SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Compactifications associées à une résolvante

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 175-199
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__175_0>

Compactifications associées à une résolvante

(P. A. Meyer)

Les résultats présentés ci-dessous sont une mise en forme " axiomatique" de théorèmes relatifs à la compactification de MARTIN (telle qu'elle est traitée dans l'article [4] de KUNITA-WATANABE). Nous ne donnons aucun procédé de compactification nouveau , mais nous montrons que beaucoup de propriétés qui étaient bien connues dans des cas particuliers (RAY, KNIGHT, KUNITA-WATANABE...) sont vraies en fait pour toutes les compactifications raisonnables. Nous terminons par une application aux chaînes de Markov à temps continu, qui n'apporte aucun théorème nouveau, mais qui donne une interprétation simple de la topologie fine de CHUNG, et de la version " semi-continue inférieurement " d'une chaîne.*

§ 1. Compactifications générales

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS.- E est un espace localement compact à base dénombrable.

(U_p) est une résolvante sousmarkovienne sur E. Le noyau $U_0=U$ applique $\underline{\underline{C}}_c(E)$ [fonctions continues à support compact] dans $\underline{\underline{C}}_b(E)$ [fonctions continues bornées][1].

E est un sous-ensemble borélien d'un espace compact métrisable F, dense dans F . Nous n'exigeons pas que la topologie induite par F sur E soit la topologie précédente (que nous appellerons topologie " initiale" de E), mais seulement qu'elle soit moins fine , i.e. que l'injection i de E dans F soit continue. La notation $\underline{\underline{C}}_c(E)$ se rapportera toujours à la topologie initiale de E. S'il est nécessaire, nous dirons qu'une fonction f définie dans E est continue/E, sci/E (resp. continue/F, sci/F) pour marquer qu'elle est continue ou semi-continue

(1) Cette hypothèse peut être remplacée par des hypothèses analogues sur les U_p, p>0. Nous verrons cela plus loin.

* **Au sujet de ces résultats, voir la dernière page de l'exposé.**

inférieurement pour la topologie initiale de E (resp, la topologie sur E induite par F)[2].

Voici maintenant les deux hypothèses cruciales :

(H) a) Si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$, la fonction Uf sur E se prolonge en une fonction continue sur F (de manière unique puisque E est dense).

b) Soit $\underline{\underline{S}}$ le cône des fonctions continues g sur F, telles que $g|E$ (la restriction de g à E) soit surmédiane ; alors $\underline{\underline{S}}$ sépare les points de F.

Comme $\underline{\underline{S}}$ contient les constantes positives , est stable pour l'opération inf et sépare F, $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est dense dans $\underline{\underline{C}}(F)$.

L'injection i de E dans F étant continue, la trace sur E d'un ensemble borélien B de F (égale à $i^{-1}(B)$) est un ensemble borélien/E. Inversement, tout compact de E étant compact/F, et la tribu borélienne de E étant engendrée par les compacts, on vérifie aussitôt que tout borélien/E est borélien/F . Il n'y a donc pas lieu de distinguer entre les deux structures boréliennes sur E, et nous parlerons simplement de parties boréliennes de E sans autre spécification.

CONSTRUCTION D'UN NOYAU POTENTIEL SUR F

Soient $x \in F$, et $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$; la fonction Uf admet un prolongement par continuité (unique) à F, que l'on notera encore Uf. L'application $f \mapsto Uf^x$ est alors une mesure sur E, que l'on notera U(x,dy). La tribu borélienne/E et la tribu borélienne/F étant identiques, nous pouvons considérer aussi U(x,dy) comme une mesure (non bornée) sur F, portée par E ; U apparaît alors, soit comme un noyau de E dans F, soit comme un noyau

---

[2] Un exemple typique de cette situation est donné par le cas des chaînes : E est alors un espace dénombrable discret , F est le complété de E pour une structure uniforme liée à la résolvante, et n'induit plus sur E la topologie discrète.

sur F. Remarquons que ce noyau est propre sur F ([2], chap.IX, n°1) : en effet, soit (K_n) une suite de compacts dont la réunion et E ; F est réunion des K_n et de $F\setminus E$, et chacune des fonctions $U(I_{K_n})$, $U(I_{F\setminus E})$ est bornée (la dernière est nulle).

PROPOSITION 1.- Le noyau U sur F satisfait au principe complet du maximum .

DÉMONSTRATION.- Les mesures $U(x,dy)$ étant portées par E, tout revient à montrer que si f et g sont des fonctions universellement mesurables positives sur E , si a est une constante $\geqq 0$, et si l'on a

$$a + Uf \geqq Ug \quad \text{sur } \{g>0\} \quad ,$$

alors la même inégalité est vraie partout sur F . Il suffit pour cela de montrer que si h (définie dans E) est sci/E et majore f, si j (définie dans E) est scs/E, à support compact J contenu dans $\{g>0\}$, et telle que $0\leqq j\leqq g$, et si enfin ε est une constante >0, on a

$$a + \varepsilon + Uh \geqq Uj \quad \text{partout sur } F \ .$$

Mais on a $a+\varepsilon+Uh > Uj$ en tout point de J ; soient A_h l'ensemble des fonctions $s\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$ majorées par h, et A'_h l'ensemble des fonctions $a+\varepsilon+Us$ pour $s\in A_h$. A'_h est un ensemble filtrant croissant de fonctions continues/E dont l'enveloppe supérieure est $a+\varepsilon+Uh$. Le lemme de Dini entraîne alors l'existence d'une fonction $s\in A_h$ telle que $a+\varepsilon+Us > Uj$ sur J. Cette inégalité vaut alors sur un voisinage compact L de J dans E, et le lemme de Dini montre à nouveau qu'il existe une fonction $t\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$ à support dans L, majorant j et telle que $a+\varepsilon+Us>Ut$ sur L. Mais alors cette inégalité a lieu sur tout E, car U satisfait au principe complet du maximum sur E ([2], chap.IX, T.69); elle se prolonge alors à F par continuité, puisque Us et Ut sont continues sur F. On a à plus forte raison $a+\varepsilon+Uh \geqq Uj$ sur F, et la proposition est établie.

CONSTRUCTION D'UNE RÉSOLVANTE SUR F

Soit $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$; $U_p f$ est définie dans E, de sorte que $UU_p f$ est définie dans F, et nous pouvons poser

$$U_p f = Uf - pUU_p f \text{ (3)}$$

Supposons que la fonction $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ soit $\leqq 0$. Alors la fonction $U_p f$ est $\leqq 0$ sur E . Mais cette fonction est égale sur E à $U(f-pU_p f)$, et on a par conséquent

$$U((f-pU_p f)^-) \geqq U((f-pU_p f)^+) \quad \text{sur } \{(f-pU_p f)^+ > 0\} \cap E$$

Cette relation vaut alors sur F (prop.1). Mais $(f-pU_p f)^-|E$ est bornée à support compact dans E , car $f-pU_p f$ est positive dans E hors du support de f. Par conséquent , $U((f-pU_p f)^-)$ est une fonction finie dans F et nous pouvons écrire cette inégalité

$$0 \geqq U(f-pU_p f)$$

ou $U_p f \leqq 0$. L'application $f \mapsto U_p f^x$ est donc une mesure positive sur E pour tout $x \in F$. Comme plus haut, nous considérerons aussi cette mesure $U_p(x,dy)$ comme une mesure sur F portée par E, et U_p comme un noyau sur F (ou un noyau de E dans F). La relation $(I+pU)U_p = U$ est alors une identité entre noyaux sur F.

