PIERRE CARTIER
PAUL-ANDRÉ MEYER
MICHEL WEIL

Le retournement du temps : compléments à l'exposé de M. Weil

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 22-33
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__22_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

LE RETOURNEMENT DU TEMPS : COMPLÉMENTS À L'EXPOSÉ DE M.WEIL

(P.Cartier, P.A.Meyer, M.Weil)

Nous reprenons la question du retournement du temps, exposée au séminaire par WEIL en Novembre 1966 d'après les travaux de NAGASAWA, KUNITA-WATANABE. Une partie des résultats ci-dessous a fait l'objet d'un exposé de CARTIER au Printemps de 1967.

Les contributions des trois auteurs se répartissent à peu près de la manière suivante : la présentation des temps de retour et des familles de tribus $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$ au paragraphe 1 est due pour l'essentiel à CARTIER ; il en est de même pour le §2 (forme améliorée du lemme principal de NAGASAWA). Le théorème de retournement du temps sans hypothèse fellérienne est l'apport de MEYER. Enfin, l'étude du comportement des fonctions coexcessives sur les trajectoires est due à WEIL.

§ 1. TEMPS DE RETOUR

HYPOTHÈSES .- $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe de transition sous-markovien sur un espace localement compact à base dénombrable E. **On notera que le temps t est supposé strictement >0.**

Pour tout $x \in E$, il existe un processus markovien $(X_t)_{t>0}$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et $(\varepsilon_x P_t)_{t>0}$ comme loi d'entrée, et dont presque toutes les trajectoires possèdent les propriétés suivantes :

a) Continuité à droite sur $]0,\infty[$ (et donc existence d'une durée de vie ζ)

b) Existence de limites à gauche sur $]0,\zeta[$ (dans E) .

On peut alors construire de la manière habituelle une réalisation canonique du semi-groupe : les notations $\Omega, \underline{\underline{F}}, P^\mu, \underline{\underline{F}}_t, X_t, \theta_t$ auront leurs significations usuelles : les seules différences tiennent au fait que X_t et $\underline{\underline{F}}_t$ ne sont pas définis pour t=0, et que l'existence de $X_{\zeta-}$ n'est pas exigée.

DÉFINITION.- Une variable aléatoire positive L sur Ω est un temps de retour si

1) $L(\omega)<\infty \Rightarrow L(\omega)\leq\zeta(\omega)$

2) Pour tout $t\geq 0$, on a $L\circ\theta_t = (L-t)^+$

Des exemples classiques de temps de retour sont : la durée de vie ζ ; le dernier instant où l'on passe dans un ensemble presque-borélien G donné ($G\subset E$)

$$L(\omega) = \sup \{ t : X_t(\omega)\in G \} \text{ (0 par convention si } \{\ldots\}=\emptyset)$$

DÉFINITION.- Soit L un temps de retour. On définit le processus retourné gauche $(\tilde{X}_t)$ de X à l'instant L par la formule

$$\tilde{X}_t(\omega) = \partial \quad \text{si} \quad L(\omega)=\infty \text{ ou } t\geq L(\omega) \qquad (t>0)$$
$$X_{L(\omega)-t}(\omega) \quad \text{si} \quad t<L(\omega)<\infty$$

et on définit le processus retourné $\hat{X}$ par la formule

$$\hat{X}_t = (\tilde{X}_t)_+ (= (X_{L-t})_- \text{ si } t<L(\omega)<\infty) \qquad (t>0)$$

Si X_{L-} existe p.s. sur $\{0<L<\infty\}$ (en particulier si $L<\zeta$ sur cet ensemble) , on pose $\hat{X}_0 = X_{L-}$ sur $\{0<L<\infty\}$, $\hat{X}_0 = \partial$ sur $\{L=0\}$ et sur $\{L=\infty\}$.

