SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Intégrales stochastiques II

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 95-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__95_0>

Université de Strasbourg
1966-67

Séminaire de Probabilités
11/12 Janvier 1967

INTÉGRALES STOCHASTIQUES II

Nous avons introduit les intégrales stochastiques dans le premier exposé ; nous allons exposer maintenant diverses généralisations de ces intégrales, des procédés de calcul, après quoi nous donnerons une forme générale de la "formule de changement de variables".

Nous conservons les notations de l'exposé I : en particulier, les " processus" considérés sont tous supposés adaptés à la famille ($\underline{\underline{F}}_t$). Soulignons que les processus appartenant à $\underline{\underline{M}}$ ou à $\underline{\underline{A}}$ sont supposés <u>nuls à l'instant</u> 0.

Les intégrales stochastiques par rapport à une martingale qui n'est pas de carré intégrable ont été étudiées récemment par P.W. MILLAR. La méthode de MILLAR repose essentiellement sur un " passage du discret au continu", à partir de résultats de BURKHOLDER sur les martingales discrètes (voir réf. à la fin de l'exposé).

I. MARTINGALES LOCALES ; EXTENSION DE L'INTÉGRATION STOCHASTIQUE AUX MARTINGALES LOCALES.

DÉFINITION.- <u>Un processus M (à valeurs réelles finies), continu à droite, est une martingale locale s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt , telle que $\lim_n T_n=+\infty$ et que les processus ($M_{t\wedge T_n}$) soient des martingales uniformément intégrables.</u>

Par exemple, toute martingale est une martingale locale (prendre $T_n=n$). Si l'on peut de plus choisir les T_n de façon que les martingales ($M_{t\wedge T_n}$) satisfassent à $\sup_t \underset{\sim}{E}[M^2_{t\wedge T_n}]<\infty$, nous dirons que M est <u>localement de carré intégrable</u> . Par exemple, toute martingale de carré intégrable est localement de carré intégrable (prendre encore $T_n=n$). Nous désignerons par $\underline{\underline{L}}$ l'ensemble des martingales locales nulles pour t=0, par $\underline{\underline{M}}_{loc}$ celui des martingales locales, localement de carré intégrable, nulles pour t=0.

Voici quelques propriétés simples des martingales locales. Pour simplifier le langage, nous dirons que le temps d'arrêt T <u>réduit</u> le processus continu à droite M si le processus ($M_{t\wedge T}$) est une martingale uniformément intégrable.

PROPOSITION 1.- a) Si T réduit M, tout temps d'arrêt $S\leq T$ réduit M. La somme de deux martingales locales est une martingale locale. Si M est une martingale locale, et si T est un temps d'arrêt, le processus $(M_{t\wedge T})$ est une martingale locale.

b) Si deux temps d'arrêt S et T réduisent M, $S\vee T$ réduit M.

c) Soit M un processus continu à droite. S'il existe une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = \infty$ et que les processus $(M_{t\wedge S_n})$ soient des martingales locales , alors M est une martingale locale.

DÉMONSTRATION.- a) est une application immédiate du théorème d'arrêt de DOOB. Pour établir b), posons $R=S\vee T$ et remarquons d'abord que l'on a $|M_{t\wedge R}| \leq |M_{t\wedge S}|+|M_{t\wedge T}|$, de sorte que les variables aléatoires $M_{t\wedge R}$ sont uniformément intégrables. Nous allons traiter ici le cas où S et T sont finis ; pour passer au cas général, on appliquera cela aux temps d'arrêt $S\wedge n$, $T\wedge n$, et on fera tendre n vers $+\infty$. Tout revient donc à montrer que

(1) $\quad \underset{\sim}{E}[M_R I_{\{R>t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] = M_t I_{\{R>t\}}$

Or nous avons

(2) $\quad \underset{\sim}{E}[M_R I_{\{R>t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] = \underset{\sim}{E}[M_S I_{\{S>T\vee t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] + \underset{\sim}{E}[M_T I_{\{T>t, T\geq S\}} \mid \underline{\underline{F}}_t]$.

