

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-PIERRE IGOT

## Un théorème de Linnik

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 2 (1968), p. 111-122

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1968\\_\\_2\\_\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1968__2__111_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE  
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités

---

Février 1967

---

UN THÉORÈME DE LINNIK

(par J. P. Igot)

---

Yu V. LINNIK a démontré, entre 1956 et 1960, plusieurs théorèmes concernant la décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. Cependant les démonstrations sont souvent longues et délicates (1).

Récemment I. V. OSTROVSKIY a repris la question et montré que ces théorèmes étaient vrais pour une classe plus vaste de fonctions : celle des fonctions entières à crête , ce qui a permis d'obtenir des démonstrations plus simples.

Le théorème proposé ici traite de la factorisation de la composition d'une loi de Laplace-Gauss et d'une loi de Poisson (2).

1 . RAPPELS ET DEFINITIONS .

Soit  $X$  une variable aléatoire (v. a. ) et  $\varphi$  sa fonction caractéristique (f. c. );  $\varphi$  est la transformée de Fourier de la loi de probabilité de  $X$ .

1. 1. - Une f. c. est dite indéfiniment divisible (f. c. i. d. ) si, pour tout nombre réel positif  $d$ ,  $\varphi^d(t)$  est une f. c. . La loi associée est dite indéfiniment divisible (l. i. d. ).

On a une représentation canonique de telles f. c., due à Lévy et Khintchine :

$$(1) \text{ Log } \varphi(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}) \frac{1+u^2}{u^2} d\mu(u)$$

( $\gamma, \sigma$  réels,  $\mu$  mesure positive bornée sur  $\mathbb{R}$ , ne chargeant pas l'origine).

1.2. - Si  $I$  désigne la classe des l. i. d., on désigne par  $I_0$  celle des l. i. d. qui n'ont que des composantes elles-mêmes indéfiniment divisibles.

Si  $\varphi$  est la f. c. d'une telle loi, et si l'on a  $\varphi(t) = \varphi_1(t) \varphi_2(t)$  où  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des f. c., alors  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont des f. c. i. d. .

On a le

1.3. - Théorème de Cramer (3).

Les lois normales sont dans  $I_0$   
et

1.4. - Théorème de Raïkov (3).

Les lois de Poisson sont dans  $I_0$ .

Linnik a établi le théorème suivant, qui contient les deux précédents :

1.5. - Théorème de Linnik (1).

La composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson est dans  $I_0$ .

C'est un théorème un peu plus général, démontré par Ostrovskiy (2), qui fait l'objet du présent exposé.

2. INTRODUCTION DES FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE.

2.1. - Une f. c.  $\varphi$  dont la série de Taylor au voisinage de l'origine admet un rayon de convergence  $R$  strictement positif, peut se prolonger analytiquement dans une bande  $\mathcal{B} = \mathbb{R} + i\Gamma$  ( $\Gamma$  voisinage réel de l'origine), du plan complexe, son expression dans  $\mathcal{B}$  s'obtenant en remplaçant  $t$  réel par  $t$  complexe dans l'intégrale de transformation de Fourier.

2.2. -  $\varphi$  satisfait dans  $\mathcal{B}$  à la propriété de crête :

$$|\varphi(x + iy)| \leq \varphi(iy) \quad \begin{array}{l} x + iy \in \mathcal{B} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$

2.3. - Si, de plus  $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ , la f. c. est entière et l'on pourra utiliser les propriétés des fonctions entières à crête pour démontrer des théorèmes sur les f. c.

2.4. - Comme enfin les f. c. entières se factorisent en f. c. également entières (théorème de Raïkov) Ostrovskiy établit le théorème suivant, qui contient le théorème de Linnik.

2.5. - Théorème :

Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions entières, à crête, telles que  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$  et vérifiant :

$$(1) \varphi_1(t) \varphi_2(t) = \varphi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1) + i\beta t - \delta t^2} \quad \begin{array}{l} \lambda, \delta \text{ positifs} \\ \beta \text{ réel} \end{array}$$

alors

$$\varphi_m(t) = e^{\lambda_m(e^{it} - 1) + i\beta_m t - \delta_m t^2} \quad \begin{array}{l} \lambda_m, \delta_m \text{ positifs} \\ \beta_m \text{ réel} \end{array}$$

$$m = 1, 2$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous utiliserons deux lemmes sur les fonctions entières, qui ont leur intérêt propre.