LEMME 1.- Si L est un temps de retour, et si $s\geq 0$, la variable aléatoire $L'=(L-s)^+$ est un temps de retour et on a (les ' servant à indiquer le retournement à L')

$$\tilde{X}'_t = \tilde{X}_{s+t} \qquad \hat{X}'_t = \hat{X}_{s+t}$$

DÉMONSTRATION.- Nous prouverons seulement la première assertion, la seconde étant triviale (la première aussi, d'ailleurs). La propriété 1) de la définition des temps de retour est évidemment satisfaite, et pour la seconde on a

$$(L-s)^+\circ\theta_t = (L\circ\theta_t-s)^+=((L-t)^+-s)^+= [(L-t-s)\vee(-s)]\vee 0 =(L-t-s)^+$$

d'où le résultat.

LEMME 2.- Soient $s>0$, $u\geq 0$. On a $\tilde{X}_s\circ\theta_u = \tilde{X}_s$ sur $\{s+u\leq L\}$, $\tilde{X}_s\circ\theta_u = \partial$ sur $\{s+u>L\}$. On a $\hat{X}_s\circ\theta_u = \hat{X}_s$ sur $\{s+u<L\}$.

DÉMONSTRATION.- Il suffira de traiter le cas de $\tilde{X}_s$, en supposant $u>0$ (le cas $u=0$ est trivial).

1) Si $s+u>L$, $u\geqq L$, on a $L\circ\Theta_u=0$, donc $\tilde{X}_s\circ\Theta_u = \partial$

2) Si $s+u>L$, $u<L$, on a $L\circ\Theta_u=L-u$, donc $s>L\circ\Theta_u$ et $\tilde{X}_s\circ\Theta_u = \partial$

3) Si $s+u \leqq L$, on a $u<L$, donc $L\circ\Theta_u = L-u$ et $s<L\circ\Theta_u$. Alors ou bien $L=\infty$ (et alors $L\circ\Theta_u=L-u=\infty$), et dans ce cas $\tilde{X}_s\circ\Theta_u = \tilde{X}_s = \partial$, ou bien $L<\infty$ (et alors $L\circ\Theta_u<\infty$) et on a dans ce cas

$$\tilde{X}_s\circ\Theta_u(\omega) = X_{L(\Theta_u\omega)-s}(\Theta_u\omega) = X_{L(\Theta_u\omega)-s+u}(\omega) = X_{L(\omega)-s}(\omega)=\tilde{X}_s(\omega).$$

Cela amène à poser la définition suivante

DÉFINITION.- Pour tout $s\geqq 0$ on désigne par $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ la tribu constituée par les $A\in\underline{\underline{F}}$ tels que

$$\forall \quad u\geqq 0 \qquad \Theta_u^{-1}(A)\cap\{s+u<L\} = A\cap\{s+u<L\}$$

LEMME 3.- a) La famille de tribus $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ est croissante et continue à droite ; $\hat{X}_s$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$-mesurable.

b) Si $t\geqq 0$, la variable aléatoire $X_{(L-s)^+ +t}$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$-mesurable(*).

c) Si T est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, $(L-T)^+$ est un temps de retour (**).

DÉMONSTRATION.- a) Supposons $s<t$, et soit $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_s$. Pour $u\geqq 0$, A et $\Theta_u^{-1}(A)$ ont même intersection avec $\{s+u<L\}$, donc a fortiori avec $\{t+u<L\}$. Si $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_{s+}$, A et $\Theta_u^{-1}(A)$ ont même intersection avec $\{s+u+\varepsilon<L\}$ pour tout $\varepsilon>0$, donc aussi avec $\{s+u<L\}$. Le fait que $\hat{X}_s$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$-mesurable est la seconde assertion du lemme 2.

b)Nous avons sur $\{s+u<L\}$ $X_{(L-s)^++t}\circ\Theta_u = X_{(L\circ\Theta_u-s)^++t+u} = X_{(L-u-s)^++t+u} = X_{(L-u-s)+t+u} = X_{L-s+t} = X_{(L-s)^++t}$, d'où le résultat.

c) La première propriété de la définition des temps de retour est évidente, vérifions la seconde. Le fait que T est un temps d'arrêt s'énonce :

