PAUL-ANDRÉ MEYER

Une majoration du processus croissant naturel associé à une surmartingale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 2 (1968), p. 166-170

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__166_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

UNE MAJORATION DU PROCESSUS CROISSANT NATUREL ASSOCIÉ À UNE SURMARTINGALE

(P.A.Meyer)

Tous les processus considérés ci-dessous sont continus à droite, et adaptés à une famille de tribus ($\underline{\underline{F}}_t$), croissante et continue à droite. L'espace probabilisé sous-jacent est supposé complet, et la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles négligeables.

Si $H=(H_t)$ est un processus, nous désignerons par $H^\times$ la variable aléatoire $\sup_t |H_t|$. Notre objet principal est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> $X=(X_t)$ <u>un potentiel de la classe</u> (D), <u>et soit</u> $A=(A_t)$ <u>le processus croissant intégrable qui engendre</u> X. <u>Si</u> p <u>est un nombre</u> >1 (<u>fini</u>) , <u>il existe deux constantes</u> C <u>et</u> C' <u>telles que l'on ait</u>

$$0<C,C'<\infty \qquad CN_p(X^\times) \leqq N_p(A_\infty) \leqq C'N_p(X^\times)$$

N_p <u>désignant la norme dans</u> L^p.

Nous déduirons ensuite du théorème 1 une partie d'un résultat récent de BURKHOLDER sur les martingales.

Voici encore quelques notations : k sera l'unique entier tel que $k<p\leqq k+1$ (on a donc $k\geq 1$) ; C sera une constante positive, dont la valeur pourra varier d'une formule à l'autre. Enfin, la notation $\underset{\sim}{E}[\cdot|\underline{\underline{F}}_t]$ pour l'opérateur d'espérance conditionnelle sera abrégée en $\underset{\sim}{E}_t[\cdot]$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

1. La première des deux inégalités du théorème 1 est bien connue. En effet, on a $X^\times \leqq \sup_t X_t+A_t$, et $N_p[\sup_t(X_t+A_t)] \leqq qN_p(A_\infty)$, q désignant l'exposant conjugué de p , en vertu d'une célèbre inégalité due à DOOB. Ainsi, il suffira de prouver la seconde inégalité.

Il suffira pour cela de traiter le cas où le processus A est continu et borné. En effet, supposons le théorème établi dans ces conditions. Soit A un processus croissant continu, mais non nécessairement borné, soit A^n le processus croissant $A\wedge n$, et soit X^n le potentiel engendré par A^n ; on a $N_p(A_\infty\wedge n) \leqq C'N_p((X^n)^\times) \leqq C'N_p(X^\times)$, d'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

Ensuite, désignons par A un processus croissant intégrable naturel, par X le potentiel qu'il engendre, par A^n le " laplacien approché" de

X d'ordre $\frac{1}{n}$ ([2], chap.VII, th.28), par X^n le potentiel engendré par A^n ; comme A^n est continu, on a $N_p(A^n_\infty) \leq C'N_p((X^n)^\times) \leq C'N_p(X^\times)$. Si ce dernier nombre est $+\infty$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, les variables aléatoires A^n_∞ forment un ensemble borné (donc faiblement compact) dans L^p ; comme elles convergent vers A_∞ faiblement dans L^1, elles convergent alors vers A_∞ faiblement dans L^p , et on a $N_p(A_\infty) \leq \liminf_n N_p(A^n_\infty)$, d'où le résultat.

<u>Nous supposerons donc, dans toute la suite, que</u> A <u>est borné et continu</u>

2. Posons, j désignant un nombre ≥ 1

$$X^{(j)}_t = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j]$$

On a si $s<t$ $\underset{\sim}{E}_s[X^{(j)}_s] = \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_t)^j] \leq \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_s)^j] = X^{(j)}_s$. Ce processus est donc une surmartingale (bornée), et on vérifie aussitôt que $\underset{\sim}{E}[X^{(j)}_\cdot]$ est une fonction continue à droite ; il existe donc une version continue à droite de cette surmartingale - c'est celle-ci que nous désignerons dans la suite par la notation $(X^{(j)}_t)$. Il s'agit évidemment d'un potentiel de la classe (D) (borné). Le processus croissant naturel qui engendre $(X^{(j)}_t)$ sera noté $(A^{(j)}_t)$. Nous écrirons $X^\times_{(j)}$ au lieu de $(X^{(j)})^\times$.

