SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS

Espaces H^m sur les variétés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 43-74
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__43_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1966/67

ESPACES H^m SUR LES VARIETES, ET APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES SUR UNE VARIETE COMPACTE.

(par Catherine DOLÉANS)

On reprend ici les méthodes données par Shmuel Agmon (Lectures on Elliptic Boundary value Problems , Princeton, Van Nostrand 1965), pour l'étude dans les espaces H^m des équations elliptiques. Pour simplifier, on se place ici sur une variété compacte sans bord, et on ne considère que des équations elliptiques d'ordre 2.

0. 1 . NOTATIONS

a) x est un point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1, \dots, x_n$, et $|x - y|$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, est un multi-indice ; on munit l'ensemble des multi-indices de la relation d'ordre : "$\alpha \le \beta$" si et seulement si "$\alpha_i \le \beta_i$, $i = 1, \dots, n$". Et l'on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

(D_i est l'opérateur différentiel associant à une fonction sa dérivée dans la direction x_i).

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$$

b) Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $C^m_{loc}(\Omega)$ (resp. $C^\infty_{loc}(\Omega)$) est l'espace des fonctions à valeurs réelles, m-fois continument différentiables (resp. indéfiniment différentiables) sur Ω[1]. $C^m_c(\Omega)$ (resp. $C^\infty_c(\Omega)$) est l'espace des fonctions de $C^m_{loc}(\Omega)$ (resp. $C^\infty_{loc}(\Omega)$ à support compact dans Ω.

c) La notation $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ signifie : Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}_1$ est compact et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

0. 2. REGULARISEES D'UNE FONCTION INTEGRABLE.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, u une fonction intégrable sur tout ouvert borné de Ω ; on désigne par $j(x)$ une fonction de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ nulle hors de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, satisfaisant à $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)\,dx = 1$, et par $j_\epsilon(x)$ les fonctions $j_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} j\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. On a facilement les résultats suivants :

1.- $J_\epsilon u = j_\epsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$ est dans $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$

(u est prolongée par zéro hors de Ω).

2.- Si u est à support compact K, $J_\epsilon u$ est à support dans $K + \mathrm{supp}(j_\epsilon)$.

3.- Si $u \in L^2(\Omega)$, $J_\epsilon u \underset{\epsilon \to 0}{\to} u$ dans $L^2(\Omega)$.

---

(1) $C^m_{loc}(\Omega)$ est plus habituellement noté $C^m(\Omega)$. Nous préférons employer la notation $C^m_{loc}(\Omega)$ pour montrer que l'appartenance à cet espace est une propriété locale.

0. 3 . PARTITION DE L'UNITE SUBORDONNEE A UN RECOUVREMENT LOCALEMENT FINI.

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert, localement fini, d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on suppose que chaque ouvert $\mathcal{O}_i$ est relativement compact dans Ω. Il existe alors une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$; c'est à dire, une famille de fonctions $(a_i)_{i \in I}$ telles que

1) $0 \leq a_i \leq 1$, $a_i \in C_c^\infty(\mathcal{O}_i)$

2) $\sum_{i \in I} a_i(x) = 1 \qquad x \in \Omega$

Remarque : Si les $\mathcal{O}_i$ ne sont pas relativement compacts dans Ω, on peut seulement affirmer que les supports des a_i (dans Ω) sont dans $\mathcal{O}_i$.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans L. Schwartz, Théorie des distributions, T. I. pages 22 et 23.

1 . ESPACES $H^m(\Omega)$.

On définit ici les espaces $H^m(\Omega)$ et $H^m_{loc}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on montre que $C^\infty_{loc}(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$, puis on étudie la régularité des fonctions de $H^m_{loc}(\Omega)$. On termine par le théorème de Rellich (compacité de l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$) dont on ne démontre qu'une variante plus faible. Le paragraphe (1.4) est d'ordre technique et nous servira dans l'étude de la régularité des solutions de certaines équations différentielles.

1 . 1 . ESPACES $H^m(\Omega)$ ET $H^m_{loc}(\Omega)$

Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définitions . -

a) Une fonction $u \in L^2(\Omega)$ appartient à $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$) si et seulement si, pour tout α , $|\alpha| \leq m$, les dérivées $D^\alpha u$ de u au sens des distributions sont elles-mêmes des fonctions de $L^2(\Omega)$.

b) Une fonction u appartient à $H^m_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi u \in H^m(\Omega)$ pour toute fonction φ de $C^\infty_c(\Omega)$.

Remarque : $H^m_{loc}(\Omega)$ est aussi évidemment l'ensemble des fonctions u telles que $u \in H^m(\Omega_1)$ pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.

Théorème 1. - $H^m(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et le produit hilbertien

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \, . \, D^\alpha v \; dx$$

fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert.

Démonstration Nous montrerons seulement que $H^m(\Omega)$ est complet : si $\{u_k\}$ est une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$, les suites $\{D^\alpha u_k\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ ($|\alpha| \leq m$) ; soient u_α leurs limites dans $L^2(\Omega)$. La relation

$$\int_\Omega \varphi \, D^\alpha u_k \; dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k \; D^\alpha \varphi \; dx \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$$

passe alors à la limite quand k tend vers $+\infty$, ce qui montre que : $u_\alpha = D^\alpha u$, u est dans $H^m(\Omega)$ et $u_k \to u$ dans $H^m(\Omega)$.

Notations : On notera

$$\|u\|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \Big)^{1/2}$$

et

$$|u|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

Théorème 2. - $C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Démonstration Considérons un recouvrement dénombrable, localement fini de Ω par des ouverts U_n relativement compacts dans Ω. On peut alors construire un recouvrement ouvert (V_n) de Ω, tel que $V_n \subset\subset U_n$, et une partition de l'unité (a_n) de classe C^∞, subordonnée à (V_n) ; posons si $u \in H^m(\Omega)$, $u_n = a_n u$; les fonctions u_n sont dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ et à support dans $\overline{V}_n$, on peut alors choisir des ϵ_n tels que

$$\overline{V}_n + \operatorname{supp}(j_{\epsilon_n}) \subset\subset U_n$$

et

$$\|u_n - j_{\epsilon_n} * u_n\|_{m,\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2^n} \qquad (\epsilon > 0)$$

(en effet u_n est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ donc $D^\alpha(j_\eta * u_n) = j_\eta * D^\alpha u_n$, et la propriété 3 de (0.2) donne

$$\|D^\alpha u_n - j_\eta * D^\alpha u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\eta\to 0]{} 0 \text{).}$$

La fonction $v = \sum_n j_{\epsilon_n} * u_n$ est alors dans $C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et on a $\|v-u\|_{m,\Omega} \leq \epsilon$.

Remarques :

1) Si la fonction u est à support compact dans Ω, la fonction v construite ci-dessus est dans $C^\infty_c(\Omega)$. Toute fonction de $H^m(\Omega)$ à support compact dans Ω est donc limite de fonctions de $C^\infty_c(\Omega)$. Mais $C^\infty_c(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^m(\Omega)$, sa fermeture $H^m_o(\Omega)$ est l'espace des fonctions nulles ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m sur le bord de Ω (si l'ouvert Ω est assez régulier).

2) Si l'ouvert Ω a une frontière de classe C^o on peut montrer que les restrictions à Ω des fonctions de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $H^m(\Omega)$.

Nous énonçons maintenant deux conséquences immédiates du théorème 2.