Soit (Y_s) la martingale uniformément intégrable $(M_{s\wedge S})$; l'événement $\{S>T\vee t\}$ appartenant à $\underline{\underline{F}}_{T\vee t}$, la première espérance conditionnelle au second membre s'écrit

$$\underset{\sim}{E}[Y_\infty I_{\{S>T\vee t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] = \underset{\sim}{E}[\cdots \mid \underline{\underline{F}}_{T\vee t} \mid \underline{\underline{F}}_t] = \underset{\sim}{E}[Y_{T\vee t} I_{\{S>T\vee t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t]$$

et le premier membre de (2) s'écrit donc

$$\underset{\sim}{E}[M_{S\wedge(T\vee t)} I_{\{S>T\vee t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] + \underset{\sim}{E}[M_T I_{\{T>t, T\geq S\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] =$$

$$\underset{\sim}{E}[M_{T\vee t} I_{\{S>T\vee t\}} + M_T I_{\{T>t, T\geq S\}} \mid \underline{\underline{F}}_t] =$$

$$\underset{\sim}{E}[M_T I_{\{T>t\}} + M_t I_{\{S>t, T\leq t\}} \mid \underline{\underline{F}}_t]$$

Cette dernière expression s'écrit aussi, en désignant par (Z_s) la martingale uniformément intégrable $(M_{s\wedge T})$

$$\underset{\sim}{E}[Z_\infty I_{\{T>t\}}|\underline{\underline{F}}_t] + M_t I_{\{S>t,T\leqq t\}} = Z_t I_{\{T>t\}} + M_t I_{\{S>t,T\leqq t\}}$$

$$= M_t I_{\{T>t\}\cup\{T\leqq t,S>t\}} = M_t I_{\{S\vee T>t\}}$$

La formule (1) est donc établie . Passons à c) : pour chaque n, soit $(T_{nm})_{m\in\underset{\sim}{N}}$ une suite croissante de temps d'arrêt réduisant le processus $(X_{t\wedge S_n})$, qui converge vers $+\infty$; rangeons tous les temps d'arrêt T_{nm} en une seule suite (H_n), et posons $T'_n = H_1\vee H_2\ldots\vee H_n$; ces temps d'arrêt tendent en croissant vers $+\infty$, et réduisent X d'après b), d'où le résultat.

REMARQUE.- Soit M une martingale locale : on peut montrer qu'un temps d'arrêt T réduit M si et seulement si le processus $(M_{t\wedge T})$ appartient à la classe (D)

DÉFINITION.- Nous désignerons par $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des processus nuls pour t=0, continus à droite, dont les trajectoires sont à variation bornée sur tout intervalle borné. Si $A\in\underline{\underline{V}}$, nous noterons $\{A\}$ le processus défini par $\{A_t\} = \int_0^t |dA_s|$; évidemment $\{A\}\in\underline{\underline{V}}$. Nous désignerons par $\underline{\underline{A}}_{loc}$ l'ensemble des éléments A de $\underline{\underline{V}}$ tels qu'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt satisfaisant aux conditions $\lim_n T_n=+\infty$, $\underset{\sim}{E}[\{A\}_{T_n}] <+\infty$.

On a évidemment $\underline{\underline{V}}^c\subset \underline{\underline{A}}_{loc}$, $\underline{\underline{L}}^c\subset \underline{\underline{M}}_{loc}$ (*) : par exemple, si $A\in\underline{\underline{V}}^c$, les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t : \{A_t\}\geqq n\}$ satisfont à la définition ci-dessus.

Un élément A de $\underline{\underline{V}}$ sera dit naturel si $\Delta A_T=0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible T, et retors si les temps d'arrêt S_{mn} qui portent les discontinuités de A (exposé I, p.4) sont totalement inaccessibles : A est à la fois naturel et retors si et seulement s'il est continu. Un processus naturel $A\in\underline{\underline{V}}$ ne peut appartenir à $\underline{\underline{L}}$ que s'il est nul (noter d'abord que A est naturel et retors(**), donc continu, et donc appartient à $\underline{\underline{A}}_{loc}$; on introduit alors des temps d'arrêt $T_n\to+\infty$ tels que le processus $(A_{t\wedge T_n})$ appartienne à $\underline{\underline{M}}\cap\underline{\underline{A}}^n$, donc soit nul). On montre sans

(*) Comme dans le premier exposé, le ^{c} sert à désigner les processus à trajectoires continues.