PROPOSITION 2.- <u>Les noyaux</u> U_p <u>forment une résolvante sousmarkovienne sur</u> F (<u>noter que l'on n'a pas nécessairement</u> $U = \lim_{p \to 0} U_p$ <u>sur</u> F).

DÉMONSTRATION.- Montrons d'abord que le noyau pU_p est sousmarkovien sur F. Cela revient à montrer que si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ est comprise entre 0 et 1 , on a $pU_p f \leqq 1$. Mais on a

$$1 \geqq pU_p f = U[p(f-pU_p f)]$$

sur l'ensemble des points de E où le crochet est >0 , et donc

(3) On ne sait pas encore que cette fonction est <u>finie</u> ; de là les précautions plus loin.

partout sur F d'après la prop.1.

Montrons ensuite que les noyaux U_p forment une résolvante sur F . Nous allons vérifier que si l'on prend $p>0, q>0$, $f\in \underline{\underline{C}}_c(E)$, les fonctions UU_pf , UU_qf, UU_pU_qf sont finies et que

$$(I+pU)[U_p+(p-q)U_pU_q]f = (I+pU)U_qf$$

Cela entraînera le résultat cherché d'après [2], X.T7, car U satisfait au principe complet du maximum sur **F**. Preuve : dans la relation $U_pg+pUU_pg = Ug$ remplaçons g par U_qf , il vient

$$U_pU_qf + pUU_pU_qf = UU_qf \leqq \frac{1}{q}f < +\infty \text{ partout .}$$

Les trois fonctions envisagées sont donc bien finies, et on a

$$(I+pU)U_pf = Uf$$
$$(I+pU)[(p-q)U_pU_qf] = (p-q)UU_qf$$

d'où par addition $(I+pU)[U_pf+(p-q)U_pU_qf] = Uf+(p-q)UU_qf =$ $(U_qf+qUU_qf)+(p-q)UU_qf = (I+pU)U_qf$. cqfd

PROPOSITION 3.- _Soit_ g _une fonction borélienne positive sur_ F, _telle que_ $g|E$ _soit surmédiane et sci/E, et que l'on ait pour tout_ $x\in F\setminus E$

$$g(x) \geqq \liminf_{\substack{y\to x\\ y\in E}} g(y)$$

Alors g _est surmédiane par rapport à la résolvante_ (U_p) _sur_ F.

DÉMONSTRATION.- Nous allons prouver que si f et f' sont universellement mesurables positives sur E, et si l'on a $g+Uf \geqq Uf'$ sur $\{f'>0\}$, alors la même inégalité est vraie sur F. L'argument de [2], chap.IX,T70 - qui repose uniquement sur la relation $(I+pU)U_p=U$ - entraînera alors que g est surmédiane sur F.

Comme dans la démonstration de la prop.1, il nous suffit de prouver que si ε est une constante positive, si h est une fonction sci/E majorant f , si j est une fonction scs/E dont le support compact J est contenu dans $\{f'>0\}$, et telle que $0\leqq j\leqq f'$, on a partout sur F

$$g+\varepsilon+Uh \geqq Uj$$

Or on a $g+\varepsilon+Uh > Uj$ en tout point de J. D'après le lemme de DINI, il existe une fonction $s\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$, majorée par h telle que

$$g+\varepsilon+Us > Uj \quad \text{sur } J$$

Cette relation a alors lieu sur tout un voisinage compact L de J dans E, et le lemme de DINI entraîne à nouveau l'existence d'une fonction $t\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$ à support dans L, majorant j et telle que

$$g+\varepsilon+Us \geqq Ut \quad \text{sur } L$$

Mais alors, g étant surmédiane sur E, cette relation a lieu sur tout E ; comme Us et Ut sont continues sur F, l'hypothèse faite sur g entraîne que cette inégalité vaut aussi sur $F\setminus E$, et la proposition est établie.

COROLLAIRE.- <u>Toute fonction</u> $g\in\underline{\underline{S}}$ <u>est surmédiane par rapport à la résolvante</u> (U_p) <u>sur</u> F .

CONSTRUCTION D'UN SEMI-GROUPE

Dans ce qui suit , nous notons $\hat{g}$ la régularisée excessive d'une fonction g, surmédiane par rapport à la résolvante (U_p).

PROPOSITION 4.- <u>Soit</u> D <u>l'ensemble des points</u> $x\in F$ <u>tels que</u> $\varepsilon_x pU_p \underset{p\to\infty}{\to} \varepsilon_x$ <u>au sens vague</u>. <u>Alors</u> D <u>est borélien</u>.

<u>Il existe un semi-groupe</u> $(P_t)_{t\geq 0}$ <u>de noyaux sousmarkoviens sur</u> F, <u>unique</u>, <u>possédant les propriétés suivantes</u> :

1) <u>Si</u> $f\in\underline{\underline{C}}(F)$, <u>et si</u> $x\in F$, <u>la fonction</u> $t\mapsto P_t f^x$ <u>est continue à droite</u>.

2) $U_p = \int_0^\infty e^{-pt}P_t dt$ <u>pour tout</u> $p>0$

<u>On a</u> $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_x$ <u>si et seulement si</u> $x\in D$. <u>Pour tout</u> $x\in F$ <u>la mesure</u> $\varepsilon_x P_0$ <u>est portée par</u> D . <u>Enfin, soit</u> $L=\lim_{p\to 0} U_p$ <u>le noyau terminal de la résolvante</u> (U_p) ; <u>on a</u> $\varepsilon_x L=\varepsilon_x U$ <u>pour tout</u> $x\in D$.

DÉMONSTRATION.- Nous allons commencer par transformer la définition de D. Si $x\in D$, on a $\lim_{p\to\infty} pU_p g^x = g(x)$ pour tout $g\in\underline{\underline{S}}$, ou encore $g(x)=\hat{g}(x)$ pour tout $g\in\underline{\underline{S}}$. Inversement, soit (g_n) une suite dense dans $\underline{\underline{S}}$ [une telle suite existe, car $\underline{\underline{S}}$ est une partie de l'espace métrique séparable $\underline{\underline{C}}(F)$] , et soit un $x\in F$ tel que $g_n(x)=\hat{g}_n(x)$ pour tout n ; montrons que x appartient alors à D. En effet, l'ensemble des fonctions $f\in\underline{\underline{C}}(F)$ telles que $f(x) = \lim\limits_{p\to\infty} pU_pf^x$ est évidemment un sous-espace fermé de $\underline{\underline{C}}(F)$; comme il contient les g_n, il contient $\underline{\underline{S}}$, puis $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$, et enfin l'adhérence de $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$, et cette adhérence est égale à $\underline{\underline{C}}(F)$ d'après le théorème de STONE-WEIERSTRASS. Il en résulte aussitôt que D est un ensemble borélien. D'autre part, soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$, et soit $x\in D$; Lf est une fonction excessive par rapport à la résolvante (U_p), égale à $\widehat{Uf}$ sur E. Nous avons donc $\widehat{Lf} = \lim_p pU_pLf = \lim_p pU_pUf = \widehat{Uf}$. Comme $Uf\in\underline{\underline{S}}$, nous avons $\widehat{Uf}^x=Uf^x$ du fait que $x\in D$, et par conséquent $Lf^x=Uf^x$. La mesure $L(x,.)$ étant portée par E, on a $\varepsilon_xL=\varepsilon_xU$, ce qui établit la dernière phrase de l'énoncé.

Passons maintenant à la construction des noyaux P_t .