Théorème 3. - (Règle de Leibniz). Si $u \in H^m(\Omega)$, et si $v \in C^m_b(\Omega)$ (c. a. d. v est dans $C^m_{loc}(\Omega)$, et ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées dans Ω), alors :

1) $u\,v \in H^m(\Omega)$

2) $D^\alpha (u\,v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \quad D^{\alpha-\beta} v.$

Ce résultat est immédiat si $u \in C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et on achève la démonstration en utilisant le théorème 2.

Théorème 4 : (invariance des espaces H^m_{loc} par difféomorphismes). Ω_1 et Ω_2 désignent deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on suppose qu'il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ de Ω_1 sur Ω_2, alors

1) $f \in H^m_{loc}(\Omega_2)$ est équivalent à $f \circ \varphi \in H^m_{loc}(\Omega_1)$

2) si $\Omega'_1 \subset\subset \Omega_1$ et $\Omega'_2 = \varphi(\Omega'_1)$, il existe une constante **c** ne dépendant que de (Ω'_1, φ) telle que

$$\|f \circ \varphi\|_{m,\Omega'_1} \leq c \, \|f\|_{m,\Omega'_2} \qquad \text{pour tout } f \in H^m(\Omega'_2) .$$

Démonstration Il est immédiat qu'il existe une constante c telle que

$$\|f \circ \varphi\|_{m,\Omega'_1} \leq c \, \| f \|_{m,\Omega'_2} \qquad \text{pour tout } f \in C^m_{loc}(\Omega'_2) ,$$

on achève la démonstration en utilisant le théorème 2.

I . 2 . REGULARITE DES FONCTIONS DE $H^m_{loc}(\Omega)$.

Théorème 5 : Supposons $m > \frac{n}{2}$, et soit $j = m - [\frac{n}{2}] - 1$ le plus grand entier majoré par $m - \frac{n}{2}$, alors $H^m_{loc}(\Omega)$ est contenu dans $C^j_{loc}(\Omega)$.

Démonstration Il suffit de montrer que $H^m(\mathbb{R}^n)$ est contenu dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si u est dans $H^m_{loc}(\Omega)$, φu est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ donc dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, et donc $u \in C^j_{loc}(\Omega)$.

Nous commençons par donner une caractérisation de $H^m(\mathbb{R}^n)$: Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{u}$ sa transformée de Fourier ; la fonction u appartient à $H^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si on a $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$; et les normes $u \to \|u\|_{m,\mathbb{R}^n}$ et $u \to \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ sont équivalentes. En effet, soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$, u est en particulier une distribution tempérée, et ses dérivées $D^\alpha u$ ont pour transformées de Fourier les fonctions $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$. La relation $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m |\hat{u}|(\xi)|^2 d\xi < +\infty$ est donc équivalente à $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\alpha, |\alpha| \leq m)$, c'est à dire $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\alpha, |\alpha| \leq m)$; et les deux normes considérées sont évidemment équivalentes sur $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Considérons maintenant une fonction u appartenant à $H^m(\mathbb{R}^n)$ et soit $j = m - [\frac{n}{2}] - 1 \geq 0$; la fonction $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{m/2}} (1+|\xi|^2)^{m/2} \hat{u}(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\alpha, |\alpha| \leq j$ et la transformation de Fourier inverse donne pour $D^\alpha u$:

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i<x,\xi>} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)\, d\xi , \quad |\alpha| \leq j ;$$

u est donc dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$

c. q. f. d.

1. 3. THEOREMES DE RELLICH

Le théorème de Rellich proprement dit est le théorème suivant relatif à l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$.

Théorème 6. - Soit Ω un ouvert borné dont la frontière est de classe C^{o}. Alors l'injection de $H^{m}(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compacte (on suppose $m \geq 1$).

Nous nous contenterons d'une variante plus faible et beaucoup plus facile à démontrer :

Théorème 7. - Soit Ω un ouvert borné, et $H_o^m(\Omega)$ la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$; l'injection de $H_o^m(\Omega)$ dans $H_o^{m-1}(\Omega)$ est compacte $(m \geq 1)$.

Démonstration : Plongeons l'ouvert Ω dans un cube Q que l'on supposera être d'arête unité ($\Omega \subset\subset Q$). Toute fonction u de $C_c^\infty(\Omega)$ se prolonge en une fonction de $C_c^\infty(Q)$ (en prenant $u = o$ sur $Q \setminus \Omega$) puis en une fonction périodique de période 1. Si $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} b_\xi \, e^{2\pi i <x, \xi>}$ est le développement de u en série de Fourier, on a :

$$\int_Q |D^\alpha u|^2 \, dx = \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx = (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_\xi |b_\xi|^2 \xi^{2\alpha}$$

et

$$\|u\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_\xi |b_\xi|^2 \xi^{2\alpha} \quad (u \in C_c^\infty(\Omega)).$$

Les normes $\|u\|_{m,\Omega}$ et $\|u\|_m^{\#} = [\, |b_{o,\ldots,o}|^2 + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |b_\xi|^2 \, |\xi|^{2m}]^{1/2}$

sont donc équivalentes sur $C_c^\infty(\Omega)$.

Prenons maintenant une suite bornée (u_j) dans $H_o^m(\Omega)$, et montrons que l'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente dans $H_o^{m-1}(\Omega)$. $C_c^\infty(\Omega)$ étant dense dans $H_o^m(\Omega)$, on peut toujours se ramener au cas où les u_j sont dans $C_c^\infty(\Omega)$; soient $(b_{j\xi})_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ les coefficients de la série de Fourier associée à u_j. Pour chaque ξ, la suite $(b_{j\xi})_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée (car $\sup_j \|u_j\|_m^{\#} \leq A < +\infty$) , et on peut par un procédé de diagonalisation extraire une sous-suite notée encore $(b_{j\,\xi})$ telle que pout tout ξ la suite $(b_{j\,\xi})_{j \in \mathbb{N}}$ converge. On a alors pout tout r

$$\|u_i - u_j\|_{m-1}^{\#^2} = |b_{j,o} - b_{i,o}|^2 + \sum_{|\xi| \leq r} |b_{j\,\xi} - b_{i\,\xi}|^2 |\xi|^{2m-2}$$

$$+ \sum_{|\xi| > r} |b_{j\,\xi} - b_{i\,\xi}|^2 |\xi|^{2m-2}$$

où le premier terme tend vers o lorsque i et j tendent vers o , et le second terme est majoré par $\frac{1}{r^2} [\|u_j\|_m^{\#^2} + \|u_i\|_m^{\#^2}] \leq \frac{2\,A^2}{r^2}$.

Et la suite (u_j) est une suite de Cauchy dans $H_o^{m-1}(\Omega)$, donc une suite convergente.

c. q. f. d.

1 . 4 . INEGALITES RELATIVES AUX DIFFERENCES FINIES, CONSEQUENCES. (Méthode de Niremberg)

Ce qui suit prépare l'étude de la régularité des solutions des équations différentielles (voir le paragraphe (3.4.)).

Soit $\vec{e}$ un vecteur unitaire, et h un nombre réel. Si $u \in L^2(\Omega)$ on pose

$$\delta_{\vec{e},h} = \frac{u(x+h\,\vec{e}) - u(x)}{h} \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } d(x, \complement\,\Omega) > h .$$

Si $\vec{e_i}$ est le vecteur unitaire dirigé dans la direction des x_i , on note

$$\delta_h^i\, u = \delta_{\vec{e_i},h}\, u$$

<u>Lemme 1</u> : Soient $u \in H^m(\Omega)$ $(m \geq 1)$ et Ω' un ouvert $(\Omega' \subset\subset \Omega)$, on a alors pour

tout $h < d(\overline{\Omega}', \complement\Omega)$

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Démonstration : Il suffit de montrer cette inégalité pour les fonctions $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$.