(**) Les discontinuités de $A\in\underline{\underline{L}}$ sont portées par des temps d'arrêt totalement inaccessibles.

peine que tout $A \in \underline{\underline{A}}_{loc}$ est associé à un processus naturel $\tilde{A} \in \underline{\underline{A}}_{loc}$, unique (i.e., le processus $A-\tilde{A}$ est une martingale locale).

L'intérêt des martingales locales vient surtout du théorème suivant, dû à ITO et WATANABE : toute surmartingale positive continue à droite X se met de manière unique sous la forme $X = M-A$, où M est une martingale locale, et A un processus croissant naturel appartenant à $\underline{\underline{A}}^{+}_{loc}$ (cf. Ann.Inst. Fourier, t.15,1965).

Intégrales stochastiques par rapport à $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$

Soit $M \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, et soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, et que les martingales $M'_t = M_{t\wedge S}$, $M''_t = M_{t\wedge T}$ soient telles que $\sup_t \underset{\sim}{E}[M'^2_t]$, $\sup_t \underset{\sim}{E}[M''^2_t]$ soient finis. Le processus $M''^2 - \langle M'', M''\rangle$ est une martingale uniformément intégrable ; en l'arrêtant à l'instant S, on voit que le processus $(M'^2_t - \langle M'', M''\rangle_{t\wedge S})$ est une martingale ; il résulte alors du théorème d'unicité de la décomposition de DOOB que $\langle M', M'\rangle_t = \langle M'', M''\rangle_{t\wedge S}$. En utilisant alors des temps d'arrêt T_n, croissant vers $+\infty$, et satisfaisant aux propriétés de T ci-dessus, on établit l'existence d'un processus croissant continu unique $\langle M,M\rangle$, tel que $M^2 - \langle M,M\rangle$ soit une martingale locale. On définit alors $\langle M,N\rangle$ pour $N \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, comme dans l'exposé I.

Considérons maintenant un processus très-bien-mesurable Y tel que l'on ait, pour tout t

$$\int_0^t Y_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s < +\infty$$

Désignons par S_n le temps d'arrêt , inf des deux temps d'arrêt T_n (ci-dessus) et $\inf \{t : \int_0^t Y_s^2 \, d\langle M,M\rangle_s \geq n\}$. Soit M^n la martingale obtenue en arrêtant M à l'instant S_n ; elle appartient à $\underline{\underline{M}}$, et on a $Y \in \dot{L}^2(M^n)$; on peut donc définir l'intégrale stochastique $Y.M^n$: on vérifie ensuite facilement que $(Y.M^n)_t = (Y.M^{n+1})_{t\wedge S_n}$. Il en résulte qu'il existe un processus (noté Y.M) appartenant à $\underline{\underline{M}}_{loc}$, tel que $(Y.M^n)_t = (Y.M)_{t\wedge S_n}$ pour tout n. Nous dirons que Y.M est l'intégrale stochastique de Y par rapport à M. Dans le cas où $M \in \underline{\underline{M}}$, cette définition coïncide avec celle des intégrales stochastiques " en probabilité" , introduites par ITO et COURRÈGE [1](*). Comme dans le cas où $M \in \underline{\underline{M}}$, Y.M est caractérisé

(*) Voir la bibliographie à la fin de l'exposé I.

par la relation $<Y.M,N> = Y.<M,N>$ ($N \in \underline{\underline{M}}_{loc}$)

Intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale.
Lorsque M est une martingale locale qui n'appartient pas à $\underline{\underline{M}}_{loc}$ (*), on ne peut pas utiliser le processus croissant $<M,M>$ (il n'est pas à valeurs finies), mais nous allons voir en revanche que le processus $[M,M]$ est encore utilisable.

