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, mais comme par a) $g_{t+s}(i) \geq p_s(i,i)g_t(i)$, alors par la régularité de P_t , cet ensemble doit être vide.

Voici maintenant quelques propriétés utiles des lois de sortie:

Lemme 1.2

Si $\{g_t,\ t>0\}$ est une loi de sortie par rapport à P_t , alors pour tout $i \in E$ $g_t(i)$ est continue sur R_+ , et $g_o = \lim_{t\downarrow 0} g_t$ satisfait $0 \leq P_t g_o \leq g_t$ (*)

Démonstration

On a: $\underline{\lim}_{s\to t}\, g_{t+s}(i) = \underline{\lim}_{s\to t} \sum_j p_s(i,j)g_t(j)$

$$\geq g_{2t}(i) = \lim_{u\downarrow 0} \sum_j p_u(i,j)g_{2t-u}(j) \geq \underline{\lim}_{s\uparrow t}\, g_{t+s}(i) \geq \underline{\lim}_{s\to t}\, g_{t+s}(i)$$

d'où: (1) $g_t(i) = \underline{\lim}_{u\to t}\, g_u(i)$ pour $t>0$ et $i \in E$

(*) $a(t)$ définie pour $t>0$, est dite $\overline{\text{continue sur}}$ R_+
si: 1) $a(t)$ est continue sur R_+^*
2) $\lim_{t\downarrow 0} a(t)$ existe et est finie

d'autre part comme :

$$g_{t+s}(i) = p_{s-u}(i,i)g_{t+u}(i) \ , \quad \text{pour} \quad -t<u<s \ , \ s>0 \ , \ t\geq 0$$

on a: $\quad g_{t+s}(i) \geq \overline{\lim_{u\to t}}\, p_s(i,i)g_u(i)$

donc $\quad \underline{\lim_{u\downarrow t}}\, g_u(i) \geq \overline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) \geq \overline{\lim_{u\downarrow t}}\, g_u(i) \geq \underline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) = g_t(i)$

c'est-à-dire que la limite à droite g_t^+ existe pour $t\geq 0$ et satisfait:

(2) $\quad g_t^+(i) = \overline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) \geq g_t(i) \ , \quad t>0$

mais comme pour $t>0$ et $s>0$ $\ P_s g_t = P_{s-u} g_{t+u}$, on a $\ P_s g_t \geq P_s g_t^+$

alors $\quad 0 \leq p_s(i,i)\left[g_t^+(i) - g_t(i)\right] \leq P_s\left[g_t^+ - g_t\right](i) \leq 0$

et par la régularité de P_t , $\ g_t^+(i) = g_t(i)$ pour tout $i\in E$ et pour tout $t>0$

alors par (1) et (2), $g_t(i)$ est continue sur R_+ et g_0 existe

et de plus $\quad 0 \leq P_t g_0 \leq \lim_{u\downarrow 0} P_t g_u = \lim_{u\downarrow 0} g_{t+u} = g_t$

Lemme 1.3

Si $\{G_t \ , \ t>0\}$ est une famille de fonction positives sur E, telle que

$$G_{t+s} - G_t = P_t G_s$$

Alors pour tout $i\in E$, $G_t(i)$ possède une dérivée $g_t(i)$

et $\{g_t \ , \ t>0\}$ satisfait: $\ g_{t+s} = P_t g_s \quad$ et $\quad 0\leq g_t(i) < \infty$

Démonstration

Soit $\ g_t(i) = t^{-1}\sum_j \int_{\{s<t\}} p_{t-s}(i,j)dG_s(j) \quad , \quad t>0 \ , \ i\in E$

on a $\ g_t(i)\inf_{s<t} p_s(i,i) \leq t^{-1}\sum_j \int_{\{s<t\}} p_t(i,j)dG_s(j) = t^{-1}\int_{\{s<t\}} dG_{t+s}(i) < \infty$

alors par la régularité de P_t , $\ 0 \leq g_t(i) < \infty$

d'autre part pour B borélien contenu dans $(0,t-u)$, on a:

$$\sum_j \int_{B+u} p_{t-s}(i,j)dG_s(j) = \sum_j \int_B p_{t-(s+u)}(i,j)dG_{s+u}(j)$$

$$= \sum_j \sum_k \int_B p_{t-(s+u)}(i,j)p_u(j,k)dG_s(k)$$

$$= \sum_j \int_B p_{t-s}(i,j)dG_s(j)$$

alors par l'unicité de la mesure invariante on a:

$$\sum_j \int_B p_{t-s}(i,j)dG_s(j) = g_t(i)\int_B ds$$

ce qui donne en particulier $g_{t+s} = P_t g_s$

soit $B = (t-u,t]$, alors intégrant sur $(u,u+v]$ on a:

$$u\int_{(u,u+v]} g_t(i)dt = \sum_j \int_{(u,u+v]} \int_{(0,u]} p_{u-s}(i,j)dG_{t-u+s}(j)dt$$

$$= \sum_j \int_{(0,u]} \int_{(0,v]} p_{u-s}(i,j)dG_{t+s}(j)dt$$

$$= \sum_j \int_{(0,u]} p_{u-s}(i,j)\left[\int_{(s,s+v]} dG_t(j)\right]ds$$

$$= \int_{(0,u]} ds \int_{(u,u+v]} dG_t(i) = u\int_{(u,u+v]} dG_t(i)$$

donc $g_t(i)$ est la dérivée de $G_t(i)$

de plus $g_t(i)$ est continue, puisque dans la démonstration du lemme 1.2 on ne se sert pas de la propriété b) des lois de sortie, sauf pour affirmer que $g_t<\infty$

On peut trouver d'autres démonstrations de ces deux lemmes dans Chung[4]

Proposition 1.4

La transformée de Laplace: $\hat{g}_x = \int_0^\infty e^{-xt} g_t dt$, d'une loi de sortie, définit une famille $\{\hat{g}_x \,,\, x > 0\}$ de fonctions positives bornées sur Ξ, jouissant des propriétés suivantes:

a) $\hat{g}_y = [I + (x-y)\hat{P}_y]\hat{g}_x$

b) $e^{-xs}P_s\hat{g}_x \leq \hat{g}_x$

Réciproquement:

1) toute famille $\{\hat{g}_x \,, x > 0\}$ de fonctions positives bornées sur Ξ vérifiant a), est la transformée de Laplace d'une loi de sortie unique.

2) à toute fonction positive bornée h sur Ξ qui vérifie: $e^{-xs}P_s h \leq h$ pour un $x > 0$ et pour tout $s > 0$, correspond une loi de sortie unique $\{g_t \,,\, t > 0\}$ telle que: $h = \int_0^\infty e^{-xt} g_t dt$

Démonstration

$$\hat{g}_x(i) = \int_0^\infty e^{-xt} g_t(i)dt = \sum_{n\geq 0}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-xt} g_t(i)dt = \sum_{n\geq 0}\int_0^T e^{-x(t+nT)} g_{t+nT}(i)dt$$

$$= \sum_{n\geq 0}\int_0^T e^{-x(t+nT)} P_{nT} g_t(i)dt$$

$$\leq (\sup_j \int_0^T g_t(j)dt)\sum_{n\geq 0} e^{-xnT}$$

donc: $\sup_i \hat{g}_x(i) \leq (\sup_i \int_0^T g_t(i)dt)(1 - e^{-xT})^{-1}$

d'où pour $x > 0$, $\hat{g}_x$ est bornée

a) résulte de:

$$\hat{P}_y\hat{g}_x = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-yt} e^{-xs} P_t g_s dsdt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-yt} e^{-xs} g_{s+t} dsdt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y(t-s)} e^{-xs} g_t dsdt$$

$$= (x-y)^{-1}\int_0^\infty (e^{-yt} - e^{-xt}) g_t dt = (x-y)^{-1}(\hat{g}_y - \hat{g}_x)$$

b) résulte de $e^{-xs}P_s\hat{g}_x = \int_s^\infty e^{-xt} g_t \leq \hat{g}_x$

réciproquement on a par a): $(-\frac{d}{dx})^n\hat{g}_x = \hat{P}_x^n\hat{g}_x \geq 0$