LEMME 1.- <u>On a</u> $dA^{(j)}_s = jX^{(j-1)}_s\, dA_s$, <u>et donc</u> $A^{(j)}_\infty \leq X^\times_{(j-1)}A_\infty$.

Soit d'abord T un temps d'arrêt étagé, et soit $B\in\underline{\underline{F}}_T$. On a

$$\int_B X^{(j)}_T d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} X^{(j)}_t d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} (A_\infty - A_t)^j d\underset{\sim}{P} = \int_B (A_\infty - A_T)^j d\underset{\sim}{P}$$

On étend aussitôt cette relation à un temps d'arrêt T quelconque, au moyen d'une approximation par des temps d'arrêt étagés. Les processus $(X^{(j)}_t)$ et $((A_\infty - A_t)^j)$ satisfont donc aux hypothèses du th. 15, chap.VII de [2]. Par conséquent , en remplaçant j par j-1

$$\underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty jX^{(j-1)}_s dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty j(A_\infty - A_s)^{j-1}dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j] = X^{(j)}_t$$

(on a utilisé la continuité de A). D'où le résultat.

LEMME 2.- <u>On a</u> $N_{\frac{p}{k}}[X^\times_{(k)}] \leq C[N_p(A_\infty)]^{k-1}N_p(X^\times)$.

Il suffit évidemment de démontrer la formule suivante, pour $j<p$

$$N_{\frac{p}{j}}[X^\times_{(j)}] \leq CN_p(A_\infty)N_{\frac{p}{j-1}}(X^\times_{(j-1)})$$

Utilisons successivement l'inégalité de DOOB rappelée plus haut, le lemme 1, l'inégalité de HÖLDER pour les exposants conjugués j et j/(j-1). Il vient

$$N_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j)}) \leqq CN_{\frac{p}{j}}(A^{(j)}_{\infty}) \leqq CN_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j-1)}A_{\infty}) = C\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}} . A_{\infty}^{\frac{p}{j}}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$\leqq C\{ N_j(A_{\infty}^{\frac{p}{j}})N_{\frac{j}{j-1}}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= C\{(\underset{\sim}{E}[A^{p}_{\infty}])^{\frac{1}{j}}.(\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j-1}}])^{\frac{j-1}{j}}\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{j-1}}(X^{\times}_{(j-1)}) .$$ CQFD

3. Passons à la démonstration du théorème proprement dit . Calculons $(N_p(A_{\infty}))^p$; cela vaut

$$\underset{\sim}{E}[A^{p}_{\infty}] = \underset{\sim}{E}[-\int_0^{\infty} d((A_{\infty}-A_t)^p)] = \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(A_{\infty}-A_t)^{p-1}dA_t]$$

$$= \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty} X_t^{(p-1)}dA_t] \leqq \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(X_t^{(k)})^{\frac{p-1}{k}}dA_t]$$

En effet, posons $V=(A_{\infty}-A_t)^k$, $\eta = (p-1)/k$; comme on a $0<\eta<1$, la fonction $x \mapsto x^{\eta}$ est concave, et on a

$$X_t^{(p-1)} = \underset{\sim}{E}_t[V^{\eta}] \leqq (\underset{\sim}{E}_t[V])^{\eta} = (X_t^{(k)})^{\eta} .$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de HÖLDER, puis le lemme 2

$$(N_p(A_{\infty}))^p \leqq C\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}}.A_{\infty}] \leqq CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{p-1}}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}}]$$

$$=CN_p(A_{\infty})\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p}{k}}]\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$=CN_p(A_{\infty})\{N_{\frac{p}{k}}(X^{\times}_{(k)})\}^{\frac{p-1}{k}} \leqq CN_p(A_{\infty})\{N_p(X^{\times})\}^{\frac{p-1}{k}}\{N_p(A_{\infty})\}^{\frac{(k-1)(p-1)}{k}}$$

ou enfin

$$[N_p(A_{\infty})]^{\frac{p-1}{k}} \leqq C[N_p(X^{\times})]^{\frac{p-1}{k}}$$

d'où le théorème suit aussitôt.