1) Soit $f\in\underline{\underline{S}}$; la formule ([2], IX.T52)

$$\frac{d^n}{dp^n}(pU_pf) = n!(-1)^{n+1}(U_p)^n(I-pU_p)f$$

montre que la fonction $\hat{f}(x)-pU_pf^x$ de la variable p est complètement monotone bornée sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in F$; elle tend vers $\hat{f}(x)-h(x)$ lorsque $p\to 0$, h désignant la partie invariante de la fonction excessive $\hat{f}$. Le théorème bien connu de S.BERNSTEIN nous permet d'écrire

$$\hat{f}(x) - pU_pf^x = \int_0^\infty e^{-pt}\lambda_x(dt)$$

où λ_x est une mesure positive sur $\mathbb{R}_+$, de masse égale à $\hat{f}(x)-h(x)$. Posons maintenant

$$P_tf^x = h(x)+ \lambda_x(]t,\infty[)$$

C'est une fonction de t décroissante et continue à droite, qui tend vers $\hat{f}(x)$ lorsque $t\to 0$. On a

$$\int_0^\infty e^{-pt}P_tf^x\,dt = \frac{h(x)}{p} + \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_t^\infty \lambda_x(ds)$$
$$= \frac{h(x)}{p} + \int_0^\infty \lambda_x(ds)\,\frac{1-e^{-ps}}{p}$$
$$= \frac{h(x)}{p} + \frac{1}{p}\left(\hat{f}(x)-h(x) - (\hat{f}(x)-pU_pf^x)\right) = U_pf^x .$$

2) Etudions la forme linéaire $f \mapsto P_tf^x$ sur $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$

a) Si f est surmédiane continue, la fonction $\frac{f^x}{p} - U_pf^x$ (*) de la variable p est complètement monotone. Cette fonction étant la transformée de Laplace de la fonction continue à droite $t \mapsto f^x - P_tf^x$, on a $P_tf^x \leqq f^x$ pour tout t. En particulier, $P_t1 \leqq 1$.

b) Si $f\in\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est $\geqq 0$, $p \mapsto U_pf^x$ est complètement monotone (*). Cette fonction étant la transformée de Laplace de $t \mapsto P_tf^x$, on a $P_tf^x \geqq 0$ pour presque tout t, donc pour tout t en vertu de la continuité à droite.

On déduit aussitôt de a) et b) que la forme linéaire $f \mapsto P_tf^x$ sur $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est bornée (de norme ≤ 1). Elle se prolonge donc par continuité en une forme linéaire bornée sur $\underline{\underline{C}}(F)$, c'est à dire une mesure, et on vérifie aussitôt que cette mesure est positive. On voit aussitôt par un argument de convergence uniforme, que la fonction $t \mapsto P_tf^x$ est encore continue à droite si $f\in\underline{\underline{C}}(F)$. Nous noterons $P_t(x,dy)$ la mesure qui vient d'être définie.

c) Montrons ensuite que (P_t) est un <u>noyau sousmarkovien</u>, autrement dit, que P_tf est une fonction borélienne si $f\in\underline{\underline{C}}(F)$. Or la fonction $x \mapsto \int\phi(t)e^{-t}P_tf^x dt$ est borélienne pour toute fonction ϕ continue sur $\mathbb{R}_+$, tendant vers une limite à l'infini, et bornée [cette propriété est vraie en effet si ϕ est une constante ou une exponentielle e^{-pt}, et on applique le th. de STONE-WEIERSTRASS sur $[0,\infty]$]. Donc $x \mapsto \int\phi(x)P_tf^x dt$

(*) Utiliser la formule
$$\frac{d^n}{dp^n}(U_pf^x) = n!(-1)^n(U_p)^{n+1}f^x \qquad ([2],\ \text{IX.T52}) .$$

est borélienne si ϕ est continue à support compact, et donc $x \mapsto P_t f^x$ est borélienne [passage à la limite justifié par la continuité à droite].

3) Nous allons vérifier la relation $P_s P_t = P_{s+t}$ ($s \geqq 0, t \geqq 0$).

a) Montrons d'abord que , pour toute fonction borélienne positive h, Uh est une fonction surmédiane. Cette propriété est vraie en effet si $h \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$ (prop.3) , donc aussi, par passage à l'enveloppe inférieure, pour toute fonction h semi-continue supérieurement positive à support compact dans E. Soit alors h une fonction borélienne positive sur F ; on a pour toute fonction j, scs à support compact positive dans E, et majorée par $h|E$

$$pU_pUj \leqq Uj \leqq Uh$$

d'où en passant à l'enveloppe supérieure $pU_pUh \leqq Uh$, qui est le résultat cherché.

Il résulte alors du raisonnement du début de la démonstration que la fonction $p \mapsto U_pUh^x$ est transformée de Laplace d'une fonction <u>décroissante</u>.

b) Prenons $g \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$, et désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées h telles que $t \mapsto P_tU(hg)^x$ soit continue à droite pour tout $x \in F$. Il est clair que $\underline{\underline{H}}$ est un espace vectoriel fermé pour la convergence uniforme, qui contient $\underline{\underline{C}}(F)$. D'autre part, soit (h_n) une suite croissante et uniformément bornée d'éléments positifs de $\underline{\underline{H}}$, et soit $h = \lim_n h_n$; la fonction $t \mapsto P_tU(h_ng)^x$ admet comme transformée de Laplace $p \mapsto U_pU(h_ng)^x$, qui est d'après a) la transformée de Laplace d'une fonction décroissante. Autrement dit, $t \mapsto P_tU(h_ng)^x$ est continue à droite et décroissante, et par conséquent $t \mapsto P_tU(hg)$ est continue à droite , par passage à l'enveloppe supérieure. Il résulte alors du théorème des classes monotones ([2], chap.I, T20) que $\underline{\underline{H}}$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées. Un second passage à l'enveloppe supérieure montre alors que $t \mapsto P_tUh$ est décroissante et continue à droite pour toute fonction borélienne positive h sur F.

c) Prenons $g \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; $U_p g$ est différence de deux fonctions de la forme Uh ; la fonction $t \mapsto P_t U_p g^x$ est donc continue à droite. D'autre part, $U_p g$ est p-surmédiane , donc 0-surmédiane par rapport à la résolvante $(V_q)=(U_{p+q})$. Le raisonnement du début de la démonstration montre alors que $q \mapsto V_q U_p g^x$ est transformée de Laplace d'une fonction décroissante ; comme elle est transformée de Laplace de la fonction continue à droite $t \mapsto e^{-pt} P_t U_p g^x$, celle ci est décroissante. Le même raisonnement qu'en b) montre alors que $t \mapsto e^{-pt} P_t U_p h^x$ est décroissante et continue à droite pour toute fonction borélienne positive h sur F.

d) Pour vérifier que $P_t P_s f^x = P_{s+t} f^x$, il suffit de traiter le cas où $f \in \underline{\underline{C}}(F)$. Les deux membres étant des fonctions continues à droite en s, il suffit de vérifier l'égalité de leurs transformées de Laplace en s, soit

$$P_t U_p f^x = \int_0^\infty e^{-ps} P_{s+t} f^x ds$$

Mais les deux membres sont des fonctions continues à droite en t d'après c), et il suffit encore une fois de vérifier l'égalité de leurs transformées de Laplace en t, ce qui revient à vérifier l'équation résolvante.

4) Si $f \in \underline{\underline{S}}$, on a $P_0 f = \lim_{t \to 0} P_t f = \lim_{p \to \infty} pU_p f = \hat{f}$. Par conséquent, $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_x$ si et seulement si $f(x)=\hat{f}(x)$ pour tout $f \in \underline{\underline{S}}$, autrement dit si $x \in D$. D'autre part, la relation $P_0 P_0 f = P_0 f$ s'écrit $P_0(f-\hat{f})=0$. Comme on a $f \geq \hat{f}$, cela entraîne que toute mesure $\varepsilon_x P_0$ est portée par $\{f=\hat{f}\}$; en faisant parcourir à f une suite dense dans $\underline{\underline{S}}$, on voit que $\varepsilon_x P_0$ est portée par D.