alors par le théorème de Bernstein sur les fonctions complètement monotones (c.f. Meyer[1, XI-T40]), il existe une famille $\{\mu(\cdot;i),\ i\in E\}$ de mesures positives sur R_+ telles que:

$$\hat{g}_x(i) = \int_0^\infty e^{-xt}\mu(dt;i) \qquad x>0\ ,\quad i\in E$$

mais $\hat{P}_y\hat{g}_x(i) = (x-y)^{-1}(\hat{g}_y(i) - \hat{g}_x(i)) = (x-y)^{-1}\int_0^\infty(e^{-yt} - e^{-xt})\mu(dt;i)$

$$= \int_0^\infty e^{-yt}\int_t^\infty e^{-x(s-t)}\mu(ds;i)dt$$

d'où par la continuité à droite des fonctions:

$$P_t\hat{g}_x(i) = \int_t^\infty e^{-x(s-t)}\mu(ds;i) = \int_0^\infty e^{-xs}\ (t+ds;i)$$

en posant $G_t(i) = \mu((0,t];i)$, on a alors:

$$\sum_j P_t(i,j)G_s(j) = \mu(t+(0,s];i) = G_{t+s}(i) - G_t(i)$$

donc par le lemme 1.3, $\{g_t = G_t'\ ,\ t>0\}$ satisfait $P_tg_s = g_{s+t}$

et $\int_0^T g_t dt \leq e^T\int_0^T e^{-t}g_t dt \leq e^T\hat{g}_1$

c'est-à-dire que $\{g_t\ ,\ t>0\}$ est une loi de sortie de P_t

finalement 2) résulte de 1) en posant:

$$\hat{g}_y = [I - (x-y)\hat{P}_y]h$$

en effet pour $y\geq x$, on a:

$$(y-x)\hat{P}_yh = (y-x)\int_0^\infty e^{-(y-x)t}e^{-xt}P_thdt \leq h$$

donc $\hat{g}_y \geq 0$ pour tout $y>0$

et d'autre part: $\hat{P}_yh(i) = \int_0^\infty e^{-yt}P_th(i)dt \leq y^{-1}\sup_i h(i)$

Définition 3

Une famille $\{f_t , t > 0\}$ de mesures positives sur E est appelée loi d'entrée par rapport au semi-groupe P_t si:

a) $f_s P_t = f_{s+t}$

b) $\sup_t \|f_t\| < \infty$

où $\|f_t\| = \sum_i f_t(i)\hat{P}_1 e(i)$

on a pour les lois d'entrée des résultats analogues aux lemmes 1.2, 1.3, et à la proposition 1.4

§2. Etude des trajectoires

Soit $\hat{E}$ un espace métrique compact contenant E comme ensemble ouvert dense, et tel que la topologie induite sur E soit la topologie discrète; soit $\mathcal{E}$ la tribu de Borel de $\hat{E}$. Une fonction mesurable $f: (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\hat{E}, \mathcal{E})$ est dite sur E si $P\{f \in E\} = 1$; $c \in E$ est dite une valeur possible de f si $P\{f > c\} > 0$.

Un processus stochastique à temps continu sur E est une famille $(X_t)_{t>0}$ de fonctions mesurables $X_t: (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\hat{E}, \mathcal{E})$ sur E, telle que l'ensemble de toutes les valeurs possibles de toutes les X_t est E.

Définition: Chaîne de Markov homogène à temps continu sur E

Un processus stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t>0})$ à temps continu sur E est dit une chaîne de Markov homogène si:

1) $P\{f \circ X_{t_n} | X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}\} = P\{f \circ X_{t_n} | X_{t_{n-1}}\}$; $0 < t_1 < \dots < t_n$ et $f: (\hat{E}, \mathcal{E}) \to (R_+, \mathcal{B})$

2) Soit $S_i = \{ s > 0 : i$ est une valeur possible de $X_s \}$, $i \in E$

$P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\} = P\{X_{t+s'} = j \mid X_{s'} = i\}$, pour tout s, $s' \in S_i$ et pour tout $i, j \in E$

On dit que la chaîne a pour fonction de transition le semi-groupe P_t, et $\{f_t, t > 0\}$ pour loi d'entrée si: $P_t(i,j) = P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\}$, $s \in S_i$, et $f_t(i) = P\{X_t = i\}$, $i, j \in E$

Etant donné un semi-groupe sous-markovien régulier P_t et une loi d'entrée f_t, telle que $\sum_j f_t(j) = 1$ pour tout $t > 0$, on peut toujours construire une chaîne de Markov homogène sur E : $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t>0})$ ayant P_t pour fonction de transition et f_t pour loi d'entrée.

Nous allons montrer dans cette section, à l'aide de Chung [1, II-4 à II-9] qu'il existe une modification assez régulière pour permettre, par exemple, la propriété de Markov forte. Cette modification permettra d'énoncer aussi d'autres résultats intéressants.

On supposera dans toute la suite les tribus sur Ω complètes.

Définition: Processus séparable

Un processus (X_t) sur Ξ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq R_+$ et un ensemble négligeable N, tels que pour tout fermé $A \subseteq \hat{\Xi}$ et tout intervalle ouvert $G \subseteq R$: $\{X_t \in A,\ t \in G \cap S\} - \{X_t \in A,\ t \in G \cap R_+\} \subseteq N$

Remarque

Si (X_t) est une chaîne de Markov homogène de semi-groupe régulier P_t et de loi d'entrée f_t, alors grâce au th.II-4.1 de Chung[1] , S est un ensemble séparant universel, au sens de Meyer[1,D.IV-16], tel que pour tout $\omega \notin N$ et tout intervalle ouvert G : $\overline{X_{R_+ \cap G}(\omega)} = \overline{X_{S \cap G}(\omega)}$; alors par Meyer[1,T.IV-18] la chaîne est séparable au sens de D-13. Inversement grâce aux th.17 et 18 de Meyer[1], si (X_t) est séparable au sens de D-13, elle est séparable.

Cette équivalence s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme 2.1

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t), P_t, f_t)$ est continue en probabilité.

Démonstration

Pour $s < t$ on a $P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_s(j) p_{t-s}(j,j)$

alors par les résultats de la section 1 on a:

$$\varliminf_{s \uparrow t} P\{X_s = X_t\} \geq \sum_j f_t(j) = 1$$

d'où la limite existe et égale 1

Pour $s > t$ on a $P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_t(j) p_{s-t}(j,j)$

alors par la convergence uniforme: $\lim_{s \downarrow t} P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_t(j) = 1$.

Lemme 2.2

Il existe une modification séparable de (X_t)

Démonstration

par la remarque c'est le th.19 de Meyer[1]

Définition: Processus bien-séparable

Un processus est dit bien-séparable si on peut prendre pour S n'importe lequel des ensembles dénombrables denses.

(Dorénavant (X_t) désignera toujours une chaîne de Markov homogène sur E, de semi-groupe régulier P_t et de loi d'entrée f_t)

Lemme 2.3

(X_t) possède une modification séparable et $\overline{\mathfrak{B}\times\mathfrak{F}}$-mesurable

Démonstration

On peut consulter Doob [1, II-2.6] ; on se sert des lemmes 2.1 et 2.2

Lemme 2.4

Si (X_t) est séparable, alors pour tout $i\in E$, $t\in S_i$ et $s>0$ on a:

$$P[X_u=i,\ t<u<t+s \mid X_t=i] = e^{-q_i s}$$

Démonstration

Il existe S dénombrable dense et N de mesure nulle, tels que:

$$\{X_u=i,\ u\in S\cap(t,t+s)\} - \{X_u=i,\ t<u<t+s\} \subseteq N$$

(ce qui montre en particulier que $P\{X_u=i,\ t<u<t+s \mid X_t=i\}$ est définie)

soit $\{s_n\}_{n\geq 1} = S\cap(t,t+s)$, en ordonnant $\{s_n,\ 1\leq n\leq m\}$ on obtient $\{s_{n,m},\ 1\leq n\leq m\}$ une suite finie croissante, soient $d_{1,m}=s_{1,m}-t$, $d_{n,m}=s_{n,m}-s_{n-1,m}$ $2\leq n\leq m$

alors: $P[X_u=i,\ t<u<t+s \mid X_t=i] = \lim\limits_{m\to\infty} P[X_{s_{n,m}}=i,\ 1\leq n\leq m \mid X_t=i] =$

$$= \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m} p_{d_{n,m}}(i,i) = \lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}[1-q_i d_{n,m}+o(d_{n,m})] = \lim_{m\to\infty}\exp(-q_i\sum_{n=1}^{m} d_{n,m})$$

$$= e^{-q_i s}\ ,\quad \text{si } q_i<\infty$$

si $q_i=\infty$, alors pour tout $M>0$ $p_d(i,i)\leq 1-Md$ pour d assez petit

d'où $P[X_u=i,\ t<u<t+s \mid X_t=i] \leq \lim\limits_{M\to\infty} e^{-Ms} = 0$.