1) Commençons par les fonctions d'une seule variable : soit $f \in C^1(]a, b+h[)$, on a pour $x \in]a, b[$

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\xi)\, d\xi$$

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq h \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi$$

et

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^2\, dx \leq h \int_a^b dx \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$h \int_a^{a+h} d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_a^\xi dx + h \int_{a+h}^b d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_{\xi-h}^\xi dx + h \int_b^{b+h} d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_{\xi-h}^b dx$$

$$= h^2 \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi .$$

2) Plaçons nous maintenant dans $\mathbb{R}^n$, on a pour tout α, $|\alpha| \leq m-1$:

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha \delta_h^i u|^2\, dx = \int_{\Omega'} |\delta_h^i D^\alpha u|^2\, dx \leq \int_\Omega |D_i D^\alpha u|^2\, dx$$

et donc $\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega}$.

c. q. f. d.

Lemme 2 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\{u_k\}$ une suite bornée de fonctions de $H^m(\Omega)$. Si u est valeur d'adhérence faible de $\{u_k\}$ dans $L^2(\Omega)$ u est dans $H^m(\Omega)$, et pour tout α, $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ est limite faible dans $L^2(\Omega)$ des $D^\alpha u_{k_i}$ ($\{u_{k_i}\}$ désigne une sous suite de $\{u_k\}$ convergent faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$).

Démonstration : Soit α un multi-indice satisfaisant à $|\alpha| \le m$, la suite $D^{\alpha} u_{k_i}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et admet donc une valeur d'adhérence faible u_α . Il est alors immédiat que $u_\alpha = D^\alpha u$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 8. - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in H^m(\Omega)$ et s'il existe une constante C telle que pour tout Ω' , $\Omega' \subset\subset \Omega$ on ait $\|\delta_h^i u\|_{m,\Omega'} \le C$ pour h assez petit et $i = 1, \ldots, n$ alors $u \in H^{m+1}(\Omega)$ et $\|D_i u\|_{m,\Omega} \le C \quad i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. - Le lemme 2 assure l'existence d'une suite h_k $(h_k \to 0)$ et de fonctions $u_i \in H^m(\Omega')$ telles que $\delta^i_{h_k} u \underset{k\to+\infty}{\to} u_i$ faiblement dans $L^2(\Omega')$ $i=1,\ldots,n$.

On a alors pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$.

$$\int_{\Omega'} u_i \varphi \, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega'} \delta^i_{h_k} u \varphi \, dx = -\lim_{k\to+\infty} \int u \, \delta^i_{-h_k} \varphi \, dx = -\int_{\Omega'} u \, D_i \varphi \, dx$$

la fonction u est donc dans $H^{m+1}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$. On a de plus $\|D_i u\|_{m,\Omega'} = \|u_i\|_{m,\Omega'} \le C$ pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$; on a donc $\|D_i u\|_{m,\Omega} \le C$ et u est dans $H^{m+1}(\Omega)$.

2 . ESPACES H^m_{loc} SUR UNE VARIETE COMPACTE

On définit les espaces H^m_{loc} sur une variété compacte M , et on étudie, comme dans le cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, la régularité des fonctions de $H^m_{loc}(M)$ et la compacité de l'injection de $H^m_{loc}(M)$ dans $H^{m-1}_{loc}(M)$.

2 . 1. VARIETE DE CLASSE C^∞

On renvoie pour la définition des variétés sans bord de classe C^∞ et des fonctions de classe C^p sur une variété à l'appendice dans lequel on trouvera aussi le théorème d'existence de partitions de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert ; dans la suite toutes les notations employées seront celles de l'appendice et on supposera toujours que la variété M est compacte.

2 . 2 . ESPACE $L^2_{loc}(M)$.

Définitions :

1) $L^2_{loc}(M)$ est l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions u définies sur M et à valeurs réelles, telles que

$$u \circ \chi^{-1} \in L^2_{loc}(\chi(U)) \text{ pour toute carte locale } (U , \chi)$$

2) On munit $L^2_{loc}(M)$ de la topologie définie par les semi-normes $u \to \|\varphi\, u \circ \chi^{-1}\|_{L^2_{loc}(\chi(U))}$ où (U , χ) parcourt l'ensemble des cartes locales et φ parcourt $C^\infty_c(U)$.

On a facilement en utilisant le théorème 4 de (1. 1) avec m = o :

1) Pour que $u \in L^2_{loc}(M)$, il suffit que la relation $u \circ \chi^{-1} \in L^2_{loc}(\chi(U))$ soit satisfaite pour une famille de cartes locales dont les ouverts de définition recouvrent M.

2) Pour définir la topologie de $L^2_{loc}(M)$ il suffit de considérer les semi-normes

$$u \to \|\varphi\, u \circ \chi^{-1}\|_{L^2(\chi(U))} \qquad \varphi \in C^\infty_c(\chi(U))$$

pour une famille (U, χ, φ) telle que les ensembles $\Omega_\varphi = \{\varphi \circ \chi \neq o\}$ recouvrent M.

Comme la variété M est supposée compacte, on a en fait $u \circ \chi^{-1} \in L^2(\chi(U))$ pour toute fonction $u \in L^2_{loc}(M)$ et toute carte locale (U, χ) , de plus $L^2_{loc}(M)$ est topologiquement identique à l'espace de Hilbert $L^2(M, \tau_g)$ où g est une métrique Riemannienne quelconque et τ_g la mesure de Radon sur M associée (mais il n'y a pas de norme hilbertienne privilégiée sur $L^2_{loc}(M)$

2 . 3 . ESPACES H^m_{loc} (M)

Définitions :

1) On désigne par $H^m_{loc}(M)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions $u \in L^2_{loc}(M)$ telles que, pour toute carte locale (U, χ) on ait $u \circ \chi^{-1} \in H^m_{loc}(\chi(U))$.

2) On munit $H^m(M)$ de la topologie définie par les semi-normes $u \to \|\varphi\, u \circ \chi^{-1}\|_{m, \chi(U)}$ où (U, χ) parcourt l'ensemble des cartes locales et φ parcourt $C^\infty_c(U)$.

Le théorème 4 de (1 . 1) nous donne immédiatement :

1) Pour que $u \in H^m_{loc}(M)$ il suffit que la relation $u \circ \chi^{-1} \in H^m_{loc}(\chi(U))$ soit valable pour une famille de cartes locales dont les ouverts de définition recouvrent M .

2) De même pour définir la topologie de $H^m_{loc}(M)$ il suffit de considérer les semi-normes $u \to \|\varphi\, u \circ \chi^{-1}\|_{m, \chi(U)}$, $\varphi \in C^\infty_c(U)$ pour une famille (U, χ, φ) telle que les ensembles $\Omega_\varphi = \{\varphi \circ \chi \neq o\}$ recouvrent M .