(*) D'une manière plus intuitive : tout événement " postérieur à L-s " pour le processus X est "antérieur à s" pour le processus retourné $\hat{X}$. (**) Variante d'un résultat de NAGASAWA .

quels que soient $s>0$, $u\geqq 0$, $\{T\leqq s\}\cap\{s+u<L\}=\{T\circ\Theta_u\leqq s\}\cap\{s+u<L\}$

Plaçons nous sur $\{T+u<L\}$, et prenons s à peine plus grand que T : il vient que $T\circ\Theta_u \leq T$ sur $\{T+u<L\}$. Mais alors on a aussi $T\circ\Theta_u+u<L$, et en prenant s à peine plus grand que $T\circ\Theta_u$, on trouve que $T\leqq T\circ\Theta_u$ sur $\{T+u<L\}$, d'où

$$T=T\circ\Theta_u \quad \text{sur } \{T+u<L\}, \text{ et de même sur } \{T\circ\Theta_u+u<L\}$$

Mais alors, sur $\{T+u<L\}\cup\{T\circ\Theta_u+u<L\}$, on a

$$(L-T)^+\circ\Theta_u = (L\circ\Theta_u-T\circ\Theta_u)^+=(L-u-T\circ\Theta_u)^+=(L-u-T)^+ = ((L-T)^+-u)^+$$

et la seconde propriété de la définition des temps de retour est satisfaite sur cette réunion. Sur le complémentaire de la réunion, on a

$$T+u\geqq L, \text{ donc } ((L-T)^+-u)^+ = 0$$

$$T\circ\Theta_u+u \geqq L , \text{ donc } T\circ\Theta_u\geqq L\circ\Theta_u \text{ et } (L-T)^+\circ\Theta_u=0$$

L'égalité est encore vraie, et le lemme est établi.

REMARQUE.- Le caractère canonique des processus n'a pas vraiment été utilisé, et il ne le sera pas davantage dans la suite : ce qui compte, c'est le caractère markovien du processus (X_t) - qui n'est d'ailleurs pas encore intervenu - et l'identité $X_s\circ\Theta_t = X_{s+t}$. Par exemple, posons $W=\mathbb{R}_+\times\Omega$ et , si $w=(t,\omega)$:

$$X_s(w) = X_s(\omega) \text{ si } s<t \quad ; \quad \Theta_u w = ((t-u)^+,\ \Theta_u\omega)$$
$$\qquad\quad \partial \quad \text{si } s\geqq t$$

On vérifie alors aussitôt que $X_s\circ\Theta_u=X_{s+u}$. On sait que si l'on munit W de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_t\times\underline{\underline{B}}_t$ (*) , des mesures $P^\mu\times\eta$ (où η est exponentielle de paramètre p) on obtient un processus de Markov admettant comme semi-groupe de transition le semi-groupe $(e^{-pt}P_t)$ Soit L la projection de W sur $\mathbb{R}_+$: la définition même de Θ_u sur Ω exprime que L est un temps de retour. La remarque que l'on peut retourner le temps à partir de L est très utile : elle est due à J.WALSH, et nous a été communiquée par M.CHUNG.

---

* $\underline{\underline{B}}_t$ est la tribu sur $\mathbb{R}_+$ engendrée par les boréliens de $[0,t]$.

§2 .- LE LEMME DE NAGASAWA

Soit ϕ une fonction borélienne positive sur $\underline{\underline{R}}_+$; nous poserons, si f est universellement mesurable positive sur E , nulle en ∂

$$P_\phi f(x) = \int_0^\infty \phi(t) P_t f(x) dt$$

D'autre part, nous désignerons par μ une loi de probabilité sur E, par ν la mesure μU [mais tout ce qui suit s'étend aussitôt au cas où l'on désigne par (μ_t) une loi d'entrée, par ν la mesure $\int_0^\infty \mu_t dt$, à condition de remplacer le symbole E^μ par l'espérance relative au processus qui admet (μ_t) comme loi d'entrée].