Nous supposerons dès maintenant l'hypothèse suivante:

HYPOTHESE A

$$0<q_i<\infty\ ,\quad \sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i\quad ;\ \text{pour tout } i\in E$$

Lemme 2.5

Si (X_t) est séparable, alors pour tout t fixé:

$$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = 1$$

Démonstration

Pour i tel que $t \in S_i$ et pour $0 < \varepsilon < t$, on a par le lemme 3.4 :

$$\begin{aligned}P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon < s < t+\varepsilon \mid X_t = i\right] &= P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon < s < t \mid X_t = i\right] P\left[X_s = i,\ t < s < t+\varepsilon \mid X_t = i\right] \\ &= f_t(i)^{-1} P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon < s \leq t\right] e^{-q_i} \\ &= f_t(i)^{-1} P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon \leq s < t\right] e^{-q_i} \\ &= f_t(i)^{-1} f_{t-\varepsilon}(i) e^{-2q_i} \longrightarrow 1 \qquad (\varepsilon \to 0)\end{aligned}$$

alors soient $S_i(\omega) = \{t :\ X_t(\omega) = i\}$, $\Lambda^t_{n,i} = \{\omega :\ (t-n^{-1}, t+n^{-1}) \subseteq S_i(\omega)\}$

on a: $P\left\{\bigcup_n \Lambda^t_{n,i} \mid X_t = i\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left[X_s = i,\ t-n^{-1} < s < t+n^{-1} \mid X_t = i\right\} = 1$

donc " a fortiori": $P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = i \mid X_t = i\right] = 1$

$$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = \sum_i P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = i \mid X_t = i\right] P\left[X_t = i\right] = \sum_i f_t(i) = 1 .$$

Théorème 2.6

Soit (X_t) un processus séparable avec S, satisfaisant pour chaque t fixé:

$$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = 1$$

Alors il existe une modification séparable avec S, $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$-mesurable, et dont toutes les trajectoires sont semi-continues inférieurement à droite. (*)

Démonstration

C'est essentiellement la même que celle du th.7-1 de Chung [1, II]

(*) $f :\ R \longrightarrow \hat{E}$ est dite semi-continue inférieurement à droite si $\{f(s) :\ s > t\}$ a au plus une valeur limite appartenant à E lorsque $s\downarrow t$, et si elle existe $f(t)$ est dans E et est cette valeur limite; et si $f(t)$ est dans E, cette valeur limite existe et est $f(t)$.

Nous supposerons à partir de maintenant que (X_t) est séparable, Borel-mesurable et semi-continue inférieurement à droite.

<u>Définition</u>: <u>Famille admissible</u>

Une famille $\{\mathcal{F}_t,\ t>0\}$ de tribus est dite admissible par rapport à la chaîne de Markov (X_t), si:

1) $\mathcal{F}_s \leq \mathcal{F}_t$, pour $s \leq t$

2) $\mathcal{T}(X_s,\ 0<s\leq t) \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, pour tout $t>0$

3) $P[X_t = j \mid \mathcal{F}_s] = p_{t-s}(X_s, j)$, pour tout $j \in E$ et $0<s<t$

4) la famille est continue à droite.

Nous ne considérons que des familles admissibles.

Soient T un temps d'arrêt par rapport à $(X_t, \mathcal{F}_t)$, L sa fonction de distribution on pose $T_j = \inf\{t>T:\ X_t = j\}$; par la séparabilité de (X_t), T_j est un temps d'arrêt Pour tout $B_2 \in \mathcal{B}$ la tribu de Borel de R_+, on sait qu'il existe une fonction $C_j(\cdot, B_2)$: $R_+ \to R_+$ mesurable, telle que pour tout $B_1 \in \mathcal{B}$:

$$\int_{B_1} C_j(s, B_2) L(ds) = \int_{T \in B_1} E[T_j \in B_2 \mid T] dP = P[T \in B_1,\ T_j \in B_2]$$

Lorsque $B_2 = [0,u]$, on note $C_j(s, B_2)$ par $C_j(s,u)$

Pour $B_2 = [0,u]$, u rationnel, on choisit $C_j(\cdot,u)$ de telle façon que $C_j(\cdot,u) \leq C_j(\cdot,v)$, $u \leq v$ Pour s fixé, on sait qu'il existe une mesure $C_j(s,\cdot)$ telle que $C_j(s,[0,u]) = C_j(s,u)$, u rat

Par la construction de cette mesure (on peut consulter par exemple Neveu [2, I-6]) il est facile de voir que $C_j(\cdot, B_2)$ est mesurable pour tout $B_2 \in \mathcal{B}$ et satisfait

$$\int_{B_1} C_j(s, B_2) L(ds) = \int_{T \in B_1} E[T_j \in B_2 \mid T] dP$$

Nous allons maintenant "à l'aide" d'un lemme, qu'on peut trouver dans Chung [1,II-8.1] démontrer un théorème sur les trajectoires d'une chaîne séparable. La démonstration que nous donnons, simplifie un peu celle de Chung [1,II-6.1]

Lemme 1.7

Si (X_t) est séparable, alors les tribus complètes $\mathcal{F}_t^{\circ} = \overline{\mathcal{T}(X_s,\ 0 < s \leq t)}$ sont continues à droite.

Théorème 1.8

Si (X_t) est séparable, alors P-presque toutes les trajectoires ont la propriété suivante: pour tout $t > 0$, lorsque $s \downarrow t$, $\{X_s(\omega):\ s > t\}$ a au plus une valeur limite dans E

Démonstration

Soient $M > 0$ et $j \in E$; on pose $\Lambda_M^j = \{X_M = j\}$, χ sa fonction indicatrice.

comme: $E[\chi \mid X_s,\ 0 < s \leq t] = P[X_M = j \mid X_t] = p_{M-t}(X_t, j)$, $0 < t < M$

alors $(p_{M-t}(X_t, j))_{0<t<M}$ est une martingale et $E[p_{M-t}(X_t,j)] = P[X_M = j]$, $0 < t < M$

d'où il existe, par Meyer [1,VI-T4], une modification continue à droite $(Y_{t,M})_{0<t<M}$

soient donc S un ensemble dénombrable dense et Ω_0 tel que $P(\Omega_0) = 1$,

satisfaisant: 1) $Y_{s,M}(\omega) = p_{M-s}(X_s(\omega), j)$; $s \in S$, M rationnel, $\omega \in \Omega_0$

2) (X_t) est séparable avec S

soient $\omega_0 \in \Omega_0$ et $t > 0$ tels que $\{X_s(\omega_0):\ s \in S \cap (t,\infty)\}$ a deux valeurs limites $i, i' \in E$, lorsque $s \downarrow t$; alors il existe deux suites dans S tendant vers t, soit $\{s_n\}$ et $\{s'_n\}$, telles que: $\lim_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega_0) = i$, $\lim_{n\to\infty} X_{s'_n}(\omega_0) = i'$

d'où pour tout M rationnel $> t$, on a:

$$\lim_{n\to\infty} Y_{s_n,M}(\omega_0) = \lim_{n\to\infty} p_{M-s_n}(X_{s_n}, j) = p_{M-t}(i,j)$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_{s'_n,M}(\omega_0) = \lim_{n\to\infty} p_{M-s'_n}(X_{s'_n}, j) = p_{M-t}(i',j)$$

donc $p_{M-t}(i,j) = p_{M-t}(i',j)$

et alors en faisant tendre M vers t on a $\delta_{ij} = \delta_{i'j}$, donc $i = i'$