CONSTRUCTION DE PROCESSUS DE MARKOV

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> μ <u>une loi de probabilité sur</u> F. <u>Il existe un processus de Markov</u> (X_t) <u>à valeurs dans</u> F_∂ (*), <u>admettant</u> (P_t) <u>comme semi-groupe de transition et</u> μ <u>comme loi initiale, et dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche sur l'intervalle</u> $]0,+\infty[$, <u>et admettent en</u> 0 <u>une limite à droite</u> X_{0+}. <u>On a</u> $X_0 = X_{0+}$ <u>p.s. si et seulement</u>

*) ∂ est un point isolé adjoint à F, et $F_\partial = F \cup \{\partial\}$

<u>si</u> μ <u>est portée par</u> D.

DÉMONSTRATION.- Construisons, sur un espace probabilisé complet Ω, un processus de Markov (Y_t) admettant (P_t) comme semi-groupe de transition (*) et μ comme loi initiale. Si $g \in \underline{\underline{S}}$, g est surmédiane par rapport au semi-groupe (P_t) [en effet, la fonction $t \mapsto P_t g$ est décroissante par construction, et tend vers $\hat{g} \leq g$ lorsque $t \to 0$] ; le processus $(g \circ Y_t)$ est donc une surmartingale, et admet par conséquent des limites à droite et des limites à gauche le long des rationnels, si l'on excepte des $\omega \in \Omega$ qui forment un ensemble négligeable. En utilisant une suite d'éléments de $\underline{\underline{S}}$ qui sépare les points de F, on obtient le résultat suivant :

il existe un ensemble négligeable $H \subset \Omega$ tel que, pour tout $\omega \notin H$, l'application $t \mapsto Y_t(\omega)$ admette une limite à droite $Y_{t+}(\omega)$ le long des rationnels en tout point $t \in [0,+\infty[$, une limite à gauche le long des rationnels en tout point $t \in]0,+\infty[$.

Une modification triviale des variables aléatoires Y_t sur H permet alors de supposer ces propriétés vraies pour <u>tout</u> $\omega \in \Omega$.

Soient maintenant f et g deux éléments de $\underline{\underline{S}}$. On a

$$E[f \circ Y_t . g \circ Y_{t+}] = \lim_{\varepsilon \to 0} E[f \circ Y_t . g \circ Y_{t+\varepsilon}] = \lim_{\varepsilon} E[f \circ Y_t . P_\varepsilon g \circ Y_t]$$
$$= E[f \circ Y_t . \hat{g} \circ Y_t]$$

Supposons d'abord $t>0$. La relation $P_t g = P_t P_0 g$ s'écrit $P_t(g-\hat{g})=0$, ou $E[(g-\hat{g}) \circ Y_t]=0$, ou finalement (comme $g \geq \hat{g}$) $g \circ Y_t = \hat{g} \circ Y_t$ p.s. La relation ci-dessus s'écrit donc dans ce cas $E[f \circ Y_t . g \circ Y_{t+}] = E[f \circ Y_t . g \circ Y_t]$. Par linéarité, puis convergence uniforme, on étend ce résultat au cas où f et g sont deux éléments de $\underline{C}(F)$, et il en résulte enfin que $Y_t = Y_{t+}$ p.s. pour chaque $t>0$ ([2], chap.II, n°32).

Supposons que μ soit portée par D ; alors $g=\hat{g}$ μ-pp, et le même raisonnement que ci-dessus montre que $Y_0 = Y_{0+}$ p.s.. Inversement, si $Y_0 = Y_{0+}$ p.s., les égalités précédentes (avec f=1) donnent $E[g \circ Y_0] = E[\hat{g} \circ Y_0]$, ou $\langle \mu, g-\hat{g} \rangle = 0$, et enfin le fait que

(*) Comme d'habitude, on rend le semi-groupe markovien au moyen du point ∂ .

μ est portée par D.

Il ne reste plus qu'à poser

$X_0 = Y_0$, $X_t = Y_{t+}$ pour $t>0$,

pour obtenir le processus (X_t) cherché.

Dans la proposition suivante, nous supposons pour simplifier que μ est portée par D ; nous pouvons alors supposer que $X_0=X_{0+}$ identiquement (il suffit de définir $X_0=Y_{0+}$ ci-dessus).

PROPOSITION 5.- Supposons que μ soit portée par D.

1) Si f est p-excessive par rapport au semi-groupe (P_t), le processus $(f\circ X_t)$ est p.s. continu à droite.

2) Le processus (X_t) est fortement markovien, et l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que la trajectoire de ω rencontre $E_\partial\setminus D$ est négligeable(*).

DÉMONSTRATION.- a) Soit $g\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$; on a $Ug\in\underline{\underline{C}}(F)$, et le processus $(Ug\circ X_t)$ est donc une surmartingale continue à droite. Désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées h sur F telles que le processus $(U(hg)\circ X_t)$ soit p.s. continu à droite ; $\underline{\underline{H}}$ est fermé pour la convergence uniforme, et contient $\underline{\underline{C}}(F)$. Soit (h_n) une suite croissante , uniformément bornée, d'éléments positifs de $\underline{\underline{H}}$, et soit $h=\lim_n h_n$. Les processus $(U(h_ng)\circ X_t)$ sont des surmartingales (début de 3), dans la démonstration de la prop.4), p.s. continues à droite par hypothèse, qui convergent en croissant vers le processus $(U(hg)\circ X_t)$. Celui-ci est donc p.s. continu à droite, d'après [2], chap.VI, T16.

Soit alors h une fonction borélienne positive sur F, et soit $h_n=h\wedge n$; soit (g_n) une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{C}}_c^+(E)$, dont l'enveloppe supérieure est l'indicatrice de E. Les surmartingales p.s. continues à droite $((U(h_ng_n)\circ X_t)$ tendent en croissant vers le processus $(Uh\circ X_t)$, et une nouvelle

(*) Noter toutefois que le processus (X_{t-}) peut rencontrer $E_\partial\setminus D$.

application de VI.T16 montre que le processus $(Uh\circ X_t)$ est p.s. continu à droite.

b) Prenons $p>0$, et $g\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; $U_p g$ est la différence de deux fonctions de la forme Uh (h borélienne ≥ 0), toutes deux finies, donc le processus $(U_p g\circ X_t)$ et le processus $(e^{-pt}U_p g\circ X_t)$ sont p.s. continus à droite. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que, si h est borélienne positive, le processus $(U_p h\circ X_t)$ est p.s. continu à droite.

Une nouvelle application de VI.T16 montre que si f est une fonction p-excessive , le processus $(f\circ X_t)$ est p.s. continu à droite (car f est l'enveloppe supérieure d'une suite de p-potentiels). Cela s'applique aussi à une fonction 0-excessive, car une telle fonction est p-excessive pour tout $p>0$.

c) Montrons que les trajectoires de (X_t) ne rencontrent p.s. pas $F\setminus D$. Il suffit de montrer qu'elles ne rencontrent p.s. pas $\{g\neq\hat{g}\}$,si g appartient à $\underline{\underline{S}}$. Mais les processus $(g\circ X_t)$ et $(\hat{g}\circ X_t)$ sont tous deux p.s. continus à droite ; d'autre part, la relation $U_p(g-\hat{g})=0$ et le théorème de Fubini entraînent que pour presque tout ω on a $g\circ X_t(\omega)=\hat{g}\circ X_t(\omega)$ pour presque tout t. La continuité à droite entraîne alors que pour un tel ω on a $g\circ X_t(\omega)=\hat{g}\circ X_t(\omega)$ pour <u>tout</u> t.

d) Au sujet de la propriété de Markov forte, nous nous bornerons à rappeler un résultat facile : si (X_t) est un processus de Markov continu à droite par rapport à une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, et tel que pour tout $p>0$ toute fonction p-excessive (ou seulement toute fonction $U_p f$, $f\in\underline{\underline{C}}^+(F)$) soit p.s. continue à droite sur les trajectoires de (X_t), alors (X_t) est fortement markovien par rapport à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ (voir par exemple [3]). Cela achève la démonstration.