On a convenu de ne considérer que les variétés M compactes. Pour une telle variété on a $u \circ \chi^{-1} \in H^m(\chi(U))$ pour toute carte locale (U, χ) et toute fonction $u \in H^m_{loc}(M)$. D'autre part si $(U_j)_{j = 1, \ldots, k}$ est un recouvrement fini de M par des ouverts de définition de cartes locales et $(\varphi_j)_{j=1, \ldots, k}$ une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à $(U_j)_{j = 1, \ldots, k}$, la topologie de $H^m_{loc}(M)$ est définie par l'une quelconque des normes équivalentes

$$u \to \left(\sum_{j=1}^{k} \|(\varphi_j\, u) \circ \chi_j^{-1}\|^2_{m, \chi_j(U_j)} \right)^{1/2}$$

$$u \to \left(\sum_{j=1}^{k} \|u \circ \chi_j^{-1}\|^2_{m, \chi_j(U_j)} \right)^{1/2}$$

Dans la suite on emploiera, selon les situations, l'une ou l'autre de ces normes.

Théorème 9. - $H^m_{loc}(M)$ est un espace hilbertisable et $C^\infty(M)$ est dense dans $H^m_{loc}(M)$.

Démonstration :

1) Pour tout choix d'un recouvrement $(U_j)_{j=1,\dots,k}$ de M par des ouverts de définition de cartes locales on peut définir un produit préhilbertier

$$(u,v)_{m,M} = \sum_{j=1}^{k} (u \circ \chi_j^{-1}, v \circ \chi_j^{-1})_{m,\chi_j(U_j)}$$

compatible avec la topologie de $H^m_{loc}(M)$. Si u_n est une suite de Cauchy dans $H^m_{loc}(M)$, chaque suite $(u_n \circ \chi_j^{-1})$ est de Cauchy dans $H^m(\chi_j(U_j))$ et converge donc vers un élément $u_j \in H^m(\chi_j(U_j))$. La relation

$$(u_n \circ \chi_j^{-1}) \circ \chi_j \circ \chi_i^{-1} = u_n \circ \chi_i^{-1} \qquad \text{(presque sûrement sur } \chi_i(U_i \cap U_j))$$

passe à la limite et les $(u_j)_{j=1,\dots,k}$ définissent bien un élément de $H^m_{loc}(M)$ qui est la limite de la suite u_n dans $H^m_{loc}(M)$. Toutefois $H^m_{loc}(M)$ n'est pas un espace de Hilbert car il ne possède pas de produit hilbertien intrinsèque.

2) Soient $u \in H^m_{loc}(M)$ et $u_j = (\varphi_j u) \circ \chi_j^{-1}$, $j=1,\dots,k$ ((φ_j) est une partition de l'unité subordonnée aux (U_j)) ; u_j est à support compact dans $\chi_j(U_j)$ et donc approchable par des fonctions $v_{j,n} \in C_c^\infty(\chi_j(U_j))$ ($\|u_j - v_{j,n}\|_{m,\chi_j(U_j)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$) ; $v_{j,n}$ se transporte sur M en une fonction $v'_{j,n} \in C_c^\infty(U_j)$ et la suite $v_n = \sum_{j=1}^{k} v'_{j,n}$ tend vers u dans $H^m_{loc}(M)$.

c. q.f. d.

Théorème 10. - Si M est une variété compacte de classe C^∞, de dimension n, si m est un entier $> \frac{n}{2}$ et si $j = m - [\frac{n}{2}] - 1$, on a $H^m_{loc}(M) \subset C^j_{loc}(M)$.

Ce théorème se déduit immédiatement du théorème analogue démontré pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 11. - L'injection de $H^m_{loc}(M)$ dans $H^{m-1}_{loc}(M)$ est compacte.

Démonstration : Soit B un ensemble borné de $H^m_{loc}(M)$ et $B_j = \{(\varphi_j u) o \chi_j^{-1}$; $u \in B\}$ $j = 1, \dots, k$ (les triplets (U_j, χ_j, φ_j) sont choisis comme dans (2.3)). Chaque ensemble B_j est un sous-ensemble borné de $H^m_o(\chi_j(U_j))$ et est donc relativement compact dans $H^{m-1}_o(\chi_j(U_j))$. Les ensembles $B'_j = \{\varphi_j u, u \in B\}$ sont alors relativement compact dans $H^m_{loc}(M)$, ainsi que

$$B = B'_1 + \dots + B'_k$$

c. q. f. d.

3 . EQUATION DIFFERENTIELLE ELLIPTIQUE D'ORDRE 2 SUR UNE VARIETE COMPACTE.

On définit une classe d'opérateurs différentiels linéaires elliptiques d'ordre 2 sur une variété (opérateurs de type (A)) et on étudie l'équation différentielle

$$Pu = f$$

où P est un opérateur de type (A) , f une fonction donnée de $L^2_{loc}(M)$ et u une fonction inconnue de $H^2_{loc}(M)$.

3 . 1. OPERATEURS DIFFERENTIELS LINEAIRES SUR UNE VARIETE.

Définitions :

1) Un opérateur différentiel linéaire d'ordre ℓ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est un opérateur

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x) \; D^\alpha$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions à valeurs réelles définies sur Ω , mesurables et bornées.

2) On appellera ici opérateur différentiel linéaire d'ordre ℓ sur une variété M une application linéaire de $H^{\ell}_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$, telle que pour toute carte locale (U, χ) de M il existe un opérateur différentiel d'ordre ℓ P^{χ} sur U tel que

$$Pu(x) = P^{\chi}(u \circ \chi^{-1})(\chi(x)) \qquad \text{sur } U$$

3 . 2 . PARTIE PRINCIPALE D'UN OPERATEUR D'ORDRE ℓ ; OPERATEURS ELLIPTIQUES

Nous introduisons la partie principale d'un opérateur, qui rend intrinsèque la notion de terme de plus haut degré.

Théorème 12. - Si P est un opérateur différentiel d'ordre $\ell \geq 1$ sur M, il existe un champ de ℓ - tenseurs contravariants symétriques π et un seul tel que, $\forall u \in C^{\ell}_{loc}(M)$ et $\forall v \in C^{\ell}_{loc}(M)$ la fonction

$$(*) \qquad \alpha \to e^{-\alpha\, v(x)}\, P(u\, e^{\alpha\, v})(x) - \alpha^{\ell}\, u(x)\, \pi_x(dx\, v, \dots, dx\, v)$$

soit un polynôme de degré ℓ-1 . π s'appelle la partie principale de l'opérateur P . Pour que π soit nulle, il faut et il suffit que P soit d'ordre ℓ-1 .

Démonstration : Nous ne démontrons ce théorème que dans le cas particulier où $\ell = 2$. Considérons donc un opérateur différentiel linéaire P d'ordre 2 sur la variété M . Si (U,χ) est une carte locale de M, nous écrirons toujours les coefficients de P (relativement à (U, χ)) sous la forme "avec répétition et symétrie" en posant

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{\chi} \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i\, \partial \chi^j} + \sum_{i=1}^{n} a^{i}_{\chi} \frac{\partial u}{\partial \chi^i} + au \qquad u \in H^2_{loc}(M) \quad x \in U$$

où

$$a^{ij}_{\chi}(x) = a^{ji}_{\chi}(x) = \frac{1}{2}\, P\left[(\chi^i - \chi^i(x))(\chi^j - \chi^j(x)) \right](x) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

$$a_\chi^i (x) = P [(\chi^i - \chi^i (x)] (x) \qquad 1 \leq i \leq n .$$

$$a(x=) = P\, 1 (x)$$

On vérifie facilement que, si $(\hat{U}, \hat{\chi})$ est une autre carte locale de M, et si $x \in U \cap \hat{U}$, on a

$$a_{\hat{\chi}}^{k\ell} (x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_\chi^{ij} (x) \frac{\partial \hat{\chi}^k}{\partial \chi^i} (x) \frac{\partial \hat{\chi}^\ell}{\partial \chi^j} (x) \qquad 1 \leq k, \ell \leq n$$