Remarque

Soient $S_i^-(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

$S_i^+(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t, t+\varepsilon) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

$\overline{S_i(\omega)} = \{t : S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

On a pour tout t fixé et $i \in E$:

$$\{\omega : t \in S_i(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in \overline{S_i(\omega)}\} \doteq \{\omega : t \in S_i^-(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in S_i^+(\omega)\}$$

en effet ceci résulte du lemme 2.5

Lemme 2.9

Soient $j, k \in E$ et $t > 0$, alors P-p.p. sur $\{T_j \leq t\}$ on a:

$$P\{X_t = k \mid T, T_j\} = p_{t-T_j}(j,k)$$

Démonstration

Par la remarque $\{T_j = t\} \overset{\bullet}{\subseteq} \{X_t = j\}$

alors pour $s \leq t$ et $s' \leq t$ on a:

$$P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_j = t,\ X_t = k] = \delta_{jk} P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_j = t] = \int_{\Lambda_1} p_{t-T_j}(j,k)\,dP$$

où $\Lambda_1 = \{T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_j = t\}$

d'autre part soit: $T_{j,n} = \min\limits_m \{m2^{-n} : m2^{-n} > T_j \text{ et } X_{m2^{-n}} = j\}$

on a: $T_{j,n} \downarrow T_j$ P-p.p.; soit donc $\Lambda_2 = \{T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_j < t\}$, $\Lambda_2^n = \{T \leq s, T_j \leq s', T_{j,n} < t$

alors:

$$\begin{aligned} P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_j < t,\ X_t = k] &= \lim_{n\to\infty} P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_{j,n} < t,\ X_t = k] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m2^{-n} < t} P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_{j,n} = m2^{-n},\ X_t = k] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum P[T \leq s,\ T_j \leq s',\ T_{j,n} = m2^{-n}]\, p_{t-m2^{-n}}(j,k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_2^n} p_{t-T_{j,n}}(j,k)\,dP = \int_{\Lambda_2} p_{t-T_j}(j,k)\,dP \end{aligned}$$

donc: $$\int_{T \leq s, T_j \leq s'} P[X_t = k \mid T, T_j]\,dP = \int_{T \leq s, T_j \leq s'} p_{t-T_j}(j,k)\,dP \quad .$$

Lemme 2.10

Soit $r_j(s,t) = \int_{[s,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)$, $j \in E$, $s \leq t$

alors $\int_{T \in B_1} P[X_t = j \mid T]dP = \int_{B_1} r_j(s,t)L(ds)$, pour tout $B_1 \subseteq [0,t]$

$r_j(s,\cdot)$ est continue à droite sur $[s,\infty)$ et $r_j(\cdot,\cdot)$ est $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-mesurable sur $\{$des couples (s,t): $s \leq t\}$

Démonstration

Par le lemme 2.9, on a pour tout $B_1 \subseteq (0,t]$:

$$\int_{T\in B_1} P[X_t = j \mid T]dP = \int_{T\in B_1} E[P[X_t = j \mid T, T_j]|T]dP = \int_{T\in B_1} E[p_{t-T_j}(j,j) \mid T]dP$$

$$= \int_{B_1} C_j(s,p_{t-\cdot}(j,j))A(ds) = \int_{B_1}\int_{[0,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)L(ds)$$

$$= \int_{B_1}\int_{[s,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)L(ds) \qquad \text{car } T_j \geq T$$

le reste du lemme est trivial.

Lemme 2.11

On a pour tout $k \in E$:

1) $r_k(s,t+t') = \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k)$, pour L-presque tout s et pour tout $t > s$, $t' \geq 0$

2) $\sum_j r_j(s,t) = 1$, pour L-presque tout s et pour tout $t > s$

3) $r_k(s,\cdot)$ est continue sur $[s,\infty)$ pour L-presque tout s

Démonstration

Pour $s \leq t$ et $t' > 0$, on a:

$$P[T \leq s,\ X_{t+t'} = k] = \sum_j P[T \leq s,\ X_t = j]p_{t'}(j,k)$$

alors P-p.p.: $P[X_{t+t'} = k \mid T] = \sum_j P[X_t = j \mid T]p_{t'}(j,k)$

et par le lemme 2.10, on a

$$r_k(s,t+t') = \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k) \quad , \quad \text{pour } t,t' > 0 \text{ et L-p.t. } s \leq t$$

alors par le théorème de Fubini, on a égalité pour L-p.t. s et L×L-p.t. (t,t'): $t \geq s$, $t' > 0$

alors par la continuité à droite et le lemme de Fatou

(1) $r_k(s,t+t') \geqslant \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k)$, pour L-p.t. s , $t \geqslant s$, $t' > 0$

et alors

(2) $\sum_j r_j(s,t-t') \geqq \sum_j r_j(s,t)$, pour L-p.t. s , $t \geqslant s$, $t' > 0$ (*)

mais par le lemme 2.10 et le théorème de Fubini, on a:

(3) $\sum_j r_j(s,t) = 1$, pour L-p.t. s et L-p.t. $t \geqslant s$

et alors par la continuité à droite et le lemme de Fatou:

(4) $\sum_j r_j(s,t) \leqslant 1$, pour L-p.t. s ; $t \geqslant s$

soit $s \in N$, où N est l'ensemble de L-mesure nulle de (1) et (4)

si (3) est vérifiée pour un certain t, par (2) et (4) elle est vérifiée

pour toute valeur plus grande que t, on a donc 2) du lemme

alors on a l'égalité pour (2), donc pour (1), et on a 1) du lemme

3) du lemme découle du lemme 1.2 sur les lois d'entrée.

<u>Lemme 2.12</u>

Soit: $r_t(j) = \int_0^{\infty} r_j(s,s+t)L(ds)$, $j \in E$ et $t > 0$; alors

1) $r_t(j) \geqslant 0$, $j \in E$ et $t > 0$

2) $\sum_j r_t(j) = 1$, $t > 0$

3) $\sum_j r_t(j)p_{t'}(j,k) = r_{t+t'}(k)$, $k \in E$ et $t > 0$, $t' \geqslant 0$

4) $r_{\cdot}(j)$ est continue sur R_+ , $j \in E$

<u>Démonstration</u>

1), 2), 3) découlent du lemme 2.11

4) découle du lemme 1.2 sur les lois d'entrée

(*) Il faut supposer P_t markovien, mais on peut toujours le faire en ajoutant un état.

Lemme 2.13

Soit T un temps d'arrêt fini, alors on a:

1) $P[X_T = j] = r_0(j)$, $j \in E$ $\qquad (r_0(j) = \lim_{t \downarrow 0} r_t(j))$

2) $P[X_{T+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N] = r_{t_0}(j_0) \prod_{\nu=0}^{N-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1})$, pour $0 \leq t_0 \leq \ldots \leq t_N$ et $j_0, \ldots, j_N \in E$

Démonstration

Par le théorème 2.8, $\{X_T = j\} \doteq \{T = T_j\}$, alors on a:

$$P[X_T = j] = P[T = T_j] = \lim_{n \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{[mn^{-1}, (m+1)n^{-1})} c_j(s, (m+1)n^{-1}) L(ds)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty c_j(s, [ns+1]n^{-1}) L(ds)$$

$$= \int_0^\infty c_j(s,s) L(ds) = \int_0^\infty r_j(s,s) L(ds) = r_0(j) \quad \text{, donc 1)}$$

Soit $B_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{mn^{-1} \leq T < (m+1)n^{-1},\ X_{(m+1)n^{-1}+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N\}$