CHANGEMENT DE RÉSOLVANTE

Nous avons supposé dans notre hypothèse (H) du début que U appliquait $\underline{\underline{C}}_c(E)$ dans $\underline{\underline{C}}(F)$: le fait d'exiger cela pour $U_0=U$ exprime une propriété de "transience" de la résolvante (U_p) sur E, qui n'est pas toujours satisfaite en pratique. Il est plus naturel de faire l'hypothèse suivante, pour un $p>0$:

(H_p) a) Pour toute fonction $f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$, U_pf se prolonge (de manière unique) en une fonction continue sur F.

b) Le cône $\underline{\underline{S}}_p$ des fonctions continues g sur E, telles que $g|E$ soit p-surmédiane, sépare les points de F.

Posons alors $V=U_p$, et désignons encore par V le noyau <u>sur F</u> défini grâce au prolongement par continuité des fonctions Vf ($f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$). La famille $(V_q) = (U_{p+q})$ est une résolvante qui satisfait à l'hypothèse H du début, ce qui nous permet de définir

- des noyaux V_q <u>sur F</u> , satisfaisant à $(I+qV)V_q=V$

- l'ensemble D_p des $x\in F$ tels que $\varepsilon_x qV_q \to \varepsilon_x$ vaguement lorsque $q\to\infty$

- un semigroupe sousmarkovien (Q_t), admettant (V_q) comme résolvante , tel que la fonction $t\mapsto Q_tf^x$ soit continue à droite pour tout $x\in F$ et toute $f\in\underline{\underline{C}}(F)$.

La proposition suivante montre, d'abord que l'on sait construire un bon semi-groupe sous l'hypothèse H_p, et ensuite que si l'on peut faire cette construction pour deux valeurs de p (nous traitons le cas où l'une de ces valeurs est 0, mais l'extension est triviale), les deux semi-groupes ainsi cons truits sont essentiellement les mêmes (*).

PROPOSITION 6.- a) <u>Le semi-groupe</u> (Q_t) <u>associé à la résolvante</u> (V_q) <u>satisfait à</u> $e^{pt}Q_t1 \leqq 1$ <u>pour tout</u> t. <u>Si</u> $x\in E$, <u>on a</u>

$$\int_0^\infty e^{-rt}\, e^{pt}Q_t(x,.)dt = U_r(x,.) \text{ pour tout } r>0$$

b) <u>Supposons que la résolvante</u> (U_q) <u>sur</u> E <u>satisfasse à la fois à l'hypothèse</u> (H) <u>du début et à l'hypothèse</u> (H_p). <u>Alors on a</u> $D_p=D$, <u>et</u> $\varepsilon_xP_t = e^{pt}\varepsilon_xQ_t$ <u>pour tout</u> $x\in D$ <u>et tout</u> t.

DÉMONSTRATION.- a) Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$, comprise entre 0 et 1 ; nous avons sur E $1\geqq (p+q)U_{p+q}1 \geqq (p+q)U_{p+q}f$, ou encore $1+q(p+q)U_pU_{p+q}f \geqq (p+q)U_pf$ sur E. En introduisant la résolvante

(*) Nous ne traiterons pas ici de la construction des processus sous l'hypothèse (H_p). Il n'y a aucune difficulté spéciale.

(V_q), cela s'écrit

$$1 + q(p+q)VV_q f \geqq (p+q)Vf \text{ sur } E, \text{ et donc sur } \{f>0\}.$$

Le noyau V satisfaisant au principe du maximum sur F (prop. 1), cette inégalité a lieu partout, ce qui s'écrit $1 \geqq (p+q)V_q f$, puis $1 \geqq (p+q)V_q 1$ en passant à l'enveloppe supérieure.

Montrons alors que la fonction $q \mapsto \frac{1}{p+q} - V_q 1$ est complètement monotone : sa dérivée n-ième est en effet égale, d'après [2], chap.IX, T.52, à

$$n!(-1)^n \left[\frac{1}{(p+q)^{n+1}} - (V_q)^{n+1} 1 \right]$$

qui a bien le signe de $(-1)^n$ d'après ce qui précède. Par conséquent, la fonction continue à droite et bornée $e^{-pt} - Q_t 1^x$ ($x \in F$) de la variable t a une transformée de Laplace complètement monotone ; elle est donc positive, et la première inégalité est prouvée.

La résolvante du semi-groupe sous-markovien (Q_t) est égale à (V_q) ; si $x \in E$, on a donc

$$\int_0^\infty e^{-qt} Q_t(x,.)dt = U_{p+q}(x,.)$$

Soit (P'_t) le semi-groupe sous-markovien $(e^{pt}Q_t)$; si f est borélienne bornée, si $x \in E$, la fonction

$$r \mapsto \int e^{-rt} P_t(x,f)dt$$

est analytique, et coïncide avec $U_r(x,f)$ sur $]p,\infty[$, donc pour tout $r>0$. Cela achève la démonstration de a).

b) Soit $x \in D$, et soit $f \in \underline{C}_c^+(E)$. Les fonctions $U_p f$ et Vf étant égales sur E, on a $qU_{p+q}Vf = qU_{p+q}U_p f$. D'autre part

$$qU_{p+q}U_p f^x \underset{q\to\infty}{\to} U_p f^x$$ (car $U_p f$ est p-excessive par rapport à la résolvante $U_{\cdot}$)

$$qU_{p+q}Vf^x \to Vf^x$$ (car $Vf \in \underline{C}(F)$, et $x \in D$)

Par conséquent , $V(x,.)=U_p(x,.)$. Nous avons alors

$$V_q f^x = Vf^x - qVV_q f^x = U_p f^x - qU_p V_q f^x = U_p f^x - qU_p U_{p+q} f^x = U_{p+q} f^x$$

(on a utilisé le fait que $V(x,.)=U_p(x,.)$ sur E).

Mais alors la relation $\varepsilon_x qU_q \to \varepsilon_x$ vaguement ($q\to\infty$) qui exprime que $x\in D$, et qui est évidemment équivalente à $\varepsilon_x qU_{p+q} \to \varepsilon_x$, entraîne $\varepsilon_x qV_q \to \varepsilon_x$, et par conséquent $x\in D_p$.