Donc si α et β sont deux éléments de $T_x^*(M)$ $(x \in U)$, la quantité $\sum_{i,j=1}^{n} a_\chi^{ij} (x) \alpha_i \beta_j$ (où $\alpha_i = < \alpha, (\frac{\partial}{\partial \chi^i})_x >$, $\beta_j = < \beta, (\frac{\partial}{\partial \chi^j})_x >$ sont les composantes de α et β relativement à la carte locale (U, χ)) est indépendante de la carte locale (U, χ) au voisinage de x. Il existe donc un champ de 2 - tenseurs contravariants symétriques π sur M dont les composantes par rapport à la carte locale (U, χ) sont les coefficients a_χ^{ij}.

$$\pi_x (d_x \chi^i, dx\, \chi^j) = a_\chi^{ij} (x) \qquad , 1 \leq i, j \leq n, \quad x \in U .$$

Une simple vérification montre que π satisfait à la relation (✱) , et que tout champ π satisfaisant à (✱) satisfait aussi à :

$$u(x)\, \pi_x (d_x v, \ldots, d_x v) = \lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ \lambda > o}} - \lambda^{-2} e^{-i\lambda\, v(x)} P(ue^{i\lambda v}) (x) \quad .$$

D'où l'unicité de π . Il est enfin clair que $\pi = o$ si et seulement si P est d'ordre 1 .

<u>Définitions</u> :

1) Un opérateur du second ordre P sur la variété M est dit elliptique si sa partie principale π vérifie

$$\pi_x (\omega, \omega) > o \qquad \forall x \in M , \quad \forall \omega \in T_x^* (M) , \quad \omega \neq o$$

2) On appellera ici opérateur de type (A)[1], tout opérateur P donné sous la forme

$$Pu = \Delta_g u + \langle du , X \rangle + c\, u \qquad\qquad u \in H^2_{loc}(M)$$

où g est une métrique Riemannienne de classe C^1, X un champ de vecteur de classe C^1, et c une fonction mesurable bornée sur M. Tout opérateur de type (A) est elliptique (voir la forme de Δ_g en (4. 12) appendice).

On se propose d'étudier le problème suivant

(1) Soit P un opérateur de type (A), et f une fonction donnée de $L^2_{loc}(M)$, existe-t-il une fonction $u \in H^2_{loc}(M)$ telle que

$$Pu = \Delta_g u + \langle du, X \rangle + c\, u = f$$

et cette solution est-elle unique ?

Nous allons poser ce problème d'une manière différente :

3 . 3 . FORME BILINEAIRE ASSOCIEE A L'OPERATEUR P

Considérons pour $u \in H^2_{loc}(M)$ et $v \in C^\infty_{loc}(M)$ l'expression

$$a(u, v) = -\int_M Pu \,.\, v\, d\tau_g = -\int_M (\Delta_g u + \langle du, X\rangle + c\, u)\, v\, d\tau_g$$

$$= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g v)\, d\tau_g - \int_M (\langle du, X\rangle + c\, u)\, v\, d\tau_g$$

Sous cette dernière forme $a(u, v)$ se prolonge en une forme bilinéaire sur $H^1_{loc}(M) \times H^1_{loc}(M)$. Et pour une fonction $u \in H^2_{loc}(M)$ les relations

---

(1) (A) Parce que de tels opérateurs admettent un opérateur adjoint pour le produit $\int_M u\, v\, d\tau_g$, $P^* u = \Delta_g u - \langle du, X\rangle + (c - \operatorname{div}_g X)\, u$.

"$Pu = f$" et "$a(u, v) = (f, v) \ \forall v \in H^1_{loc}(M)$" sont équivalentes. Considérons le problème suivant :

(2) Etant donné une fonction $f \in L^2_{loc}(M)$ existe-t-il une fonction $u \in H^1_{loc}(M)$ telle que $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_{loc}(M)$.

Si nous montrons que toute solution u de (2) est en réalité dans $H^2_{loc}(M)$, nous saurons que les problèmes (1) et (2) sont équivalents. C'est ce que nous ferons au paragraphe (3.4) .

Voici maintenatnt une remarque qui nous servira en (3.4) et (3.5) :

Si (U, χ) est une carte locale de M , il existe, puisque g est une métrique Riemannienne de classe C^1 , et que M est compacte , une constsnte $K_U > o$ telle que l'on ait

$$g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u) \geq K_U \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^i}\right)^2 \quad \text{p.p. sur } U, \quad u \in H^2_{loc}(M)$$

Et si $(U_j)_{j=1,\ldots,k}$ est le recouvrement ouvert de M considéré en (2.6) on a :

$$\int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g \geq K \left(\sum_{i=1}^{k} \left| u \circ \chi_j^{-1} \right|^2 {}_{1,\, \chi_j(U_j)} \right)$$

où K est une constante $> o$.

3 . 4 . REGULARITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME (2)

Théorème 12. - Soit $a(u, v)$ la forme bilinéaire sur $H^1_{loc}(M) \times H^1_{loc}(M)$ associée comme en (3.3) à un opérateur de type (A) . Si une fonction $u_o \in H^1_{loc}(M)$ vérifie l'équation

$$a(u_o, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_{loc}(M) \quad (f \text{ est une fonction donnée de } L^2_{loc}(M))$$

alors u_o est dans $H^2_{loc}(M)$.

Démonstration : Pour montrer que u_o appartient à $H^2_{loc}(M)$, il suffit d'étudier les restrictions de u_o aux ouverts U de définition des cartes locales et de montrer que

$$u'_o = u_o \circ \overset{-1}{\chi} \in H^2_{loc}(\chi(U)) \ .$$

Posons $\Omega = \chi(U)$ et considérons sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$B(u', v') = \sum_{i,j} \int_\Omega g^{ij}(x) \sqrt{g^\chi(\overset{-1}{\chi}(z))} \quad \frac{\partial u'}{\partial z^i} \frac{\partial v'}{\partial z^j} \, dz$$

(les fonctions g^{ij} et g^χ ont le sens donné au n° 4.8 de l'appendice). On a pour B les inégalités suivantes

$$- \qquad B(u', u') \geq K_U \, |u'|^2_{1,\Omega} \qquad\qquad \forall u' \in H^1(\Omega)$$

$$- \qquad |B(u'_o, v')| = \left| \int_U g(\operatorname{grad}_g u_o, \operatorname{grad}_g v' \circ \chi) \, d\tau_g \right|$$

$$= \left| \int_U \langle du_o, X \rangle V' \circ \chi \, d\tau_g + \int_U (c+f) \, u \, v' \circ \chi \, d\tau_g \right)$$

$$\leq D \, \|v'\|_{o,\Omega} \qquad , \forall v' \in C^\infty_c(\Omega)$$

où D est une constante dépendant de g, X, c, f, U et $\|u_o\|_{1,M}$; le fait que u'_o soit dans $H^2_{loc}(\Omega)$ résulte alors du théorème suivant .

Théorème 13.- Soit Ω un ouvert de R^n et

$$B(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial v}{\partial x^j} \, dx$$

une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. On suppose

1) il existe des constantes E et $\lambda (E > o)$ telles que

$$|B(u, u)| \geq E \, \|u\|^2_{1,\Omega} - \lambda \, \|u\|^2_{o,\Omega} \quad \text{(Inégalité de Garding)}$$

2) Les coefficients a^{ij} sont de classe C^1 dans Ω .