Si $\omega \in \limsup_n B_n$, alors il existe une suite de nombres rationnels $\{s_k\}$ telle que $s_k \downarrow T$ et $X_{s_k + t_\nu} = j_\nu$, $0 \leq \nu \leq N$; alors par le théorème 2.8 on a pour

P-p.t. $\omega \in \limsup_n B_n$: $\quad X_{T+t_\nu}(\omega) = \lim_{t \downarrow T+t_\nu} X_t(\omega) = j_\nu$, $0 \leq \nu \leq N$

donc $\limsup_n B_n \,\dot{\subseteq}\, \{X_{T+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N\}$

d'autre part par le lemme 2.10, on a en posant $Q = \prod_{\nu=0}^{N-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1})$:

$$P(B_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P[mn^{-1} \leq T < (m+1)n^{-1},\ X_{(m+1)n^{-1}+t_0} = j_0] P[X_{(m+1)n^{-1}+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq N \mid X_{(m+1)n^{-1}+t_0} = j_0]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{[mn^{-1}, (m+1)n^{-1})} r_{j_0}(s, (m+1)n^{-1}+t_0) L(ds) Q = \int_0^\infty r_{j_0}(s, [ns+1]n^{-1}+t_0) L(ds) Q$$

alors par le lemme 2.11, on a:

$$\lim_{n \to \infty} P(B_n) = \int_0^\infty r_{j_0}(s, s+t_0) L(ds) Q = r_{t_0}(j_0) Q$$

donc $\quad P[X_{T+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N] \geq r_{t_0}(j_0) Q$

en sommant sur tous les $j_1, \dots, j_N$, on a:

$$P[X_{T+t_0} = j_0] \geqslant r_{t_0}(j_0)$$

pour $t_0 = 0$ on a l'égalité par 1), d'où l'égalité pour 2)

pour $t_0 > 0$, $1 \geqslant \sum_{j_0} P[X_{T+t_0} = j_0] \geqslant \sum_{j_0} r_{t_0}(j_0) = 1$, ce qui implique 2) $\bullet$

On note $\mathcal{F}^o_T$ la tribu des ensembles $\Lambda \in \mathcal{F}$ tels que $\Lambda \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$,

$\mathcal{F}'_T$ la complétion de la tribu $\bigcap_{t>0} \mathcal{F}^o_{T+t}$, $\mathcal{F}'_T = \overline{\mathcal{T}(X_{T+t},\ t>0)}$

Corollaire

1) pour tout $t \geqslant 0$, X_{T+t} est $\mathcal{F}'_{T+t}$-mesurable

2) pour tout $t > 0$, X_{T+t} est une variable aléatoire sur (un sous-ensemble de) E

Démonstration

$B_n \in \mathcal{F}'_{T+t_0+n^{-1}}$, donc par la continuité à droite de la famille de tribus $\limsup_n B_n \in \mathcal{F}'_{T+t_0}$, mais la démonstration du lemme précédent montre en particulier que $\{X_{T+t_0} = j_0\} \doteq \limsup_n B_n$, on a donc 1)

la dernière série d'inégalités du lemme précédent nous donne pour $t > 0$

$$\sum_j P[X_{T+t} = j] = 1$$

ce qui implique 2)

Voici comment se généralisent les résultats précédents

Soit T un temps d'arrêt quelconque, $\mathcal{F}^{o}_{T}$ est maintenant définie comme étant la complétion de la tribu des ensembles $\Lambda \in \Delta\mathcal{F}$ tels que $\Lambda \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, où $\Delta = \{T < \infty\}$. Pour $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ tel que $P[\Lambda] > 0$, on considère l'espace $(\Delta, \Delta\mathcal{F}, P(\cdot|\Lambda))$

Prenant maintenant $L(s) = P[T \leq s|\Lambda]$; il existe pour tout $j \in \Xi$, une fonction $H: R_+ \times \mathcal{B} \longrightarrow R_+$ notée $C_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$ telle que:

1) $C_j(\cdot, B|\Lambda)$ est $\mathcal{B}$-mesurable, pour tout $B \in \mathcal{B}$

2) $C_j(s,\cdot|\Lambda)$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$, pour tout $s \in R_+$

3) $\int_{B_1} C_j(s,B_2|\Lambda)L(ds) = \int_{T \in B_1} \Xi[T_j \in B_2|\Lambda, T]P(d\omega|\Lambda)$

mais $L(s) = P[\Lambda]^{-1}P[\Lambda, T \leq s]$ et $P(\cdot|\Lambda) = P[\Lambda]^{-1}P(\cdot)$, donc en posant $L(\Lambda,s) = P[\Lambda, T \leq s]$, on a: $\int_{B_1} C_j(s,B_2|\Lambda)L(\Lambda,ds) = \int_{T \in B_1} \Xi[T_j \in B_2|\Lambda, T]dP$

On obtient alors $r_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$ et $r_t(\Lambda,j)$ satisfaisant aux résultats précédents; mais maintenant $r_j(\cdot,t|\Lambda)$ est une modification de $P[X_t = j|\Lambda, T]$ sur $\{T \leq t\}$, au lemme **2**.13 il faut considérer $P[\Lambda, X_{T+t_\nu} = j_\nu, 0 \leq \nu \leq N]$

Théorème **2**.14

Soit T un temps d'arrêt

Alors $(\Delta, \Delta\mathcal{F}, P(\cdot|\Delta), (X_{T+t})_{t>0}, (\mathcal{F}_{T+t})_{t>0})$ est une chaîne de Markov homogène sur Ξ', un sous-ensemble de Ξ, de fonction de transition P_t et de loi d'entrée $r_t(\Delta,\cdot)$

De plus pour tout $t > 0$, si $M \in \mathcal{F}_{T+t}$ et $M' \in \mathcal{F}'_{T+t}$, on a:

$$P[M \cap M' | X_{T+t}] = P[M | X_{T+t}]P[M' | X_{T+t}] \text{ , P-p.p. sur } \Delta$$

Démonstration

Appliquant la généralisation du lemme **2**.13 au temps d'arrêt T+t , on a sur Δ $P[M \cap M' | X_{T+t}] = P[M | X_{T+t}]P[M' | X_{T+t}]$, pour $M' = \{X_{T+t+t_\nu} = j_\nu, 0 \leq \nu \leq N\}$ mais ces M' engendrent $\mathcal{F}'_{T+t}$. En divisant par $P[M | X_{T+t}]$ on a la première partie.

<u>Théorème 2.15</u>

Pour tout $0<t_0<\dots<t_n$ et $j_0,\dots,j_n \in E$, on a P-p.p. sur Δ

$$P[X_{T+t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq n \mid \Lambda,\ T] = r_{j_0}(T,T+t_0 \mid \Lambda)\prod_{\nu=0}^{n-1} p_{t_{\nu+1}+t_\nu}(j_\nu,j_{\nu+1})$$

<u>Démonstration</u>

On applique la généralisation de 2) du lemme 2.13 aux ensembles $\Lambda\cap\{T\leq s\}$ en remarquant que :

$$r_{t_0}(\Lambda\cap\{T\leq s\},j_0) = \int_0^\infty r_{j_0}(u,u+t_0 \mid \Lambda\cap\{T\leq s\})L(\Lambda\cap\{T\leq s\},du)$$

$$= \int_{\Lambda\cap\{T\leq s\}} r_{j_0}(T,T+t_0 \mid \Lambda)dP$$

<u>Remarque</u>

On résume les derniers résultats en disant que la chaîne (X_t) satisfait la propriété de Markov forte ; on verra à la section 4 une autre propriété, dite propriété de Markov Forte.

Nous supposerons dans toute la suite la loi d'entrée f_t , donnée par une mesure initiale μ sur E . (par exemple $(X_t)_{t\geq s}$, $s>0$, où (X_t) est donnée par la situation précédente). On a dans ce cas une chaîne $(X_t)_{t\geq 0}$, qu'on peut supposer, et qu'on supposera dans toute la suite, $\mathcal{B}\times\mathcal{F}'$-mesurable et semi-continue inférieurement à droite sur R_+ . P est alors notée P^μ.

Pour simplifier un peu, on suppose μ strictement positive.