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES MARTINGALES

4. Soit (X_n) une surmartingale positive à temps discret ; en la considérant comme restriction d'une surmartingale continue, constante sur chaque intervalle $[n,n+1[$, et en appliquant le résultat précédent à la partie potentiel de celle-ci, on obtient la majoration suivante :

<u>Soit</u> S <u>la variable aléatoire positive</u>

$$(X_0-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) + (X_1-\underset{\sim}{E}[X_2|\underline{\underline{F}}_1])+\ldots+(X_i-\underset{\sim}{E}[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i])+\ldots$$

<u>Il existe une constante</u> C_p <u>telle que l'on ait</u> $N_p(S) \leqq C_p N_p(X^\times)$.

En particulier, considérons des variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ qui forment une surmartingale positive à temps fini ; nous pouvons alors appliquer le résultat précédent à la surmartingale obtenue en posant $X_i=0$ pour $i>n$. La variable aléatoire S est alors égale à

$$X_0 +(X_1-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) +\ldots+(X_n-\underset{\sim}{E}[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}])$$

5. Considérons maintenant une martingale continue à droite , à temps continu, (M_t), et supposons que l'on ait $M_t \in L^2$ pour tout t. Soit une subdivision $0<t_1<t_2\ldots<t_n =t$, et considérons la surmartingale positive discrète (à temps fini) $X_0,\ldots,X_n$ définie de la manière suivante (par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_0,\underline{\underline{F}}_{t_1},\ldots,\underline{\underline{F}}_{t_n}$)

$$\begin{aligned}
X_0 &= \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_0]\\
X_1 &= \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_1}] - M_{t_1}^2 + (M_{t_1}-M_0)^2\\
X_2 &= \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_2}] -M_{t_2}^2 + (M_{t_2}-M_{t_1})^2\\
&\ldots\ldots\\
X_n &= \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_n}] -M_{t_n}^2 + (M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2 = (M_t-M_{t_{n-1}})^2
\end{aligned}$$

La positivité résulte de l'inégalité $\underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}]-(\underset{\sim}{E}[M_t|\underline{\underline{F}}_{t_i}])^2 \geqq 0$ (convexité de $x \mapsto x^2$), et le fait que X est une surmartingale résulte de la relation

$$X_i-E[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i] = (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2 \quad \text{pour } 0<i\leqq n \quad (M_0^2 \text{ pour } i=0).$$

Cela donne la valeur de S : $M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\ldots+(M_t-M_{t_{n-1}})^2$. D'autre part, on a $X^\times \leqq \sup_s \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_s] + 4 \sup_s M_s^2$. En utilisant l'inégalité de DOOB rappelée au début, on trouve que $N_p(X^\times) \leqq CN_{2p}(M_t)$, et finalement on a trouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> $1<p<\infty$, <u>et soit</u> (M_s) <u>une martingale continue à droite. On a pour toute subdivision</u> $0<t_1\ldots<t_n=t$ <u>l'inégalité</u>

$$N_p[M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\ldots+(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2] \leqq CN_{2p}(M_t)^{(2)}$$

<u>où C ne dépend que de</u> p.

En particulier, faisons tendre le pas des subdivisions vers 0 ; la somme au premier membre converge dans L^1 vers $[M,M]_t$ (voir [3]). Le théorème 2 tel qu'il est énoncé équivaut au résultat de BURKHOLDER dont il a été question plus haut, et la relation

$$N_p([M,M]_t) \leqq CN_{2p}(M_t)$$

qui s'en déduit par passage à la limite (grâce au lemme de FATOU) est un résultat dû à P.W.MILLAR , communiqué dans une correspondance privée, et que nous déduisons ainsi du théorème 1.(2)

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. BURKHOLDER . Martingale transforms. Ann.Math.Stat. 37, 1966, 1494-1505

[2] P.A.MEYER . Probabilités et Potentiels , 1966.

[3] P.A. MEYER . Intégrales stochastiques I, Séminaire de Probabilités de l'Université de Strasbourg, 1967.

(2) Les résultats de BURKHOLDER et de MILLAR valent aussi pour p compris entre $\frac{1}{2}$ (exclu) et 1, et c'est là évidemment le cas le plus intéressant, puisqu'il concerne des martingales qui ne sont pas de carré intégrable. Bien que le théorème 1 soit trivial pour ces valeurs de p, on ne peut plus en déduire le théorème 2.