Inversement, supposons $x\in D_p$. Soit $f\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; la fonction Uf appartient à $\underline{\underline{S}}$, donc à $\underline{\underline{S}}_p$, et par conséquent elle est surmédiane par rapport à la résolvante (V_q) (prop.3). D'autre part , elle est continue et la relation $x\in D_p$ entraîne que $rV_rUf^x \to Uf^x$. Ainsi les mesures $\varepsilon_x rV_rU$, qui sont portées par E, croissent avec r et admettent $\varepsilon_x U$ comme limite vague sur E. Il est bien connu que dans ces conditions on a $\lim_{r\to\infty} \langle\varepsilon_x rV_rU,h\rangle = \langle\varepsilon_x U,h\rangle$ pour toute fonction borélienne positive h sur E (ou sur F). Comme $U_{p+q}f$ est différence de deux fonctions de la forme Uh, il en résulte que

$$rV_rU_{p+q}f^x \to U_{p+q}f^x \quad (r\to\infty)$$

Mais d'autre part $U_{p+q}f = V_qf$ sur E, donc le premier membre est aussi égal à $rV_rV_qf^x$, qui tend vers V_qf^x (pour $q=0$, cela résulte du fait que $x\in D_p$: en un point $x\in D_p$, V coïncide avec l'opérateur V_0 de la résolvante) . Par conséquent, $V_q(x,.) = U_{p+q}(x,.)$ pour tout $q\geq 0$. Alors la relation $\varepsilon_x rV_r \to \varepsilon_x$ vaguement entraîne $\varepsilon_x rU_{p+r} \to \varepsilon_x$, donc $\varepsilon_x rU_r \to \varepsilon_x$, et finalement $x\in D$.

§2 .- Applications aux chaînes de Markov

CONSTRUCTION D'UN COMPLÉTÉ ET D'UNE VERSION

Nous utilisons la terminologie du livre [1] de CHUNG (nouvelle édition).

E désigne un ensemble dénombrable, et ∞ un point adjoint à E (rien n'empêche de prendre $I=\mathbb{N}$, et $\infty=+\infty$!) ; on désigne par $(p_t(.,.))$ une matrice de transition standard markovienne sur E - rappelons que le remplacement de " markovienne" par " sousmarkovienne" n'augmente pas la généralité. Il est bien connu que les fonctions $p_.(i,j)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$;

nous poserons, pour tout $p \geq 0$

$$u_p(i,j) = \int_0^\infty p_t(i,j)e^{-pt}dt \ .$$

Nous utiliserons les notations des noyaux : E étant muni de la topologie discrète, et de la tribu associée (celle de toutes les parties de E), nous désignerons par P_t (resp.U_p) le noyau sur E défini par $P_t(i,\{j\}) = p_t(i,j)$ $(U_p(i,\{j\}) = u_p(i,j))$.

Fixons un $p>0$, et montrons que les fonctions $u_p(\cdot,j)$, j parcourant E, séparent E. En effet, si h et k sont deux points qui ne sont pas séparés par ces fonctions, on a $U_p(h,\cdot)=U_p(k,\cdot)$, donc $U_r(h,\cdot)=U_r(k,\cdot)$ pour tout r d'après l'équation résolvante, et enfin $P_t(h,\cdot)=P_t(k,\cdot)$ en vertu de l'unicité de la transformation de Laplace ; en faisant tendre t vers 0, on en déduit que h=k.

Posons alors pour tout $j\in E$ $d_j(h,k) = |u_p(h,j)-u_p(k,j)|$; d_j est un écart borné sur E, complétons E pour la structure uniforme définie par la famille d'écarts d_j $(j\in E)$, et désignons par F le complété de E. Cela revient encore à appliquer E dans $\mathbb{R}^E$ par $i \mapsto (u_p(i,j))_{j\in E}$ - application continue et injective - à identifier E à son image, et à prendre pour F l'adhérence de E. F est un espace compact métrisable, et l'injection de E (discret) dans F est continue. D'autre part, E est dense dans F . Enfin, toute fonction $u_p(\cdot,j)$ se prolonge évidemment en une fonction uniformément continue sur F, et ces prolongements séparent F par construction ; comme une fonction f appartient à $\underline{\underline{C}}_c(E)$ si et seulement si elle a un support <u>fini</u> , U_pf se prolonge en une fonction de $\underline{\underline{C}}(F)$, et ces prolongements séparent F . Autrement dit, l'hypothèse (H_p) est satisfaite par le couple (E,F).

Si le semi-groupe est transient, ce qui revient à dire que les fonctions $u(\cdot,j)=u_0(\cdot,j)$ sont bornées, on peut faire cette construction pour p=0.

Comme à la fin du §1, construisons une résolvante (V_q) sur F, coïncidant avec (U_{p+q}) sur E ; l'ensemble D_p des $x\in F$ tels que $\varepsilon_x rV_r \underset{r\to\infty}{\to} \varepsilon_x$ vaguement ; le semi-groupe (Q_t) tel que $t\mapsto Q_t f$ soit continue à droite pour $f\in \underline{C}(F)$, et qui admet (V_q) comme résolvante. La matrice de transition étant standard, nous avons $E\subset D_p$ D'autre part, nous savons que le semi-groupe $P_t = e^{pt}Q_t$ est sousmarkovien, et que sa résolvante (U'_q) coïncide avec (U_q) sur E.

PROPOSITION 7.- <u>Si</u> $i\in E$, <u>la mesure</u> $\varepsilon_i P_t$ <u>est portée par</u> E <u>pour tout</u> $t\geqq 0$, <u>et on a</u> $P_t(i,\{j\})=p_t(i,j)$ <u>pour tout</u> $j\in E$.

DÉMONSTRATION.- Nous avons

$$\int e^{-qt}p_t(i,j)dt = u_q(i,j) = \int e^{-qt}P_t(i,\{j\})dt$$

L'unicité de la transformation de Laplace entraîne que $p_t(i,j)=P_t(i,\{j\})$ pour presque tout t. D'autre part, l'indicatrice de $\{j\}$ est une fonction scs dans F, et par conséquent $t\mapsto P_t(i,\{j\})$ est scs à droite :

$$P_t(i,\{j\}) \geqq \limsup_{s\to 0+} P_{t+s}(i,\{j\})$$

Comme $p_\cdot(i,j)$ est continue, et égale à $P_\cdot(i,\{j\})$ sur un ensemble dense, cela entraîne $P_t(i,\{j\}) \geqq p_t(i,j)$. Mais cette inégalité ne peut être stricte, car sinon on aurait

$$1 \geqq \sum_{k\in E} P_t(i,\{k\}) > \sum_{k\in E} p_t(i,k)$$

en contradiction avec le caractère markovien de la matrice (p_t).

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> μ <u>une loi sur</u> F ; <u>la loi</u> μP_t <u>est alors portée par</u> E <u>pour tout</u> $t>0$.

DÉMONSTRATION.- Comme μU_p est portée par E, μP_s est portée par E pour presque tout s ; choisissons un tel $s<t$. Nous avons

$$\mu P_t(F\setminus E) = \sum_{i\in E} \mu P_s(\{i\})P_{t-s}(i,F\setminus E)= 0$$

d'après la proposition précédente. Noter que $P_t 1=1$ sur E ; donc $\mu P_{s+t}1 = \mu P_s 1$, et la masse de μP_u est constante. Si μ est portée par D_p, on a $\lim_{u\to 0} \mu P_u 1 = 1$, donc $\mu P_u 1 = 1$ pour tout $u\geqq 0$.

Ceci étant, donnons nous une loi initiale μ portée par E (donc par D_p), et construisons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$ de tribus, dont chacune contient les ensembles négligeables ; un processus (X_t) à valeurs dans F, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, markovien , admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale - la possibilité d'une telle construction résulte de la prop.5. Nous avons

vu en outre que les fonctions excessives sont continues à droite sur les trajectoires d'un tel processus, et que (X_t) est fortement markovien - ce qui nous permet en particulier de rendre la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ continue à droite. Nous savons donc construire des versions raisonnables de la chaîne, à valeurs dans F .

Cependant, la théorie des frontières n'utilise pas le compactifié F, mais le compactifié de MARTIN de E, qui est essentiellement un compactifié du type envisagé dans la première partie, mais relativement à une résolvante duale . Il nous faut donc construire des versions de la chaîne à valeurs dans $E\cup\{\infty\}$ douées de propriétés raisonnables (à partir desquelles la théorie des frontières construira les versions à valeurs dans l'espace de Martin).