Théorème 2.16

Il existe une suite strictement croissante $(T_n)_{n\geq 0}$, $T_0\equiv 0$, de temps d'arrêt finis, telle que P^μ-presque partout

1) $X_t(\omega) = X_{T_n(\omega)}(\omega)$, $t\in [T_n(\omega), T_{n+1}(\omega))$

2) $P^\mu\left[T_{n+1} - T_n > t \mid X_{T_0},\dots,X_{T_n}\right] = \exp(-q_{X_{T_n}} t)$

Démonstration

Soit $T_1 = \inf\{t:\ X_t \neq X_0\}$, T_1 est un temps d'arrêt

et $P^\mu[T_1 > t \mid X_0 = i] = P^\mu[X_s = i \ ,\ 0\leq s\leq t \mid X_0 = i] = e^{-q_i t}$

alors $P^\mu[T_1 = 0,\ X_0 = i] = \lim\limits_{t\downarrow 0} P^\mu[T_1 \leq t \mid X_0 = i]P[X_0 = i] = 0$

donc $P^\mu[T_1 = 0] = 0$, et $X_t = X_0$ pour $t\in[0,T_1)$

de même $P^\mu[T_1 = \infty] = \sum\limits_i \lim\limits_{t\to\infty} P^\mu[T_1 > t \mid X_0 = i]P^\mu[X_0 = i] = 0$

d'autre part on peut montrer que $P^\mu[X_{T_1} = j \mid X_0 = i] = (1-\delta_{ij})q_{ij}q_i^{-1}$, Chung[1,II-15.6]

alors $P^\mu[X_{T_1}\in E] = 1$

donc presque partout: $T_1 < \infty$ et $X_{T_1}\in E$

le reste du théorème suit par induction.

Théorème 2.17

Soit $T = \lim_{n\to\infty} T_n$

$\overline{X}_t = X_t$ si $t \in [0,T)$, ∂ autrement

$\phi_t(i,j) = P^{\mu}[X_{t+s} = j$, et il y a un nombre fini de sauts sur $(s,t+s) \mid X_s = i]$

alors 1) $\overline{X}_t$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Φ_t

2) Φ_t est la solution minimale de $P'_t = QP_t$

3) $\phi_t(i,j) = \sum_{n\geq 0} p_t^{\langle n\rangle}(i,j)$, où $p_t^{\langle 0\rangle}(i,j) = \delta_{ij} e^{-q_i t}$

$$p_t^{\langle n+1\rangle}(i,j) = \sum_{k\neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_s^{\langle n\rangle}(k,j)\,ds$$

Théorème 2.18

Soit $x_n = X_{T_n}$

Alors (x_n) est une chaîne de Markov discrète de matrice de transition A

donnée par: $A(i,j) = (1-\sum_{ij})q_{ij}q_i^{-1}$

§3. Frontières de Martin

Rappelons-nous que :

1) X_t est bien-séparable, semi-continue inférieurement à droite et Borel-mesurable.

2) $0 < q_i < \infty$, $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$

3) $A(i,j) = \dfrac{(1 - \delta_{ij})q_{ij}}{q_i}$

Remarquons qu'être transient pour A est équivalent à être transient pour Φ_t

Supposons donc E formé d'éléments transients pour A

On définit alors la frontière de la façon suivante :

Soient : μ une mesure de probabilité strictement positive sur E

$$K(\cdot,j) = \frac{1}{\mu G(j)} G(\cdot,j)$$

δ une fonction strictement positive sur E telle que $\sum_{i \in E} \delta(i) < +\infty$

on définit alors une métrique en posant :

$$d_1(i,j) = \sum_{k \in E} |K(k,i) - K(k,j)| \delta(k) \mu(k)$$

on note $\hat{E}$ la complétion de E sous la métrique $d = d_1 + d_2$, où d_2 est une métrique discrète par rapport à laquelle la complétion de E est le compactifié d'Alexandroff.

Définition. Frontière de sortie de Martin

$B_s = \hat{E} - E$ est dit (d'après Hunt) la frontière de sortie de Martin de A

Remarques

1) K est bien définie, en effet : $0 < G(j,j)\mu(j) \leq \mu G(j) \leq G(j,j)\mu(E) < \infty$

2) $\mu(K(\cdot,j)) = \mu K(j) = 1$

3) pour tout $j \in E$, $K(i,j) \leq \mu(i)^{-1}$

4) $\hat{E}$ est compact et sa topologie induit la topologie discrète sur E qui est ouvert dans $\hat{E}$

Lemme 3.1

Pour P^{μ}-presque tout ω , $x_n(\omega)$ converge dans $\hat{E}$ vers un point de B_s

Démonstration

$K(i,X_t(\omega))$ est une surmartingale bornée sur $[0,T(\omega))$

alors par un théorème classique (Meyer [1 , VI-T6])

$$\lim_{t\uparrow T(\omega)} K(i,X_t(\omega)) \text{ existe } P^{\mu}\text{-presque partout}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} K(i,x_n(\omega))$ existe P^{μ}-presque partout

alors $x_n(\omega)$ converge dans $\hat{E}$ vers un point de B_s , puisque les états sont transients.

Définition: Ensemble invariant pour (x_n).

$\Lambda \in \mathcal{C}(x_n\ ,\ n\geqslant 0)$ est dit invariant pour (x_n), s'il existe une fonction

$f: E \to R$ telle que pour tout n:

$$I_{\Lambda} = f(x_0,x_1,\dots) = f(x_n,x_{n-1},\dots)$$

On a le théorème suivant dû à Hunt:

Théorème

Soit $x_\infty = \lim\limits_n x_n$, alors la P^{μ}-complétion de la tribu $\mathcal{C}(x_\infty)$ est égale à la P^{μ}-complétion de la tribu des ensembles invariants pour (x_n)

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Hunt [1] , mais il serait trop long de la donner ici.

§4. Décomposition

Rappelons l'hypothèse A : $0 < q_i < \infty$, $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$, pour tout $i \in E$

Une des conséquences de cette hypothèse est la proposition suivante:

Proposition 4.1

P_t est solution de: $P'_t = QP_t$

Démonstration

Pour i fixé, soit (J_n) une suite croissante de sous-ensembles finie de $J = E - \{i\}$ telle que $J = \bigcup_n J_n$; on peut supposer de plus que J_n contient exactement n éléments. Posons $J'_n = J - J_n$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$:

$$q_i - \sum_{k \in J_n} q_{ik} = \sum_{k \in J'_n} q_{ik}$$

d'autre part il existe $\delta > 0$ tel que pour $h < \delta$:

$$\left| \frac{p_h(i,k)}{h} - q_{ik} \right| < \frac{\varepsilon}{N} \quad , \quad k \in J_N \quad ; \text{ et } \left| \frac{1 - p_h(i,i)}{h} - q_i \right| < \varepsilon$$

alors pour $h < \delta$:

$$\left| \frac{p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j)}{h} - \sum_k q_{ik} p_t(k,j) \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k \neq i} h^{-1} p_h(i,k) p_t(k,j) - \sum_{k \neq i} q_{ik} p_t(k,j) \right| + \left| q_i p_t(i,j) - \frac{1 - p_h(i,i)}{h} p_t(i,j) \right|$$

$$\leq \sum_{k \in J_N} \left| \frac{p_h(i,k)}{h} - q_{ik} \right| + \sum_{k \in J'_N} h^{-1} p_h(i,k) + \sum_{k \in J'_N} q_{ik} + \varepsilon$$

$$\leq 3\varepsilon + \frac{1 - p_h(i,i)}{h} - \sum_{k \in J_N} h^{-1} p_h(i,k)$$

$$\leq 3\varepsilon + q_i + \varepsilon + \varepsilon - \sum_{k \in J_N} q_{ik} \leq 6\varepsilon$$

d'où $P_t'^{+}(i,j) = QP_t(i,j)$, où $P_t'^{+}(i,j)$ désigne la dérivée à droite

mais $QP_t(i,j)$ est continue, il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue,

et puisqu'une fonction qui possède une dérivée à droite continue est dérivable,

alors P_t' existe et $P_t' = QP_t$

Proposition 4.2

Soit T le premier instant d'accumulation de sauts

Alors $P^{\mu}\left[\{T<\infty\}\Delta\{\sum_n q_{x_n}^{-1}<\infty\}\right] = 0$

Démonstration

Soit $S_n = T_{n+1} - T_n$, on a $T = \sum_n S_n$

comme $E^{\mu}\left[S_n \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = E^{\mu}\left[S_n \mid T_1,\dots,T_n\right] = E^{\mu}\left[S_n \mid x_n\right]$

et $\displaystyle\int_{x_n=i} E^{\mu}\left[S_n \mid x_n\right] dP^{\mu} = \int_{x_n=i} S_n \, dP^{\mu} = P^{\mu}\{x_n=i\}\int_0^{\infty} t q_i e^{-q_i t} dt$

$$= P^{\mu}\{x_n=i\}\int_0^{\infty} e^{-q_i t} dt = \int_{x_n=i} q_{x_n}^{-1} dP^{\mu}$$

alors $E^{\mu}\left[S_n \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = q_{x_n}^{-1}$, P^{μ}-p.p.