Alors, si une fonction $u_o \in H^1(\Omega)$ satisfait à $|B(u_o, v)| \leq D \|v\|_{o,\Omega}$ pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (D est une constante) elle est dans $H^2_{loc}(\Omega)$.

Démonstration :

1) Considérons deux ouverts Ω' et Ω'' de Ω tels que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, égale à 1 dans Ω' et à zéro hors de Ω'' ; on veut montrer que $u_o \in H^2_{loc}(\Omega)$ ou encore que $\varphi u_o \in H^2(\Omega)$. D'après le théorème 7 de (1.4) , il suffit de montrer que les fonctions $\delta_h^\ell(\varphi u_o)$ ($\ell = 1, \ldots, n$) sont pour h assez petit dans $H^1(\Omega)$ et que les quantités $\|\delta_h^\ell(\varphi u_o)\|_{1,\Omega}$ sont uniformément bornées en h .

2) Dans la suite de cette démonstration l'indice ℓ sera fixe, et on posera, pour $h < d(\overline{\Omega}', \complement\Omega)$ $u_h = \delta_h^\ell(\varphi u_o)$. L'expression " ste" désignera une constante quelconque ne dépendant que de Ω, Ω', φ, a^{ij}, et qui pourra varier d'une ligne à l'autre.

Pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ on a

$$B(v, u_h) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} \delta_h^\ell \left(\frac{\partial(\varphi u_o)}{\partial z^j}\right) dz$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} \left[\delta_h^\ell \left(\varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) + \delta_h^\ell \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right)\right] dz$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i} \delta_h^\ell \left(a^{ij} \varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) dz + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \delta_h^\ell \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right) a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} dz$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i} \varphi(z + h e_i) \frac{\partial u_o}{\partial z^j}(z + h e_i) \delta_h^\ell(a^{ij}) dz$$

Toutes les intégrations ont en réalité lieu dans un voisinage Ω''_h d'ordre h de Ω'' ; choisissons un $h_o > o$ tel que $\Omega''_{2h_o} \subset\subset \Omega$, l'on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i}\, \delta_h^\ell \left(a^{ij} \varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) dz = - \int_\Omega \delta_{-h}^\ell \left(\frac{\partial v}{\partial z^i}\right) a^{ij} \varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\, dz$$

$$= \int_\Omega \delta^\ell_{-h}(v) \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}\, a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\, dz - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z^i}(\varphi \delta^\ell_{-h} v)\, a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\, dz$$

Comme les fonctions a^{ij} sont dans $C^1(\Omega)$, les fonctions $a^{ij}(z)$, et $\delta_\ell^h\, a^{ij}(z)$ sont uniformément bornées en z et en h pour $z \in \Omega''_{h_o}$ et $h < h_o$, ce qui entraine les inégalités suivantes :

1) $\left| \int_\Omega \delta_h^\ell \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right) a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i}\, dz \right| \leq \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega}\, \|\delta_h^\ell (\frac{\partial \varphi}{\partial z_j} u_o)\|_{o,\Omega'_h}$

$\leq \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega}\, \|u_o\|_{1,\Omega}$ (d'après le lemme 2 de (1.4)).

2) $\left| \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i}\, \varphi(z + h e_i) \frac{\partial u_o}{\partial z^j}(z + h e_i)\, \delta_h^\ell (a^{ij})\, dz \right| \leq \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega}\, \|u_o\|_{1,\Omega}$

3) $\left| \int_\Omega \delta_{-h}^\ell (v) \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}\, a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\, dz \right| \leq \text{cste}\, \|\delta_{-h}^\ell v\|_{o,\omega''}\, \|u_o\|_{1,\Omega}$

$\leq \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega}\, \|u_o\|_{1,\Omega}$

et finalement on obtient :

$$|B(v, u_h)| \leq |B(\varphi\, \delta_{-h}^\ell v, u_o)| + \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega}\, \|u_o\|_{1,\Omega}$$

$$\leq \text{cste}\, \|v\|_{1,\Omega} (D + \|u_o\|_{1,\Omega}) .$$

3) La fonction u_h nulle hors d'un compact de Ω est limite dans $H^1(\Omega)$ de fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ (voir la remarque suivant le théorème 2 de (1. 1)), l'inégalité ci-dessus est donc encore valable pour $v = u_h$. Et l'on a :

$$E\, \|u_h\|^2_{1,\Omega} - \lambda\, \|u_h\|^2_{o,\Omega} \leq |B(u_h, u_h)| \leq \text{cste}\, (D + \|u_o\|_{1,\Omega})\, \|u_h\|_{1,\Omega} .$$

ou encore :

$$E \|u_h\|^2_{1,\Omega} \le \text{cste } (D + \|u_o\|_{1,\Omega}) \|u_h\|_{1,\Omega} + \lambda \|u_h\|_{1,\Omega} \|u_h\|_{o,\Omega}$$

$$\le \text{cste } (D + \|u_o\|_{1,\Omega} + \lambda \|u_h\|_{o,\Omega}) \|u_h\|_{1,\Omega}$$

$$\le \text{cste } (D + \|u_o\|_{1,\Omega}) \|u_h\|_{1,\Omega}$$

(car $\|u_h\|'_{o,\Omega} = \|u_h\|_{o,\Omega'} \le \|u_o\|_{1,\Omega}$)

et donc

$$\|u_h\|_{1,\Omega} \le \text{cste } (D + \|u_o\|_{1,\Omega})$$

c. q. f. d.

3 . 5 . EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR LE PROBLEME (2)

Nous commençons par un théorème élémentaire.

Théorème 14. - (Théorème de Lax Milgram) Soit H un espace de Hilbert et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue sur H de norme M telle que

$$|a(u,u)| \ge \alpha \|u\|^2 \qquad (\alpha > o) \qquad \forall u \in H$$

Il existe alors un opérateur continu A unique de H sur H tel que

$$a(Au, v) = \langle u, v \rangle \qquad \forall\, u, v \in H$$

Démonstration : Pour tout $u \in H$, il existe un élément $A'u$ unique tel que $a(u,v) = \langle A'u, v\rangle$; l'application $u \to A'u$ est linéaire et de norme plus petite que M ($|\langle A'u, v\rangle| = |a(u,v)| \le M \|u\| . \|v\|$). Elle est de plus injective ($\alpha \|u\|^2 \le |a(u,u)| \le M \|A'u\| . \|u\|$) . A' est donc une bijection continue de H sur A' (H). Soit A l'application inverse de A' sur A'(H) . On a si $w \in A'(H)$ et $u = A\,w$

$$\alpha\ \|u\|^2 \leq |a(u,u)| = |\langle A\,w, u\rangle| = \langle w, u\rangle \leq \|w\|\ \|u\| \ .$$

A est donc continue de norme $\leq \frac{1}{\alpha}$ et se prolonge en une application continue de $\overline{A'}(H)$ sur H. Mais $H = \overline{A'}(H)$ (car $\langle A'u, v\rangle = o\ \forall u \in H \Rightarrow \alpha\ \|v\|^2 \leq |\langle A'v, v\rangle| = o$)

c. q. f. d.

Théorème 14. - Considérons sur une variété M compacte un opérateur différentiel elliptique P de type (A)

$$Pu = \Delta_g u + \langle du, X\rangle + c\,u$$

On suppose qu'il existe une constante $\lambda_o > o$ telle que $\frac{1}{2} \operatorname{div}_g X - c > \lambda_o > o$. Alors pour toute fonction $f \in L^2_{loc}(M)$ l'équation $Pu = f$ a une et une seule solution $u \in H^2_{loc}(M)$.