2.6. - Lemme

Soit f une fonction holomorphe de z pour  $\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$  telle que

- 1)  $|f(z)| \leq K e^{|z|^p}$  pour  $\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$
  - 2)  $|f(x e^{i\alpha})| \leq K$
  - 3)  $|f(x e^{i\beta})| \leq K$
- où  $\begin{cases} p < \frac{\pi}{\beta - \alpha} \\ K \text{ est une constante positive} \end{cases}$

alors f(z) est bornée pour tout z :  $\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$

Démonstration :

a) Soit D le domaine défini par  $\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$   
 $|z| \leq R$

et  $\omega(z, \widehat{AB}, D)$  la solution du problème de Dirichlet dans D avec les conditions limites

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{sur l'arc } \widehat{AB} \\ 0 & \text{sur } \partial D - \widehat{AB} \end{cases}$$

$\omega(z, \widehat{AB}, D)$  est la mesure harmonique, en z, de  $\widehat{AB}$  par rapport à D.

On a :

$$\omega(z, \widehat{AB}, D) = \frac{2}{\pi} \theta \quad \theta = \text{Arg} \frac{(e^{i\alpha} R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} - z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}{(e^{i\alpha} R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} + z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}$$

(le résultat est immédiat sur le demi-cercle correspondant à  $\alpha = 0, \beta = \pi$  et l'on utilise l'application :

$$z \longrightarrow Z = z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} e^{-\frac{i\alpha\pi}{\beta-\alpha}}$$

qui transforme le domaine D en un demi-cercle.

b) La fonction sousharmonique  $\text{Log} |f(z)|$  est, par hypothèse, majorée par  $m = \text{Log } K$  sur  $\{\partial D - \widehat{AB}\}$  et par  $M = \text{Log } K + R^p$  sur  $\widehat{AB}$ .

c) La fonction harmonique  $M\omega + m(1 - \omega)$  est égale à  $m$  sur  $\partial D - \widehat{AB}$  et  $M$  sur  $\widehat{AB}$ , donc majore  $\text{Log}|f(z)|$  sur la frontière de  $D$ . D'après le principe du maximum, elle majore  $\text{Log}|f(z)|$  dans tout le domaine  $D$ .

d) On voit immédiatement que, pour  $R$  tendant vers l'infini,

$$\theta = O\left(\frac{1}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right)$$

il résulte alors de c) que

$$\text{Log}|f(z)| = O\left(\frac{R^\rho}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right) \quad R \rightarrow \infty \quad z \in D$$

par suite  $f(z)$  est bornée pour tout  $z$  :

$$\alpha \leq \text{Arg } z \leq \beta$$

Corollaire 2.7. -

Soit  $f(z)$  une fonction entière, bornée sur l'axe réel et à croissance lente, c. à. d.  $|f(z)| = O(|z|^n)$   $|z| \rightarrow \infty$  pour un certain  $n$ , alors  $f$  est constante.

Démonstration :

On applique

1) la propriété 2.6. - pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = \pi$   
 puis pour  $\alpha = \pi$  et  $\beta = 2\pi$  en prenant  $\rho < 1$ .

2) le Théorème de Liouville

2.8. - Lemme

Soit  $f(z)$  une fonction entière, périodique de  $z$ , de période  $T$  et satisfaisant à :

$$(2) |f(z)| = O(e^{L|z|}) \quad L \text{ positif}$$

$$|z| \rightarrow \infty$$

alors le développement de Fourier de f ne comprend qu'un nombre fini de termes et l'on a :

$$f(z) = \sum_{k=-\omega}^{k=\omega} c_k e^{\frac{2\pi i z k}{T}} \quad \text{avec} \quad \omega = \left[ \frac{|T| L}{2\pi} \right]$$

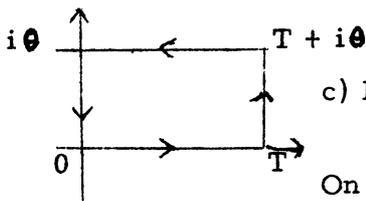
Démonstration :

a) La période T est complexe, mais on se ramène à T positif en prenant  $f_1(z) = f(z e^{i\alpha})$  avec  $T = |T| e^{i\alpha}$ .  $f_1$  est alors entière périodique de période |T| et vérifie (2).

b) Pour  $T > 0$  et x réel, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i x k}{T}} \quad \text{et} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi i x k}{T}} dx$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



c) Montrons que  $c_k$  est nul pour  $|k| > \omega$

On intègre la fonction entière  $f(z) e^{-\frac{2\pi i z k}{T}}$  pour k fixé sur le contour D ci-contre ( $\theta \neq 0$ ) et, en tenant compte de la périodicité de f, on obtient