LEMME 4.- <u>f et ϕ ayant les significations indiquées ci-dessus, soit H une variable aléatoire positive $\hat{\underline{\underline{F}}}_r$-mesurable ($r \geq 0$). Posons</u>

$$h_\phi = E^{\cdot}[\phi\circ(L-r).H.I_{\{r<L<\infty\}}]$$

<u>On a alors</u>

$$\int_0^\infty \phi(t) E^\mu[f\circ\tilde{X}_{r+t}.H]dt = \int_E \nu(dy) f(y) h_\phi(y) = \langle f, h_\phi \rangle_\nu \ .$$

<u>On peut remplacer dans cette formule $\tilde{X}$ par $\hat{X}$.</u>

DÉMONSTRATION.- **La dernière** assertion est évidente (le remplacement de $\tilde{X}$ par $\hat{X}$ ne modifie l'espérance sous le signe $\int$ que pour un **ensemble** dénombrable de valeurs de t). D'autre part, nous pouvons nous borner au cas où r=0 : le cas général s'y ramène en considérant le temps de retour $(L-r)^+$. Le premier membre vaut alors

$$\int_0^\infty \phi(t) dt \int f\circ X_{L-t} I_{\{t<L<\infty\}} H \, dP^\mu =$$

$$\int_{\{L<\infty\}} H \, dP^\mu \int_0^L f\circ X_{L-t} \phi(t) dt = \int_{\{L<\infty\}} H \, dP^\mu \int_0^L f\circ X_v \, \phi(L-v) dv$$

où L peut être considéré comme exclu de l'intervalle d'intégration

$$= \int_0^\infty dv \int_\Omega H.f\circ X_v.\phi(L-v).I_{\{v<L<\infty\}} dP^\mu$$

mais l'expression sous le signe $\int_\Omega$ est égale à $[H.\phi(L).I_{\{0<L<\infty\}}]\circ\theta_v f\circ X_v$, de sorte que cette intégrale est égale à $E^\mu[f\circ X_v.h_\phi\circ X_v]$ (propriété de Markov simple) ; d'où aussitôt le résultat.

LEMME 5.- a) Avec les notations du lemme 4 on a si $s>r$

$$\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\tilde{X}_{s+t}.H]dt = < f, P_{s-r}h_\phi >_\nu$$

où l'on peut remplacer $\tilde{X}$ par $\hat{X}$.

b) Soit η une seconde fonction borélienne positive sur $\overline{\mathbb{R}}_+$; on a $P_\eta h_\phi = h_{\phi*\eta} = P_\phi h_\eta$.

DÉMONSTRATION.- Posons $s=r+u$; comme $H\in\hat{\underline{\underline{F}}}_s$, nous avons le droit de remplacer r par s dans la formule précédente, et il vient

$$\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\tilde{X}_{s+t}.H] = \int\nu(dx)f(x)E^x[\phi\circ(L-s).H.I_{\{s<L<\infty\}}]$$

Mais $I_{\{r<L<\infty\}}\circ\Theta_u = I_{\{s<L<\infty\}}$, et comme $H\in\hat{\underline{\underline{F}}}_r$ il en résulte que l'expression sous le symbole E^x est égale à $[\phi\circ(L-r).H.I_{\{r<L<\infty\}}]\circ\Theta_u$ L'assertion a) découle alors de la propriété de Markov.

Nous venons de voir que $P_{s-r}h_\phi = E^\bullet[\phi\circ(L-s).H.I_{\{s<L<\infty\}}]$. Par conséquent, si η est borélienne positive

$$P_\eta h_\phi = \int_r^\infty \eta(s-r)P_{s-r}h_\phi ds = E^\bullet[\int_r^\infty \eta(s-r)\phi(L-s)HI_{\{s<L<\infty\}}ds]$$

$$= E^\bullet[I_{\{r<L<\infty\}}H \,.\, \int_r^L \eta(s-r)\phi(L-s)ds] = h_{\eta*\phi}$$

(où η et ϕ sont identifiées à des fonctions sur $\mathbb{R}$ nulles sur la demi-droite négative) . La dernière relation résulte de la symétrie du produit de convolution.