Démonstration : La forme bilinéaire $a(u,v)$ définie sur $H^1_{loc}(M)$ en (3. 3) satisfait évidemment à la condition

$$|a(u,v)| \leq \text{cste}\ \|u\|_{1,M}\ \|v\|_{1,M}$$

On a d'autre part

$$a(u,u) = \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g - \int_M u\langle du, X\rangle\, d\tau_g - \int_M c u^2\, d\tau_g$$

$$= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g - \frac{1}{2}\int_M \langle du^2, X\rangle d\tau_g - \int_M c u^2\, d\tau_g$$

$$= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g + \int_M \left(\frac{1}{2} \operatorname{div}_g X - c\right) u^2\, d\tau_g$$

(utiliser la relation $\operatorname{div}_g (u^2 X) = \langle X, du^2\rangle + u^2 \operatorname{div}_g X$)

et

$$a(u,u) \geq K \sum_{j=1}^{k} |u \circ \chi_j^{-1}|^2_{1,\chi_j(U_j)} + \frac{\lambda_o}{k} \sum_{j=1}^{k} |u \circ \chi_j^{-1}|^2_{o,\chi_j(U_j)} \geq \alpha \|u\|^2_{1,M}$$

$(K > 0$ et $\alpha > 0)$

Et il suffit d'utiliser le théorème de Lax Milgram pour conclure.

3 . 6 . INDICE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL DE TYPE (A)

Définitions: Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et A une application linéaire de E dans F ; l'opérateur A admet un indice si $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Coker} A$ sont de dimensions finies ; l'indice de A est alors

$$i(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A .$$

Propriété :(1) Soient E et F deux espaces de Banach, si A est un opérateur à indice, et J un opérateur compact de E dans F, $A + J$ est un opérateur à indice et $i(A + J) = i(A)$.

On a alors pour les opérateurs différentiels de type (A) le théorème suivant:

Théorème 15. - Tout opérateur différentiel de type (A) est un opérateur à indice, et son indice est nul, (en tant qu'application de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$).

Démonstration : On peut toujours trouver une constante λ telle que l'opérateur $P - \lambda I$ (2) satisfasse aux hypothèses du théorème 14 , et donc telle que

(1) On trouvera la démonstration, par exemple dans l'exposé n° 12 du Séminaire Henri Cartan, Ecole Normale Supérieure, 16° année 1963/64.

(2) I est l'injection canonique de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$.

$P - \lambda I$ soit une bijection de $H^2_{loc}(M)$ sur $L^2_{loc}(M)$. L'opérateur I étant compact on a $i(P) = o$.

Tout opérateur de type (A) injectif (resp. surjectif) de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$ est donc bijectif.

Remarque :

1) Soit $o < \lambda \leq 1$, et $C^{p,\lambda}(M)$ les espaces de fonctions höldériennes sur M. Un opérateur P de type (A) est dit de classe $C^{o,\lambda}$ s'il applique $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{o,\lambda}(M)$.

2) On peut établir que si P est un opérateur de type (A) et de classe $C^{o,\lambda}$ son indice par rapport aux espaces $C^{2,\lambda}$ et $C^{o,\lambda}$ est nul. De plus si M est connexe et si $C = P1$ est $\leq o$, et strictement négative en un point $x_o \in M$, P est une bijection de $C^{2,\lambda}$ sur $C^{o,\lambda}$.

3) Considérons donc une variété M connexe, compacte et P un opérateur de type (A). De la relation

$$\int Pu \,.\, v \, d\tau_g = \int u.\, P^* v \, d\tau_g \qquad \forall u, v \in H^2_{loc}(M)$$

on déduit facilement que si P et P^* sont de classe $C^{o,\lambda}$ et si $P1 \leq o$ et $< o$ en un point, P est une bijection de $H^2_{loc}(M)$ sur $L^2_{loc}(M)$ (on établit d'abord que P^* est une injection donc une bijection de $C^{2,\lambda}$ dans $C^{o,\lambda}$ puis que P est une injection de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$).
Le résultat obtenu au théorème 14 est donc loin d'être satisfaisant.

4 . APPENDICE

On rappelle ici certaines notions fondamentales sur les variétés.

4 . 1 . VARIETES DE CLASSE C^∞

Soit M un espace topologique séparé ; une carte locale de variété de dimension n est un couple (U , χ) où U est un ouvert de M et χ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $x \in U$ on note par $(\chi^i(x))_{i=1,\ldots,n}$ les coordonnées de $\chi(x)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Un atlas de variété de classe C^∞ et de dimension n sur M , est un ensemble $\mathfrak{A}$ de cartes locales sur M tel que :

a) les cartes locales de $\mathfrak{A}$ recouvrent M,

b) pour tout couple (U, χ) , $(\hat{U}, \hat{\chi})$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ tels que $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ l'application $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ de $\chi(U \cap \hat{U})$ sur $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ est un C^∞ - difféomorphisme.

Deux atlas $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ de classe C^∞ sur M sont dits C^∞ - équivalents si $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ est un atlas de classe C^∞ sur M . Un atlas de classe C^∞ sur M est dit complet s'il contient tout atlas de classe C^∞ qui lui est C^∞ - équivalent.

Une variété de classe C^∞ et de dimension n est un couple $(M, \mathfrak{A})$ où M est un espace topologique à base dénombrable d'ouverts et $\mathfrak{A}$ un atlas complet de classe C^∞ sur M .

4 . 2 . ESPACES $C^p_{loc}(M)$ (ou encore $C^p(M)$)

On désigne par $C^p_{loc}(M)$ (ou $C^p(M)$) l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions f à valeurs réelles, définies sur M et telles que pour toute carte locale (U, χ) de M on ait

$$f \circ \chi^{-1} \in C^p_{loc}(\chi(U))\ ^{(1)}$$

Pour qu'une fonction f appartienne à $C^p_{loc}(M)$ il suffit que cette relation ait lieu pour un ensemble de cartes locales dont les ouverts recouvrent M.

4 . 3. PARTITION DE L' UNITE SUR LA VARIETE M .

Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement localement fini de M par des ensembles ouverts. Il existe une famille $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{R}}$ de fonctions de $C^\infty(M)$ telles que :

(i) pour chaque $U \in \mathcal{R}$ φ_U est positive, et nulle en dehors d'un sous ensemble fermé de M contenu dans U,

(ii) $\sum\limits_{U \in \mathcal{R}} \varphi_U(x) = 1$ pour tout $x \in M$.

La famille (φ_U) est appelée partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $\mathcal{R}$.

Si la variété M est un espace compact la condition (i) entraine $\varphi_U \in C^\infty_c(U)$.

4 . 4. ESPACES TANGENTS A M.