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x + i\theta) e^{-\frac{2\pi i x k}{T}} e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} dx$$

et en vertu de (2)

$$|c_k| \leq K e^{L(T + |\theta|)} e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} \quad \text{pour } |\theta| \text{ grand}$$

soit alors  $k > \omega$

$$\frac{2\pi k}{T} = L + \eta \quad \eta > 0$$

faisons tendre  $\theta$  vers  $-\infty$

$$|c_k| \leq K e^{L(T + |\theta|)} e^{-L|\theta|} e^{-\eta|\theta|}$$

d'où

$$c_k = 0$$

De même, supposons  $k < -\omega$ , et posons

$$\frac{2 \pi k}{T} = -L - \eta$$

faisons tendre  $\theta$  vers  $+\infty$ , il vient

$$c_k = 0$$

d) les fonctions  $f(z)$  et  $\sum_{k=-\omega}^{+\omega} c_k e^{\frac{2 \pi z k}{T}}$  sont entières et coïncident sur l'axe réel, donc

$$f(z) = \sum_{k=-\omega}^{+\omega} c_k e^{\frac{2 \pi i z k}{T}} \quad z \in \mathbb{C}$$

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5. -

a) Il résulte de (1) que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  n'ont pas de zéros.

$$\text{Soit } \varphi_1(t) = e^{\psi_1(t)} \quad t \in \mathbb{C}, \varphi_1(0) = 0$$

$$\text{Posons } g(z) = \psi_1(-i z) \quad z \in \mathbb{C}$$

nous allons établir que :

$$g(z) = \lambda_1 (e^z - 1) + \gamma_1 z^2 + \beta_1 z$$

$$\lambda_1, \gamma_1 \text{ positifs}$$

$$\beta_1 \text{ réel}$$

$$\text{b) soit } u(x, y) = \text{Re} \{ g(x + iy) \} \quad x, y \text{ réels}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2} [g(x + iy) + g(x - iy)] \text{ puisque } g \text{ est réel pour } z \text{ réel}$$

$$\text{On a } (3) \quad 0 \leq u(x, 0) - u(x, y) \leq 2 \lambda e^x \sin^2 \frac{y}{2} + \gamma y^2$$

en effet, la propriété de crête permet d'écrire :

$$\frac{\psi_1(i\tau)}{\psi_1(\sigma+i\tau)} = \frac{\psi_2(\sigma+i\tau)}{\psi_2(i\tau)} \cdot \frac{\psi(i\tau)}{\psi(\sigma+i\tau)}$$

$$1 \leq \left| \frac{\psi_1(i\tau)}{\psi_1(\sigma+i\tau)} \right| \leq e^{2\lambda e^{-\tau} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \gamma \sigma^2}$$

$$0 \leq \psi_1(i\tau) - \operatorname{Re} \psi_1(\sigma+i\tau) \leq 2\lambda e^{-\tau} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \gamma \sigma^2$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= y \\ \tau &= -x \end{aligned}$$

$$c) |u(x, 0)| \leq \lambda e^x + \gamma x^2 + K|x|$$

En effet  $\psi_2$  étant une fonction entière à crête,  $b(\tau) = \psi_2(i\tau)$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ) est une fonction convexe de  $\tau$  (th. de Dugué) et  $b(0) = 0$  ; par suite, si  $\alpha$  désigne la dérivée de  $b(\tau)$  à l'origine, on a

$$b(\tau) \geq -|\alpha| |\tau|$$

$$\text{mais } \psi_1(i\tau) + \psi_2(i\tau) = \lambda(e^{-\tau} - 1) + \gamma\tau^2 - \beta\tau$$

$$\text{d'où } |\psi_1(i\tau)| \leq \lambda e^{-\tau} + \gamma\tau^2 + |\beta||\tau| + |\alpha||\tau|$$

et l'on pose  $\tau = -x$

d) Il résulte de b) et c) que

$$(4) \quad |u(x, y)| \leq 3\lambda e^x + \gamma(x^2 + y^2) + K|x|$$

e) Montrons alors que :

$$(5) \quad |g(z)| = o(|z| e^{\operatorname{Re} z} + |z|^3) \quad (|z| \rightarrow \infty)$$