§3.- LE RETOURNEMENT DU TEMPS

HYPOTHÈSE .- (P_t) satisfaisant à l'hypothèse du §1, on considère une loi μ, on pose $\nu=\mu U$, et on suppose que ν est une mesure de Radon(*). On introduit un second semi-groupe $(\hat{P}_t)$ - où le ^ indique que l'on utilise la notation des conoyaux - satisfaisant également à l'hypothèse du §1 . On désigne par (U_p) et $(\hat{U}_p)$ les deux résolvantes, et on suppose que l'on a dualité par rapport à ν :

$<f,U_pg>_\nu = < f\hat{U}_p,g>_\nu$ si f et g sont universellement mesurables positives .

(*) Autrement dit, $\nu(K) <\infty$ pour tout compact K.

REMARQUES.- a) Soit ϕ une fonction borélienne positive sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il est facile de vérifier que, si f et g sont boréliennes positives sur E (nulles en ∂)

$$< f,P_\phi g >_\nu = < f\hat{P}_\phi ,g>_\nu .$$

b) Si f est continue bornée, et $x\in E$, la fonction $t \mapsto f\hat{P}_t(x)$ ($= \hat{E}^x[f\circ\hat{Y}_t]$, en notant $\hat{Y}$ le processus canonique associé à $(\hat{P}_t)$ (*)) est continue à droite.

c) ν étant une mesure de Radon, soit f une fonction positive, continue à support compact sur E : on a $<f,\nu> = <\mu,Uf> < \infty$. Il est alors facile de trouver une fonction g continue, partout strictement positive, telle que $< \mu,Ug> <\infty$. Soit $h=Ug$: h est strictement positive en tout point, et $< \mu,P_t h> \to 0$ lorsque $t\to\infty$, de sorte que $h\circ X_t \to 0$ p.s. lorsque $t\to\infty$. Mais alors soit $H_n = \{h\geq 1/n\}$; les trajectoires du processus (X_t) restent p.s. hors de H_n pour t assez grand , et le temps de retour $L_n = \sup\{t: X_t\in H_n\}$ est donc P^μ-p.s. fini. Autrement dit, les théorèmes de retournement que nous allons établir ne sont pas vides !

Voici le théorème principal relatif au retournement :

THÉORÈME.- Si l'on munit Ω de la loi P^μ, le processus (continu à droite) $(\hat{X}_t)_{t>0}$ obtenu par retournement de (X_t) à L est markovien par rapport à la famille $(\hat{\underline{F}}_t)$, et admet $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition. Cela s'étend à la valeur 0 du temps si X_{L-} existe p.s. (dans E) sur $\{0<L<\infty\}$).

DÉMONSTRATION.- Nous allons commencer par quelques calculs : soient $0<r<s$, $H\in\hat{\underline{F}}_r$; ϕ et η ayant la même signification que dans les lemmes 4 et 5, f étant borélienne bornée sur E, nulle en ∂, nous avons

(1) $\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\hat{X}_{s+t}.H]\,dt = < f,P_{s-r}h_\phi >_\nu$ (lemme 5)

(1') $\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[\hat{P}_t(f,\hat{X}_s).H]\,dt = E^\mu[\hat{P}_\phi(f,\hat{X}_s).H]$ (Fubini)

(2) $\int_r^\infty \eta(s-r) <f,P_{s-r}h_\phi >_\nu\, ds = < f,P_\eta h_\phi>_\nu$ (Fubini)

(2') $\int_r^\infty \eta(s-r)E^\mu[f\hat{P}_\phi\circ\hat{X}_s.H]ds = < f\hat{P}_\phi,h_\eta>_\nu$ (lemme 4)

(*) La notation correcte pour cette espérance est $\hat{E}^x[f\circ X_t]$! **En effet, dans la construction des processus canoniques, seule la mesure dépend du semi-groupe de transition.**