soit $S_n' = \min(S_n,1)$, alors par la théorie des martingales (cf Neveu [,p.142])

P^{μ}-p.p.: $\sum S_n'$ converge si et seulement si $\sum E^{\mu}\left[S_n' \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right]$ converge

mais $\sum S_n'$ converge si et seulement si $\sum S_n$ converge

d'autre part:

$$\int_{x_n=i} E^{\mu}\left[S_n' \mid x_n\right] dP^{\mu} = \int_{x_n=i,\,S_n\le 1} S_n \, dP^{\mu} + \int_{x_n=i,\,S_n>1} dP^{\mu}$$

$$= P^{\mu}\{x_n=i\}\left[\int_0^1 t q_i e^{-q_i t} dt + e^{-q_i t}\right] = \int_{x_n=i} q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right] dP^{\mu}$$

alors $E^{\mu}\left[S_n' \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = E^{\mu}\left[S_n' \mid x_n\right] = q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right]$, P^{μ}-p.p.

mais $\sum q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right]$ converge si et seulement si $\sum q_{x_n}^{-1}$ converge

donc $\{T<\infty\} \doteq \{\sum q_{x_n}^{-1} < \infty\}$

Corollaire

$\{T<\infty\}$ est dans la P^{μ}-complétion de $\mathcal{C}(x_{\infty})$

Soit $\mathcal{E}$ la tribu de Borel de $\hat{E}$

soit η la mesure sur $(\hat{E},\mathcal{E})$ définie par: $\eta(C) = P^{\mu}\{x_{\infty}\in C\}$, $C\in\mathcal{E}$

un ensemble $C\in\mathcal{E}$ est dit complètement atomique si $\eta(c) > 0$, pour tout $c\in C$

Hypothèse B

Il existe un ensemble complètement atomique $A\subseteq B_s$ tel que:

$$\{T<\infty\} = \{x_{\infty}\in A\}$$

Remarques

1) A est dénombrable

2) étant donné $a\in A$, il existe $i\in E$ tel que: $P^i\{x_{\infty}=a\} > 0$

Notations

Pour $a\in A$ on pose: $\Delta^a = \{x_{\infty}=a\}\cap\{T<\infty\}$, $T^a = T$ sur Δ^a, $=\infty$ ailleurs,

$L_t(i,a) = P^i\{T^a< t\}$, $L_t(i) = P^i\{T<t\} = \sum_{a\in A} L_t(i,a) = 1 - \sum_j \phi_s(i,j)$

Lemme 4.3

$$L_{t+s}(\cdot,a) - L_s(\cdot,a) = \Phi_s L_t(\cdot,a)$$

Démonstration

$$L_{t+s}(i,a) - L_s(i,a) = P^i\{s<T^a\leq t+s\} = P^i\{s<T\leq t+s;\Delta^a\}$$

$$= \sum_j P^i\{\overline{X}_s=j;\ s<T\leq t+s;\Delta^a\} = \sum_j P^{\mu}\{s<T\leq t+s;\Delta^a \mid \overline{X}_s=j\}P^i\{\overline{X}_s=j\}$$

$$= \sum_j \phi_s(i,j)P^{\mu}\{s<T\leq t+s;\Delta^a \mid X_s=j;\ T>s\} = \sum_j \phi_s(i,j)P^{\mu}\{T\leq t;\Delta^a \mid X_0=j\}$$

$$= \sum_j \phi_s(i,j)L_t(j,a)$$

Théorème 4.4

Les $l_t(\cdot,a) = L_t'(\cdot,a)$, $a \in A$, sont des lois de sortie pour Φ_t , telles que $l_0(\cdot,a) = 0$

Démonstration

Par les lemmes 1.3 et 4.3 les $l_t(\cdot,a)$ sont des lois de sortie, la propriété b) des lois de sortie est ici évidente puisque: $\int_0^\infty l_t(i,a)dt = L_\infty(i,a) \leq 1$

d'autre part comme $L_t(i) = 1 - \sum_j \phi_t(i,j)$

on a $l_t(i) = \sum_k q_{ik} L_t(k)$

alors $l_0(i) = 0$, donc $l_0(i,a) = 0$ puisque $l_t(i,a) \leq l_t(i)$

Théorème 4.5

Toute loi de sortie pour Φ_t satisfaisant $\sup_i \int_0^\infty g_t(i)dt \leq 1$, s'écrit d'une et d'une seule façon sous la forme:

$$g_t = \Phi_t g_0 + \sum_{a \in A} c^a l_t(\cdot,a) , \qquad 0 \leq c^a \leq 1$$

Démonstration

On peut supposer $g_0 = 0$, puisque $g_t - \Phi_t g_0$ est une loi de sortie ayant cette propriété.

Comme $\Phi_t' = Q\Phi_t$, on a: $\phi_s(i,j) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} \phi_v(k,j)dv + \delta_{ij} e^{-q_i s}$

alors comme g_t est une loi de sortie pour Φ_t , on a:

$$g_{s+t}(i) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} g_{v+t}(k)dv + e^{-q_i s} g_t(i)$$

d'où: $g_s(i) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} g_v(k)dv$

alors: $G(i) = \int_0^\infty g_s(i)ds = \sum_{k \neq i} q_i^{-1} q_{ik} \int_0^\infty g_v(k)dv = AG(i)$

comme $G(x_n)$ est une martingale bornée, par un théorème de convergence de la théorie des martingales (c.f. Meyer[1,V-T17]), il existe une fonction φ, évidemment invariante, telle que :

$$E^i(\varphi) = G(i)$$

mais $\varphi = \sum c^a I_{\Lambda^a} + \varphi_0$, où la somme est sur les ensembles P^μ-atomiques invariants et φ_0 est une fonction invariante qui s'annule sur les ensembles P^μ-atomiques invariants.