En effet, la formule de Schwartz (où  $|\xi| < 1$ )

$$g(z + \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(g(z + e^{i\varphi})) \frac{e^{i\varphi} + \xi}{e^{i\varphi} - \xi} d\varphi + i \operatorname{Im}[g(z)]$$

donne, en dérivant par rapport à  $\xi$  au point  $\xi = 0$ ,

$$g'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \cos\varphi, y + \sin\varphi) e^{-i\varphi} d\varphi \quad \left( \begin{array}{l} z = x + iy \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$|g'(z)| = O(e^{\operatorname{Re} z + |z|^2}) \quad |z| \rightarrow \infty \text{ d'après (4)}$$

mais 
$$g(z) = z \int_0^1 g'(zt) dt$$

donc 
$$|g(z)| \leq O(|z| e^{\operatorname{Re} z + |z|^3}) \quad |z| \rightarrow \infty$$

f) Posons, pour x complexe, et y réel

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (g(x + iy) + g(x - iy))$$

il résulte alors de (5) que

$$(6) \quad u(x, y) = O(|x| e^{\operatorname{Re} x + |x|^3}) \quad \begin{array}{l} |x| \rightarrow \infty \\ y \text{ fixé} \end{array}$$

montrons alors que  $\chi(x) = u(x, 0) - u(x, 2\pi)$  ( $x \in \mathbb{C}$ ) est constante

on a  $\chi(x)$  bornée pour x réel d'après (3)

$$|\chi(x)| = O(|x|^3) \text{ pour } x \text{ imaginaire pur, } |x| \rightarrow \infty$$

$$|\chi(x)| = O(e^{\frac{3}{2}|x|}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \text{ d'après (6)}$$

Considérons alors, pour  $\operatorname{Re} x \geq 0$ , la fonction

$$V(x) = \frac{\chi(x)}{(x+1)^3}$$

Dans chacun des domaines  $0 \leq \operatorname{Arg} x \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} x \leq \pi$ ,  $V(x)$  satisfait aux conditions du lemme 2.6. -

$V(x)$  est donc bornée pour  $\operatorname{Re} x \geq 0$

on applique le même raisonnement, pour  $\operatorname{Re} x \leq 0$ , à la fonction

$$W(x) = \frac{\chi(x)}{(x-1)^3}$$

par suite

$$|\chi(x)| = o(|x|^3) \quad |x| \longrightarrow \infty$$

mais

$\chi(x)$  bornée pour  $x$  réel

$\chi$  est donc constante d'après le corollaire 2.7. -

$$g) -2\chi(z) = g(z + 2\pi i) + g(z - 2\pi i) - 2g(z) = C$$

donc la fonction  $g_1(z) = g(z) - g(z - 2\pi i) - \frac{Cz}{2\pi i}$

est entière, périodique de période  $2\pi i$ , et satisfait à :

$$|g_1(z)| = o(e^{3|z|/2}) \quad |z| \longrightarrow \infty$$

on peut lui appliquer le lemme 2.8. :

$$g_1(z) = A_0 + A_1 e^z + A_2 e^{-z}$$

mais pour  $x$  réel, tendant vers  $-\infty$ , on a  $|g(x)| = o(|x|^3)$

d'après (6), il en sera de même pour  $g_1$ , donc  $A_2 = 0$  et

$$g(z) - g(z - 2\pi i) = B_0 + B_1 z + B_2 e^z$$

h) la fonction

$$g_2(z) = g(z) - \left(\frac{B_0 + i\pi B_1}{2\pi i}\right) z - \frac{B_1 z^2}{4\pi i} - \frac{B_2}{2\pi i} \cdot z e^z$$

est alors également entière, périodique, de période  $2\pi i$  et satisfait à

$$|g_2(z)| = o(e^{3|z|/2}) \quad |z| \longrightarrow \infty$$

le lemme 2.8. - permet donc encore d'écrire

$$g_2(z) = C_0 + C_1 e^z$$

et

$$g(z) = D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 e^z + D_4 z e^z$$

i)  $\alpha$ )  $g(z)$  est réel pour  $z$  réel, donc  $D_0, D_1, D_2, D_3, D_4$

sont réels

$$\beta) g(0) = 0 \text{ donc } D_3 = -D_0$$

$$\gamma) u(x, 0) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 - D_0 e^x + D_4 x e^x$$

donc

$$D_4 = 0 \text{ d'après c)}$$

$$\delta) u(x, 0) - u(x, y) = D_2 y^2 - 2 D_0 e^x \sin^2 \frac{y}{2}$$

alors, pour  $y = 2\pi$  on déduit de (3) que  $D_2 \geq 0$

pour  $y = \pi$   
 $x \rightarrow \infty$  on déduit de (3) que  $D_0 \leq 0$

$$\text{soit alors } \lambda_1 = -D_0$$

$$\beta_1 = D_1$$

$$\gamma_1 = D_2$$

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Y. V. LINNIK            Décomposition des lois de Probabilités  
Edition française (Gauthier - Villars)
- (2) I. V. OSTROVSKIY      Uspeki Math. Nauk  
(20) 1965
- (3) E. LUKACS            Fonctions caractéristiques  
(Dunod éditeur).

---oo0oo---