PROPOSITION 2.- *Soit $M \in \underline{\underline{L}}$ une martingale locale. Il existe une suite (R_n) de temps d'arrêt, qui tend en croissant vers $+\infty$, telle que les propriétés suivantes soient satisfaites pour chaque* n

a) *La martingale N^n obtenue en arrêtant* M *à l'instant R_n est uniformément intégrable.*

b) *N^n est de la forme $H^n + (Z^n - \tilde{Z}^n)$, où H^n est une martingale arrêtée à l'instant R_n, continue à l'instant R_n, telle que $\sup_t |H^n_t|$ appartienne à tout $L^p (p<\infty)$; où $Z^n \in \underline{\underline{A}}$ est le processus retors $Z^n_t = \Delta M_{R_n} I_{\{t \geq R_n\}}$, où $\tilde{Z}^n \in \underline{\underline{A}}$ est continu, et où le processus $H^n - \tilde{Z}^n$ est borné.*

DÉMONSTRATION.- Nous commençons par choisir une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt **croissant vers $+\infty$, finis, tels que les processus** $(M_{t \wedge T_n})$ soient des martingales uniformément intégrables. Désignons par (J^n_t) une version continue à droite de la martingale $(\underline{E}[|M_{T_n}| \,|\, \underline{\underline{F}}_t]$, et par S_n le temps d'arrêt

$$S_n = (\inf \{t : J^n_t \geq p_n \}) \wedge T_n$$

où p_n est choisi assez grand pour que $\underline{P}\{S_n < T_n - \frac{1}{n}\} \leq 2^{-n}$: d'après le lemme de Borel-Cantelli, $S_n \to +\infty$ p.s., et S_n réduit M d'après la proposition 1. Posons ensuite $R_n = \inf_{k \geq n} S_k$: R_n tend p.s. vers $+\infty$ en croissant, et réduit M . D'autre part, la martingale $(\underline{E}[|M_{R_n}| \,|\, \underline{\underline{F}}_t])$ est majorée par la martingale $(\underline{E}[|M_{T_n}| \,|\, \underline{\underline{F}}_t])$, car $|M_{R_n}| \leq \underline{E}[|M_{T_n}| \,|\, \underline{\underline{F}}_{R_n}]$ du fait que $R_n \leq T_n$; la première martingale est donc majorée par p_n sur $[0,R_n[$. Nous allons voir que les

(*) Je n'ai pas d'exemples de cette situation, mais je pense que c'est plutôt la règle que l'exception !

R_n ainsi construits répondent à la question.

Plus généralement, considérons un temps d'arrêt fini R possédant les propriétés suivantes : R réduit M, et la martingale $(\underset{\sim}{E}[|M_R||\underline{\underline{F}}_t])$ est bornée sur $[0,R[$ par une constante K. Désignons alors par N (resp. N^+,N^-) la martingale $(\underset{\sim}{E}[M_R|\underline{\underline{F}}_t])$ (resp. M_R^+,M_R^-), par Z (resp. Z^+,Z^-) le processus $(\Delta N_R I_{\{t\geqq R\}})$ (resp. ΔN_R^+ - le saut de N^+ en $R-$, ΔN_R^-) , et enfin par H la martingale $N-(Z-\tilde{Z})$.