On désigne, pour chaque $x \in M$, par $G_x(M)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des germes de fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de x ; l'espace tangent $T_x(M)$ à la variété M au point x est le sous-espace du dual (algébrique) de $G_x(M)$ engendré par les formes $f \to \frac{\partial f}{\partial \chi_i}(x)$ $(f \in G_x(M))$, où $i = 1, \ldots, n$ et où (U, χ) décrit l'ensemble des cartes locales de M au voisinage de x $(x \in U)$. L'espace vectoriel $T_x(M)$ est de dimension n (sur $\mathbb{R}$) , et, pour chaque carte locale (U, χ) de M au voisinage de $x (x \in U)$, les formes linéaires

$$f \to \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

---

(1) On devrait écrire $f_U \circ \chi^{-1}$, où f_U est la restriction de f à U

constituent une base de $T_x(M)$; ces formes sont notées $\left(\frac{\partial}{\partial \chi^i}\right)_x$, $1 \leq i \leq n$.
Tout élément ξ de $T_x(M)$ peut donc être exprimé de façon unique sous la forme

$$f \to \xi f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$$

(les ξ^i $(1 \leq i \leq n)$ sont les composantes de ξ relativement à la carte locale (U, χ)).

L'espace vectoriel $T_x^*(M)$, dual de l'espace $T_x(M)$ est appelé l'espace cotangent en x à M ; on désigne par $(d_x \chi_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de $\left(\frac{\partial}{\partial \chi_i}\right)_x$ $1 \leq i \leq n$.

4 . 5. DIFFERENTIELLE .

Soit f une fonction dans $C^1(M)$, on appelle différentielle de f en x, la forme linéaire sur $T_x(M)$ suivante :

$$d_x f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi^i}\right)_x d_x X_i .$$

On montre facilement que cette définition ne dépend pas de la carte locale choisie et qu'elle s'étend à $H^1_{loc}(M)$.

4 . 6. CHAMP DE VECTEUR .

Un champ de vecteur X sur M est une famille $(X_x)_{x \in M}$ où $X_x \in T_x(M)$ pour chaque $x \in M$.

Le champ de vecteur X est dit de classe $C^p (o \leq p \leq \infty)$ si ses composantes

$$X^i(x) = [d_x \chi^i, X_x]$$

par rapport à toutes les cartes locales (U, χ) de classe C^∞, sont de classe C^p.

4 . 7. UN CHAMP DE r TENSEURS COVARIANT (resp. CONTRAVARIANT)

sur M est une famille $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$ où pour chaque $x \in M$ σ_x est une forme r - linéaire sur $[T_x(M)]^r$ (resp. $[T_x^*(M)]^r$). Les composantes du r-tenseurs σ par rapport à la carte locale (U, χ) de M sont les fonctions numériques (définies sur U)

$$\sigma_{i_1, \ldots, i_r} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \chi^{i_1}}, \quad , \frac{\partial}{\partial \chi^{i_r}}\right) \text{ si } \sigma \text{ est covariant}$$

et

$$\sigma^{i_1, \ldots, i_r} = \sigma\left(d\chi^{i_1}, \quad , d\chi^{i_r}\right) \text{ si } \sigma \text{ est contravariant.}$$

Le r - tenseur σ est de classe C^p si pour toute carte locale (U, χ) de M les composantes de σ sont des fonctions de $C^p(U)$.

4 . 8. UNE METRIQUE RIEMANNIENNE

sur M est un champ de 2-tenseur covariant g sur M de classe C^o, telle que, pour tout $x \in M$, la forme bilinéaire $(\xi, \eta) \to g_x(\xi, \eta)$ sur $T_x(M)$ soit symétrique et définie positive :

$$g_x(\xi, \eta) = g_x(\eta, \xi) \qquad \xi, \eta \in T_x(M)$$

$$\xi \neq o \Rightarrow g_x(\xi, \xi) > o \qquad \xi \in T_x(M)$$

Si (U, χ) est une carte locale de M, on note

$$g^{\chi}_{ij}(x) = g_{ij}(x) = g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial \chi^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \chi^j}\right)_x\right) \quad x \in U.$$

$$g^{\chi}(x) = \det\left[g^{\chi}_{ij}(x) \right],$$

et on désigne par $(g^{ij}(x))$ la matrice inverse de $(g_{ij}(x))$.

Si g et $\hat{g}$ sont deux métriques Riemanniennes, il existe une fonction d partout $> o$, $d \in C^o(M)$, telle que pour tout $x \in M$ et toute suite $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de vecteurs de $T_x(M)$ on ait :

$$\det [\hat{g}_x(\xi_i, \xi_j)] = d(x) \det [g_x(\xi_i, \xi_j)] .$$

4 . 9 . Si g est une métrique Riemannienne sur M , il existe une mesure de Radon positive τ_g sur M, et une seule, telle que pour toute carte locale (U, χ) de M et toute fonction $f \in C^o(M)$ à support contenu dans U on ait

$$\int_M f d\tau_g = \int_{\chi(U)} f(\chi^{-1}(z)) \sqrt{g^\chi(\chi^{-1}(z))}\, dz$$

Les mesures Riemanniennes associées aux différentes métriques Riemanniennes sont toutes équivalentes.

4 . 10 . Soit g une métrique Riemannienne sur M . Il existe une application $f \to \mathrm{grad}_g f$ de $C^1(M)$ dans l'espace des champs de vecteurs, et une seule, telle que :

$$g(\mathrm{grad}_g f , X) = \langle df, X\rangle , \quad f \in C^1(M) , X \text{ champ de vecteur de classe } C^o.$$

Si (U, χ) est une carte locale de M et si $f \in C^1(M)$, les composantes de $\mathrm{grad}_g f$ sont données par :

$$\langle d\chi^i, \mathrm{grad}_g f\rangle = \sum_{k=1}^{n} g^{ki} \frac{\partial f}{\partial \chi^k}$$

Cette définition s'étend facilement à $H^1_{loc}(M)$

4 . 11 . Soit g une métrique Riemannienne de classe C^1 sur M, il existe une application linéaire $X \to \mathrm{div}_g$ et une seule de l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^1 dans $C^o(M)$ telle que :

1) $\mathrm{div}_g(fX) = f\, \mathrm{div}_g X + \langle df, X\rangle$, $f \in H^1_{loc}(M)$, X de classe C^1

2) $\int_M \mathrm{div}_g X \, d\tau_g = o$ pour tout champ X de classe C^1.

3) $\mathrm{supp}.(\mathrm{div}_g X) \subset \mathrm{supp}\,(X)$.

Si (U, χ) est une carte locale de M, on a

$$\mathrm{div}_g X(x) = \frac{1}{\sqrt{g^\chi(x)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi^i} (\sqrt{g^\chi}\, X^i)(x)$$

(où $X_i = \langle d\chi^i, X \rangle$)

. 12. g est toujours une métrique Riemannienne de classe C^1, pour tout $f \in C^2(M)$, on pose :

$$\Delta_g f = \mathrm{div}_g (\mathrm{grad}_g f)$$

Δ_g (opérateur de Laplace Beltrami de g) est une application linéaire de $C^2(M)$ dans $C^o(M)$. Si (U, χ) est une carte locale de M on a sur U

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g^\chi}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi^i} \left(\sqrt{g^\chi}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \chi^j}\right) \quad , \ f \in C^2(M)$$

Δ_g est continu lorsqu'on munit $C^2(M)$ (resp. $C^o(M)$) des topologies induites par $H^2_{loc}(M)$ (resp. $L^2_{loc}(M)$). Δ_g se prolonge donc par continuité à $H^2_{loc}(M)$.

4 . 13 . FORMULE DE GREEN

On a pout toute $f_1 \in C^2(M)$, $f_2 \in C^2(M)$

$$\int_M f_1 \Delta_g f_2 \, d\tau_g = - \int_M g(\mathrm{grad}_g f_1, \mathrm{grad}_g f_2)\, d\tau_g$$

et cette égalité se prolonge aux fonctions $f_2 \in H^2_{loc}(M)$.