Mais $< f\hat{P}_\phi, h_\eta > = < f, P_\phi h_\eta >$ (dualité) $= < f, P_\eta h_\phi >$ (lemme 5). Par conséquent, les seconds membres de (2) et (2') sont égaux , donc aussi les premiers membres ! Comme η est arbitraire, nous obtenons le résultat intermédiaire suivant :

Il existe un ensemble $N_{H\phi rf} \subset \mathbb{R}_+$, négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que l'on ait pour $s>r$, $s \notin N_{H\phi rf}$

(3) $$< f, P_{s-r} h_\phi >_\nu = E^\mu[f\hat{P}_\phi \circ \hat{X}_s . H]$$

Désignons par N la réunion des $N_{H\phi rf}$, où

f parcourt une suite dense dans $\underline{\underline{C}}_c(E)$,

ϕ parcourt une suite dense dans $\underline{\underline{C}}_c(\mathbb{R}_+)$,

r parcourt l'ensemble des rationnels > 0,

pour chaque r (rationnel > 0) H parcourt une algèbre sur les rationnels de fonctions $\hat{\underline{\underline{F}}}_r$-mesurables bornées, dénombrable, engendrant la tribu séparable $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$. Alors :

Si $s>0$ n'appartient pas à l'ensemble négligeable N, on a

(4) $$< f, P_{s-r} h_\phi >_\nu = E^\mu[f\hat{P}_\phi \circ \hat{X}_s . H]$$

Pour toute $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$, toute $\phi \in \underline{\underline{C}}_c(\mathbb{R}_+)$, tout r rationnel < s, et toute H bornée , $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$-mesurable.

Mais alors on a avec les mêmes notations,et pour tout $t \geq 0$:

(5) $$E^\mu[f \circ \hat{X}_{s+t} . H] = E^\mu[f\hat{P}_t \circ \hat{X}_s . H]$$

En effet, ϕ étant arbitraire, l'égalité (4) (égalité des seconds membres de (1) et (1'))entraîne (5) pour presque tout t ; d'autre part les deux membres sont des fonctions continues à droite de t si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ (ce §, remarque b)).

Choisissons un ensemble dénombrable dense $D \subset \mathbb{N}$, tel que l'on ait P^μ-p.s. $\hat{X}_s = \tilde{X}_s$ si $s \in D$. Alors la réunion des tribus $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$ pour r rationnel < s engendre $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq s)$ aux ensembles de mesure nulle près, et la relation (5) entraîne :

(6) si $s \in D$, $s+t \in D$, $E^\mu[f \circ \hat{X}_{s+t} | \underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq s, u \in D)] = f\hat{P}_t \circ \hat{X}_s$ p.s.

Autrement dit, le processus $(\hat{X}_s)_{s \in D}$ est un processus de Markov qui admet (P_t) comme semi-groupe de transition. Pour tout $t \in]0, \infty[$, choisissons un $s \in D \cap]0, t[$ et posons $\lambda_t = \hat{P}_{t-s} \lambda_s$, où λ_s est la loi de

$\hat{X}_s$: λ_t ne dépend pas du choix de s, et les λ_t forment une loi d'entrée pour $(\hat{P}_t)$. Il existe donc un processus markovien continu à droite admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et $(\hat{P}_t)$ comme loi d'entrée $^{(*)}$. Mais alors le processus continu à droite $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est <u>équivalent</u> à ce processus markovien : il est donc lui même markovien, avec le semi-groupe de transition désiré. L'adjonction de 0 à l'ensemble des temps, si $\hat{X}_0$ existe p.s., ne pose aucun problème.