Nous allons décrire deux telles versions - pour la seconde, on identifie E à $\underset{\sim}{N}$, ∞ à $+\infty$.

PREMIÈRE VERSION.- On pose $Y_t(\omega)=X_t(\omega)$ si $X_t(\omega)\in E$, $Y_t(\omega)=\infty$ si $X_t(\omega)\notin E$.

SECONDE VERSION.- On choisit un ensemble dénombrable S dense dans $\underset{\sim}{\mathbb{R}}_+$, et on pose $Z_t(\omega) = \liminf\limits_{\substack{s\to t+0\\ s\in S}} X_s(\omega)$

Cette seconde version est la " version semi-continue inférieurement" de CHUNG. Elle peut être décrite sans intervantion du symbole lim inf, de la manière suivante. L'application

$t \mapsto X_t(\omega)$ à valeurs dans F étant continue à droite, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence à droite <u>dans le compactifié d'Alexandrov de E</u> , à l'instant t et le long de S, ne peut être égal qu'à un ensemble de la forme $\{a\}$, ou $\{a,\infty\}$, ou $\{\infty\}(a\in E)$. De plus on a alors $a=X_t(\omega)$ dans les deux premiers cas. On pose alors $Z_t(\omega)=a$ dans les deux premiers cas, $Z_t(\omega)=\infty$ dans le dernier.

Nous conviendrons de poser $p_t(i,\infty)=0$ pour tout t et tout $i\in E$, et de même $p_t(\infty,i)=0$, $p_t(\infty,\infty)=1$. La matrice de transition se trouve ainsi prolongée à $E\cup\{\infty\}$. Nous conviendrons de poser $Y_\infty=Z_\infty=\infty$.

PROPOSITION 8.- a) <u>Les processus</u> (Y_t) <u>et</u> (Z_t) <u>sont des chaînes de Markov à valeurs dans</u> $E\cup\{\infty\}$, <u>admettant</u> (p_t) <u>comme matrice de transition et</u> μ <u>comme loi initiale</u>. <u>Le processus</u> (Y_t) <u>est bien-mesurable par rapport à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>et le processus</u> (Z_t) <u>est progressivement mesurable</u>.

b) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt, on a</u> $Y_T=Z_T$ <u>p.s.</u>

c) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>, <u>les processus</u> $(Y_{T+t})_{t>0}$ <u>et</u> $(Z_{T+t})_{t>0}$ <u>sont des chaînes admettant</u> (p_t) <u>comme matrice de transition</u>.

DÉMONSTRATION.- Le processus (X_t) étant bien-mesurable (en vertu de la continuité à droite des trajectoires) il est immédiat que (Y_t) est bien-mesurable. Nous n'insisterons pas sur le fait que (Z_t) est progressivement mesurable, dont nous ne nous servirons pas, et qui est établi dans les travaux de CHUNG.

Nous avons $P\{X_t\in E\}=\mu P_t(E)=1$ pour tout $t>0$ (prop.7), donc $Y_t=X_t$ p.s. pour tout $t>0$ (et évidemment aussi pour t=0 puisque μ est portée par E). Par conséquent, (Y_t) est bien une chaîne admettant (p_t) comme matrice de transition et μ comme loi initiale. De même, si T est un temps d'arrêt, le processus (X_{T+t}) est un processus de Markov qui admet (P_t) comme semi-groupe de transition d'après la propriété de Markov forte, et le même raisonnement montre que $X_{T+t}=Y_{T+t}$ p.s. pour chaque t, sur $\{T<\infty\}$, d'où il résulte que $(Y_{T+t})_{t>0}$ est une chaîne admettant (p_t) comme semi-groupe de transition.

La démonstration de la prop.8 sera achevée si nous montrons que $Y_T=Z_T$ p.s. pour chaque temps d'arrêt T . La relation est évidente sur $\{T=\infty\}$. Sur $\{T<\infty\}$, la relation $Z_T(\omega)\in E$ entraîne $X_T(\omega)=Z_T(\omega)$, donc $Y_T(\omega)=Z_T(\omega)$. Tout revient donc à montrer que la relation $T<\infty$, $Z_T=\infty$ entraîne p.s. $Y_T=\infty$ - ou encore, que les relations $T<\infty$, $Y_T=i\in E$ entraînent p.s. $Z_T=i$.

Nous nous bornerons à traiter le cas simple où l'ensemble dénombrable S est l'ensemble des nombres dyadiques. Soit alors T^n la n-ième approximation dyadique de T ($T^n=(k+1)2^{-n}$ si $k2^{-n}\leqq T<(k+1)2^{-n}$) ; d'après la propriété de Markov forte, $P\{X_{T^n}\neq i\mid X_T=i\}= 1 - p_{T^n-T}(i,i)$. Comme $T^n-T \leqq 2^{-n}$, X_{T^n} tend en probabilité vers i sur l'ensemble où $X_T=i$, et Y_{T^n} possède donc la même propriété. On peut alors trouver une suite n_k d'entiers telle que $Y_{T^{n_k}}$ converge p.s. vers i (c'est à dire soit p.s. égal à i pour tout k assez grand), et cela entraîne que $Z_T=i$ p.s. sur $\{Y_T=i\}$.

Nous venons donc d'établir le théorème de CHUNG, suivant lequel il existe une version semi-continue inférieurement de la chaîne, satisfaisant à la propriété de Markov forte ([1], chap.II, §9, th.3). Nous allons maintenant interpréter la topologie induite par F sur E.

LA TOPOLOGIE FINE DE CHUNG

Posons pour tout h>0 , i et j désignant deux éléments de E

$$d_h(i,j) = - \log \sup_{0\leqq s\leqq h} p_s(i,j)$$

Il est clair que si h diminue $d_h(i,j)$ augmente , que $d_h(j,j)=0$ et que d'autre part, si $i\neq j$, $p_s(i,j)\leqq 1-p_s(i,i)$ tend vers 0 avec s, de sorte que $d_h(i,j) \underset{h\to 0}{\to} \infty$. La relation $p_{u+v}(i,k) \geqq p_u(i,j)p_v(j,k)$ entraîne $d_{h+h'}(i,k) \leqq d_h(i,j)+d_{h'}(j,k)$

Posons maintenant, pour tout $j \in E$ et tout $u>0$

$$V_u(j) = \{ i \in E : d_u(i,j)<u \}$$

On a $V_u \cap V_{u'} = V_{u \wedge u'}$. D'autre part, on a $j \in V_u(j)$ pour tout u, et la relation $k \in V_{u/2}(j)$ entraîne $V_{u/2}(k) \subset V_u(j)$. Par conséquent, il existe une topologie sur E pour laquelle les voisinages de $j \in E$ sont les ensembles qui contiennent $V_u(j)$ pour u assez petit. Cette topologie est la <u>topologie fine</u> de CHUNG ([1], p.190)

E étant dénombrable, et tout point de E admettant un système fondamental dénombrable de voisinages, la topologie fine sur E admet une base dénombrable d'ouverts. On peut donc étudier la continuité, la semi-continuité... des fonctions réelles sur E au moyen de suites convergentes dans E.