On a alors $G(i) = \sum c^a P^i[\Lambda^a] + E^i(\varphi_0)$

par l'hypothèse B , à tout point de A correspond un Λ^a

d'autre part si Λ^a ne correspond pas à un point de A , alors

$$P^i[\Lambda^a] - \sum_j \phi_t(i,j)P^j[\Lambda^a] = P^i[\Lambda^a \ , T \leq t] = 0$$

de même $E^i(\varphi_0) - \sum_j \phi_t(i,j)E^j(\varphi_0) = 0$

alors si on pose $G_t(i) = G(i) - \sum_j \phi_t(i,j)G(j)$, on a:

$$G_t(i) = \sum_{a\in A} c^a L_t(i,a) = \int_0^t \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)ds$$

mais $G(i) - \sum_j \phi_t(i,j)G(j) = \int_0^\infty g_s(i)ds - \int_0^t \sum_j \phi_t(i,j)g_s(j)ds$

$$= \int_0^\infty g_s(i)ds - \int_0^\infty g_{s+t}(i)ds = \int_0^t g_s(i)ds$$

d'où $g_s(i) = \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$ ds-p.p.

mais $\sum_{a\in A} l_s(i,a) = l_s(i)$ qui est continue

alors $\sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$ converge uniformément sur tout intervalle compact de R_+

donc est continue ; et alors pour tout $s > 0$:

$$g_s(i) = \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$$

l'unicité de la représentation résulte du lemme suivant

Lemme

Pour tout $t > 0$, on a P^μ-p.p. : $\lim_{n\to\infty} L_t(x_n,a) = I_{\Delta^a}$

Théorème 4.6

Pour tout $a \in A$, $j \in E$ et $t > 0$, il existe un nombre $\xi_t(a,j)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a \, , \, X_{T^a+t} = j \mid x_n] = \xi_t(a,j) I_{\Delta^a} \, , \quad P^\mu\text{-p.p.}$$

Démonstration

X_{T^a+t} est $\bigcap_n \mathcal{F}'_{T_n}$-masurable, alors par la propriété de Markov forte:

$\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_n] = \lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid \mathcal{F}_{T_n}]$, et cette dernière

exite par un théorème de convergence des martingales (cf. Meyer[1,IV-T18])

et la limite définit une fonction φ, invariante pour (x_n)

par le même théorème sur les martingales, on a $\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a \mid x_n] = I_{\Delta^a}$

et comme $P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_n] \leq P^\mu[\Delta^a \mid x_n]$

alors $\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_n] = 0$, P^μ-p.p. sur le complémentaire de Δ^a

et évidemment φ est constante sur tout ensemble atomique invariant,

on note cette constante sur Δ^a par $\xi_t(a,j)$

Corollaire

Pour tout $a \in A$, $\xi_t(a,\cdot)$ est une loi de sortie pour P_t

et pour tout $j \in E$, on a: $P^\mu[X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \xi_t(a,j)$, $t > 0$

On note $\mathcal{F}^-_T = \bigvee_n \mathcal{F}_{T_n}$, et $\mathcal{T}$ la tribu complétée des ensembles invariants

On a alors la propriété suivante, dite la propriété de Markov Forte

Théorème 4.7

Soit $M \in \mathcal{F}^-_T$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$, on a alors:

$$P^\mu[M \cap M' \mid \Delta^a] = P^\mu[M \mid \Delta^a] P^\mu[M' \mid \Delta^a]$$

Démonstration

Soit $M \in \mathcal{F}_{T_n}$, comme $\mathcal{F}_{T_n} \subseteq \mathcal{F}_{T_m}$ si $n \leq m$, on a $M \in \mathcal{F}_{T_m}$ pour tout $m \geq n$

d'autre part $\{X_{T^a+t} = j\} \in \mathcal{F}'_{T_m}$

alors par la propriété de Markov forte, on a pour $m > n$

$$P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] = P^\mu[M \mid x_m] P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m]$$

mais par le propriété de Markov et la convergence des martingales de T-18 de Meyer[1]:

$$\lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid x_m] = \lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid \mathcal{C}(x_k, k \geq m)] = P^\mu[M \mid \mathcal{T}]$$

alors par le théorème précédent on a:

$$P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j] = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] dP^\mu$$

$$= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid x_m] P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] dP^\mu$$

$$= \int_\Omega P^\mu[M \mid \mathcal{T}] \, \xi_t(a,j) I_{\Delta^a} dP^\mu = \xi_t(a,j) P^\mu[M, \Delta^a]$$

d'où $P^\mu[M, X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \xi_t(a,j) P^\mu[M \mid \Delta^a]$, $t > 0$

et alors plus généralement pour $0 < t_1 < \dots < t_n$ on a:

$$P^\mu[M, X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq n \mid \Delta^a] = P^\mu[X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 2 \leq \nu \leq n \mid M, \Delta^a, X_{T^a+t_1} = j_1] \xi_{t_1}(a, j_1) P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

$$= \xi_{t_1}(a, j_1) \prod_{\nu=1}^{n-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1}) P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

$$= P^\mu[X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq n \mid \Delta^a] P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

donc pour $M \in \mathcal{F}_{T_n}$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$ on a:

$$P^\mu[M \cap M' \mid \Delta^a] = P^\mu[M \mid \Delta^a] P^\mu[M' \mid \Delta^a]$$

et alors aussi pour $M \in \mathcal{F}^-_T$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de décomposition suivant:

Théorème 4.8

Soit P_t une solution de $P_t' = QP_t$, alors:

$$P_t = \Phi_t + \sum_{a\in A} (1.(\cdot,a) * \xi.(a,\cdot))(t)$$

Démonstration

$$p_t(i,j) = P^\mu[X_t = j \mid X_0 = i] = P^\mu[X_t = j,\ t < T \mid X_0 = i] + \sum_a P^\mu[X_t = j,\ T^a \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a P^\mu[X_t = j,\ T^a \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a P^\mu[X_0 = i]^{-1} \int_0^t r_j(s,t \mid X_0 = i) \hat{L}^a(X_0 = i, ds)$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a \int_0^t r_j(s,t \mid X_0 = i) dL_s(i,a)$$

mais par le théorème 2.15, on a:

$$P^i[X_{T^a+t} = j,\ T^a \leq u] = P^\mu[X_0 = i]^{-1} \int_0^u r_j(s,s+t \mid X_0 = i) \hat{L}(X_0 = i, ds)$$

$$= \int_0^u r_j(s,s+t \mid X_0 = i) dL_s(i,a)$$

d'autre part par la propriété de Markov Forte

$$P^i[X_{T^a+t} = j,\ T^a \leq u] = P^i[T^a \leq u] P^\mu[X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \int_0^u \xi_t(a,j) dL_s(i,a)$$

donc $r_j(s,s+t \mid X_0 = i) = \xi_t(a,j)$, pour $t > 0$ et $s \notin N_t'$ de $dL_s(i,a)$-mesure nulle

mais par le théorème de Fubini, l'égalité est vérifiée pour $s \notin N$ et $t \notin N_s$,

où N est de $dL_s(i,a)$-mesure nulle et N_s est de mesure de Lebesgue nulle.

alors $r_j(s,t \mid X_0 = i) = \xi_{t-s}(a,j)$, $s \notin N$ et $t-s \notin N_s$

mais ces fonctions sont continues en t sur (s,∞) pour $s \notin N'$ de $dL_s(i,a)$-mesure nulle

alors $r_j(s,t \mid X_0 = i) = \xi_{t-s}(a,j)$, pour $dL_s(i,a)$-p.t. s et $t > s$

ce qui nous donne: $\displaystyle p_t(i,j) = \phi_t(i,j) + \sum_a \int_0^t \xi_{t-s}(a,j) l_s(i,a) ds$

BIBLIOGRAPHIE

Chung, K.L. 1. Markov chains with stationnary transition probabilities
Springer Verlag, Berlin, 1960

2. On the boundary theory for Markov chains
Acta Mathematica, 110 (1963), 19-77

3. On the boundary theory for Markov chains II
Acta Mathematica, 115 (1966), 111-163

4. Probabilistic methods in Markov chains
Fourth Berkeley Symposium Vol II, (1961), 35-56

Doob, J.L. 1. Stochastic Processes. John Wiley and Sons, New-York, 1953

2. Discrete potential theory and boundaries
Journal of Math. and Mech. 8 (1959), 433-458

Feller, W. 1. On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations. Annals of Mathematics, 65 (1957), 527-570

Hunt, G.A. 1. Markoff chains and Martin boundaries
Illinois Journal of Mathematics, 4 (1960), 313-340

Meyer, P.A. 1. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris 1966

Neveu, J. 1. Lattice methods and submarkovian processes
Fourth Berkeley Symposium, Vol II (1961), 347-391

2. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie. 1964

Reuter, G.E.H.
1. Denumerable Markov processes and the associated contraction semi-groups on l . Acta Mathematica, 97 (1957), 1-46

2. Denumerable Markov processes (II)
Journal of London Math. Soc. 34 (1959), 81-91

3. Denumerable Markov processes (III)
Journal of London Math. Soc. 37 (1962), 63-73

Williams, D. 1. On the construction problem for Markov chains
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 3 (1964), 227-246