Il reste à montrer que le processus est markovien <u>par rapport à la famille</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$. Pour cela, nous remarquerons que le raisonnement précédent s'applique à un temps de retour quelconque. Soit $H \in \hat{\underline{\underline{F}}}_r$, et soit T=r sur H, T=$\infty$ sur H^c : T est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, et donc $L'=(L-T)^+$ est un temps de retour. En outre, on a $L<\zeta$ sur $\{L<\infty\}$ si r>0, de sorte que X_{L-} existe p.s. sur $\{0<L<\infty\}$ (on a le même résultat pour r=0 si $\hat{X}_0$ existe p.s.). On a donc, en désignant par $\hat{X}'$ le processus retourné à L'

$$E^{\mu}[f\circ X'_{t-r}] = E^{\mu}[f\hat{P}_{t-r}\circ\hat{X}'_0]$$

ou encore

$$E^{\mu}[f\circ\hat{X}_t\cdot I_H] = E^{\mu}[f\hat{P}_{t-r}\circ\hat{X}_r\cdot I_H]$$

ce qui est l'égalité cherchée.

<u>On notera que le même raisonnement, appliqué à</u> $(L-T)^+$, <u>où</u> T <u>est un temps d'arrêt quelconque de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, <u>montre</u> (sans aucune hypothèse supplémentaire) <u>que le processus</u> $(\hat{X}_t)$ <u>est fortement markovien</u> .

(*) Notre hypothèse sur $(\hat{P}_t)$ a consisté à supposer cela pour les lois d'entrée de la forme $(\hat{P}_t\varepsilon_x)$: mais cela vaut alors pour des lois d'entrée quelconques (KUNITA-WATANABE). Nous laissons cela au lecteur.

§4.- COMPORTEMENT DES FONCTIONS COEXCESSIVES SUR LES TRAJECTOIRES

Nous n'avons utilisé jusqu'à maintenant que la dualité par rapport à une mesure de la forme $\nu=\mu U$. La méthode de ce paragraphe indique une manière de traiter des situations plus générales. Comme les résultats que nous exposons sont encore incomplets, nous n'avons pas cherché à rendre les hypothèses aussi faibles que possible.

HYPOTHÈSES.- λ est une mesure de Radon ($\geqq 0$) ; (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont deux semi-groupes standard, dont les résolvantes (U_p) et $(\hat{U}_p)$ transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, sont en dualité par rapport à λ

$$<f,U_p g>_\lambda = <f\hat{U}_p,g> \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont boréliennes positives,}$$

et sont telles en outre que les mesures $\varepsilon_x U_p$, $\hat{U}_p\varepsilon_x$ sont absolument continues par rapport à λ.

Cette situation a été étudiée par KUNITA-WATANABE , qui ont montré l'existence de bonnes densités pour les résolvantes : voir à ce sujet l'exposé de WEIL "résolvantes en dualité" , qui présente les travaux de KUNITA-WATANABE.

Nous allons établir le résultat suivant , qui ne peut pas se déduire directement du théorème de retournement . Nous désignons ci-dessous par $(\Omega,\ldots,X_t,P^\mu)$ la réalisation canonique du semi-groupe (P_t).

THÉORÈME.- Soit g une fonction p-coexcessive ($p\geqq 0$), et soit μ une loi initiale . Pour P^μ-presque tout $\omega\in\Omega$ l'application $t\mapsto g\circ X_{t-}(\omega)$ est continue à gauche sur $]0,\zeta[$, pourvue de limites à droite sur $]0,\zeta[$.(*)

DÉMONSTRATION.- Quitte à remplacer (P_t) et $(\hat{P}_t)$ par des semi-groupes de la forme $(e^{-qt}P_t)$, $(e^{-qt}\hat{P}_t)$ avec $q>0$, nous pouvons supposer a) que les noyaux potentiels U et $\hat{U}$ sont bornés , b) que g est coexcessive . Nous laisserons au lecteur le retour du semi-groupe $(e^{-qt}P_t)$ au semi-groupe (P_t).

(*) Si $X_{\zeta-}$ existe p.s., on peut remplacer $]0,\zeta[$ par $]0,\zeta]$, donc par $]0,\infty[$.