Montrons (toujours d'après CHUNG) que la topologie fine est <u>séparée</u>. Soient j et j' deux points distincts de E, η un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Choisissons h assez petit pour que $p_{\cdot}(j,j)$ et $p_{\cdot}(j',j')$ soient au moins égales à η sur l'intervalle $[0,h]$. On a alors pour tout i $p_h(i,j) \geqq p_s(i,j)$. $p_{h-s}(j,j) \geqq \eta p_s(i,j)$ pour tout $s<h$, et par conséquent

$$p_h(i,j) \geqq \eta . \exp[-d_h(i,j)]$$

de même $$p_h(i,j') \geqq \eta . \exp[-d_h(i,j')]$$

Comme $\eta > \frac{1}{2}$, on a $\exp[-d_h(i,j)]+\exp[-d_h(i,j')] \leqq \frac{1}{\eta} < 2$, ce qui entraîne que i ne peut pas être voisin simultanément de j et de j'.

PROPOSITION 9.- a) <u>Si</u> $t>0$, $j \in E$, <u>la fonction</u> $p_t(\cdot,j)$ <u>est continue pour la topologie fine</u>. <u>La topologie fine est définie par la famille dénombrable d'écarts</u>

$$(x,y) \mapsto |p_t(x,j)-p_t(y,j)| \qquad \begin{array}{l} j \in E \\ t \text{ rationnel} >0 \end{array}$$

b) <u>Si</u> $q>0$, <u>et si</u> h <u>est une fonction bornée sur</u> E, <u>la fonction</u> $U_q h$ <u>est continue pour la topologie fine</u>(*). <u>La</u>

(*) La fonction $P_t h$ est aussi continue ($t>0$)

<u>topologie fine est définie par la famille dénombrable d'écarts</u> (<u>où</u> $p>0$ <u>est fixé</u>)

$$(x,y) \mapsto |u_p(x,j)-u_p(y,j)| \qquad (j\in E)$$

DÉMONSTRATION.- a) Soit (x_n) une suite qui converge vers $i\in I$ au sens de la topologie fine. Alors pour tout h $\sup\limits_{0\leqq s\leqq h} p_s(x_n,i)$ tend vers 1 lorsque $n\to\infty$. Soient $t>0$, $s<t$; nous avons

$$p_t(x_n,j) \geqq p_s(x_n,i)p_{t-s}(i,j)$$

La fonction $p_\cdot(i,j)$ étant continue, choisissons h assez petit pour que $s\leqq h$ entraîne $|p_{t-s}(i,j) - p_t(i,j)|\leqq\varepsilon$, puis n assez grand pour qu'il existe $s_n<h$ tel que $p_{s_n}(x_n,i) > 1-\varepsilon$. Alors

$$p_t(x_n,j) \geqq (1-\varepsilon)(p_t(i,j)-\varepsilon)$$

Autrement dit, les fonctions $p_t(\cdot,j)$ sont semi-continues inférieurement pour la topologie fine. Comme leur somme sur j est la fonction 1, qui est continue, chacune d'elles est continue.

Il en résulte que si h est une fonction comprise entre 0 et 1 la fonction $P_t h$ est semi-continue inférieurement pour la topologie fine ; mais il en est de même pour $P_t(1-h)$, et la somme de ces deux fonctions est la fonction continue $P_t 1=1$. Par conséquent $P_t h$ est continue.

Considérons maintenant une suite (x_n) d'éléments de F possédant la propriété suivante

$$\text{pour tout } t \text{ rationnel } >0, \text{ tout } j\in E,\ p_t(x_n,j)\to p_t(i,j)$$

et montrons que la suite x_n converge finement vers i. Cela entraînera que la topologie fine est déterminée par la famille d'écarts indiquée. Or soient h un nombre >0, $\varepsilon>0$, choisissons t rationnel tel que $t<h$, et que $p_t(i,i)>1-\varepsilon$; on a alors $p_t(x_n,i) > 1-\varepsilon$ pour n assez grand, et par conséquent

$$\sup_{0\leqq s\leqq h} p_s(x_n,i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ce qui exprime que $x_n \to i$ finement.

Les fonctions $p_t(\cdot,j)$ $(t>0)$ étant continues pour la topologie fine, le théorème de Lebesgue entraîne aussitôt que les fonctions $u_q(\cdot,j)$ sont finement continues, et la relation $U_q 1 = 1/q$ entraîne (comme dans la démonstration faite plus haut) que $U_q h$ est finement continue.

Fixons maintenant p, et considérons la topologie $\underline{\underline{T}}$ définie par la famille d'écarts $|u_p(x,j)-u_p(y,j)|$; $\underline{\underline{T}}$ est métrisable, moins fine que la topologie fine, et il nous reste à montrer que toute suite (x_n) qui converge/$\underline{\underline{T}}$ vers $i \in E$ converge finement vers i, ce qui entraînera l'identité des deux topologies. Le même argument que ci-dessus montre que toute fonction $U_p h$ (h bornée) est continue/$\underline{\underline{T}}$. L'équation résolvante entraîne alors le même résultat pour toute fonction $U_q f$ (f bornée), car une telle fonction est combinaison linéaire de deux fonctions du type précédent. En particulier, $U_q P_t h$ est continue/$\underline{\underline{T}}$ pour toute fonction bornée h.

Supposons alors que la suite (x_n) ne converge pas finement vers i ; quitte à extraire une suite partielle, nous pouvons supposer l'existence d'un $h>0$, d'un $\varepsilon>0$ tels que l'on ait pour tout n

$$\sup_{0 \leqq s \leqq h} p_s(x_n,i) \leqq 1-\varepsilon$$

Mais alors on a pour tout n et tout $h' \leqq h$

$$\frac{1}{h'} \int_0^{h'} e^{-ps} p_s(x_n,i)\, ds \leqq 1-\varepsilon$$

Mais ceci est la valeur au point x_n de la fonction continue/$\underline{\underline{T}}$ $\frac{1}{h'}[U_p I_{\{i\}} - e^{-ph'} U_p P_{h'} I_{\{i\}}]$, et il en résulte que l'on a pour tout $h' \leqq h$

$$\frac{1}{h'} \int_0^{h'} e^{-ps} p_s(i,i)\, ds \leqq 1-\varepsilon$$

en contradiction avec le fait que $p_s(i,i) \underset{s\to 0}{\to} 1$. Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE.- a) La topologie fine est identique à la topologie induite par F sur E.

b) Pour presque tout $\omega\in\Omega$, l'application $Z_{\cdot}(\omega)$ possède la propriété suivante

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } Z_t(\omega)\in E, \text{ on a } Z_t(\omega) = \lim_{\substack{s\to t+0\\ s\in S}} \text{fine } Z_s(\omega)$$

DEMONSTRATION.- a) est évidente. Pour établir b), désignons par H l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $Z_s(\omega)\in I$ (donc $Z_s(\omega)=X_s(\omega)$*) pour tout $s\in S$; on a P(H)=1 d'après la prop.8, et l'assertion b) se réduit pour $\omega\in H$ à la continuité à droite dans F du processus (X_t). On a bien entendu un résultat analogue pour la version (Y_t). Nous avons retrouvé ainsi le th.4 du chap.II,§ 11 de CHUNG [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG (K.L.).- Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2e édition, Springer, 1967.

[2] MEYER (P.A.).- Probabilités et Potentiel, Hermann, Paris ; Blaisdell, Boston, 1966.

[3] MEYER (P.A.).- Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics, n°26 ; Springer, 1967.

[4] WATANABE (T) et KUNITA (H).- Markov processes and Martin boundaries, Illinois J. of M., t.9, 1965, p.485-526.

D'autre part, des travaux récents et non publiés de DOOB contiennent les applications à la théorie des chaînes de Markov qui ont été données ci-dessus. Bien que la compactification utilisée par DOOB soit la même que celle qui est utilisée ici, DOOB emploie des méthodes différentes, et développe beaucoup plus les applications de la compactification dans la direction de la " théorie des frontières".

* d'aprés la remarque du haut de la page 194.

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.