Soit ϕ une fonction continue bornée, λ-intégrable et strictement positive en tout point, et soit μ' une loi proportionnelle à la mesure bornée $\mu+\phi.\lambda$; soit ν' la mesure excessive $\mu'U$ (qui est bornée - et donc une mesure de Radon - du fait que le noyau U est borné). D'après un théorème de KUNITA-WATANABE , rappelé dans l'exposé de WEIL sur les résolvantes en dualité, il existe une fonction coexcessive unique v telle que $\nu'=v.\lambda$. Comme ν' est bornée, v est finie pp. ; comme ϕ est partout >0, un ensemble A est ν'-négligeable si et seulement s'il est de potentiel nul, c'est à dire λ-négligeable. Autrement dit, ν' et λ sont équivalentes, et l'ensemble $\{v=0\}$ est λ-négligeable. Mais v est coexcessive, donc cet ensemble est cofinement ouvert : s'il est λ-négligeable, c'est qu'il est vide.

Posons
$$\hat{Q}_t(dx,y) = \frac{v(x)\hat{P}_t(dx,y)}{v(y)} \quad \text{si } v(y)<\infty$$
$$= \varepsilon_y(dx) \quad \text{si } v(y)=\infty$$

Il est bien connu depuis DOOB que l'on obtient ainsi un semi-groupe sous-markovien, et KUNITA-WATANABE ont montré que ce semi-groupe est standard. D'autre part, les résolvantes de (P_t) et $(\hat{Q}_t)$ sont en dualité par rapport à $\nu'=\mu'U = v.\lambda$. Enfin, la fonction égale à $\frac{g}{v}$ sur $\{v<\infty\}$, à 0 sur $\{v=\infty\}$ est excessive par rapport au semi-groupe $(\hat{Q}_t)$.

Munissons Ω de la mesure $P^{\mu'}$, et notons que la durée de vie du processus (X_t) est p.s. finie , du fait que le noyau U est borné. Nous pouvons donc utiliser la durée de vie comme temps de retour, ce qui nous définit un processus $(\hat{X}_t)$ admettant $(\hat{Q}_t)$ comme semi-groupe de transition . D'après le théorème de HUNT sur le comportement des fonctions excessives sur les trajectoires,

$t \mapsto \frac{g}{v}\circ\hat{X}_t$ est continue à droite sur $]0,\infty[$, avec des limites à gauche sur $]0,\infty[$, $P^{\mu'}$-p.s.(*)

et par conséquent, en retournant le temps :

$t \mapsto \frac{g}{v}\circ X_{t-}$ est continue à gauche sur $]0,\zeta[$, avec des limites à droite sur $[0,\zeta[$

(*) Il est d'ailleurs facile d'éviter la difficulté relative à $\{v=\infty\}$ en se ramenant, par troncation à un entier k, au cas où g est finie, puis en faisant tendre k vers ∞. Nous supposerons g finie dans la suite de la démonstration.

Maintenant, nous ferons deux remarques :

- ce qui vient d'être dit s'applique à une fonction coexcessive (finie) quelconque , en particulier à la fonction 1 .

- l'ensemble $\{v=\infty\}$ est négligeable, donc polaire , pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ (voir MEYER : processus de Markov, chap.XV, th. 27) . Il en résulte qu'il est aussi polaire pour le semi-groupe $(\hat{Q}_t)$: $P^{\mu'}\{\exists t\in]0,\infty[\ : v\circ\hat{X}_t=\infty\}=0$. En retournant, on voit que l'on a $P^{\mu'}$-p.s. $\frac{1}{v}\circ X_{t-} \neq 0$ sur l'intervalle $]0,\infty[$. D'où l'assertion relative à $g\circ X_{t-}$ en divisant g/v par 1/v. Bien entendu, une assertion vraie $P^{\mu'}$-p.s. est vraie P^{μ}-p.s., puisque μ est majorée par un multiple de μ'.

Nous laisserons de côté les résultats plus fins relatifs au cas où $(\hat{P}_t)$ est un semi-groupe de HUNT, et où g est coexcessive régulière. Ces résultats seront publiés ailleurs.