Raisonnons par exemple sur N^+ : le processus $Y_t= N_t^+ I_{\{t<R\}}$ + $N_t^+ I_{\{t\geqq R,\ \Delta N_R^+=0\}}$ est une surmartingale positive bornée, puisque N^+ est arrêtée à R, bornée sur $[0,R[$, et qu'on a modifié après R les trajectoires qui sautaient à cet instant en leur donnant la valeur 0. Soit J le processus croissant intégrable $J_t= N_R^+ I_{\{t\geqq R,\ \Delta N_R^+ \neq 0\}}$; on a $Y= N^+-J$, de sorte que Y admet la décomposition de DOOB $Y=(N^+-J+\tilde{J}) - \tilde{J}$; mais on sait ([3], chap.VII, n°59) que dans la décomposition de DOOB d'une surmartingale positive bornée, le processus croissant et la martiongale sont majorés par une variable aléatoire qui appartient à tout L^p $(p<\infty)$. En particulier, on a $\tilde{J}_\infty \in L^p$. Soit k une constante qui majore N^+ sur $[0,R[$; on voit de même que si K est le processus croissant retors $K_t= k.I_{\{t\geqq R,\ \Delta N_R^+\neq 0\}}$, $\tilde{K}_\infty$ appartient à tout L^p (p fini). Or $|\Delta N_R^+| \leqq (N_R^+ +k)I_{\{\Delta N_R^+\neq 0\}}$, donc $\int_0^\infty |d\tilde{Z}_s^+| \leqq \tilde{J}_\infty + \tilde{K}_\infty$ appartient à tout L^p $(p<\infty)$. On a le même résultat en remplaçant + par -, et donc finalement aussi $\int_0^\infty |d\tilde{Z}_s| \in L^p$.

Ecrivons maintenant que $N=H+\tilde{Z}$; sur $[0,R[$, on a $H=N+\tilde{Z}$. Or N est bornée sur $[0,R[$, et $\sup_s |\tilde{Z}_s| \in L^p$, donc $\sup_{s<R} |H_s| \in L^p$, et on peut remplacer $s<R$ par $s<\infty$, car H est arrêtée à l'instant R, et continue à cet instant.

Enfin, $H-\tilde{Z}$ est bornée sur $[0,R[$, continue à l'instant R, arrêtée à R, donc bornée sur toute la demi-droite, et cela achève la démonstration.

Nous allons déduire de cette proposition un premier résultat sur les martingales locales . Voici d'abord une définition.

DEFINITION.- On dit que $M \in \underline{\underline{L}}$ est une somme compensée de sauts si le processus MN est une martingale locale pour toute martingale locale continue N(*).

Nous dirons que deux éléments M et N de $\underline{\underline{L}}$ sont orthogonaux si leur produit MN est une martingale locale. Lorsque M et N appartiennent à $\underline{\underline{M}}$, il est facile de vérifier que l'on retrouve ainsi la définition de l'exposé I. Nous désignerons par $\underline{\underline{L}}^c$ l'ensemble des martingales locales continues, nulles pour $t=0$ ($\underline{\underline{L}}^c=\underline{\underline{M}}^c_{loc}$) , et par $\underline{\underline{L}}^d$ l'ensemble des sommes compensées de sauts : il est facile de voir que $\underline{\underline{L}}^c \cap \underline{\underline{L}}^d = \{0\}$.

PROPOSITION 3.-a) Toute martingale locale $M \in \underline{\underline{L}}$ se décompose de manière unique en une somme d'une martingale locale continue M^c, et d'une somme compensée de sauts $M^d \in \underline{\underline{L}}^d$.

b) Si M est une somme compensée de sauts, M est orthogonale à toute martingale bornée n'ayant pas de saut commun avec M.

c) Soit M une somme compensée de sauts, et soit T un temps d'arrêt ; la martingale locale $(M_{t\wedge T})$ est alors une somme compensée de sauts.

d) Pour que $M \in \underline{\underline{L}}$ soit une somme compensée de sauts, il faut et il suffit que les martingales H^n de la prop.2 soient des sommes compensées de sauts , au sens de l'exposé I.

DÉMONSTRATION.- Nous nous bornerons à établir (de manière assez schématique) a) et d), et nous laisserons b) et c) au lecteur, comme des conséquences faciles. Reprenons les notations de la prop.2 : on décompose la martingale H^n (qui appartient à $\underline{\underline{M}}$) en sa partie continue H^{nc}, et sa partie discontinue (somme compensée de sauts) H^{nd}, et on écrit :

$$N^n = H^{nc} + (H^{nd}+\overset{c}{Z}{}^n)$$

H^{nd} et $\overset{c}{Z}{}^n$ sont des martingales uniformément intégrables, sans discontinuités communes, orthogonales à toute martingale continue bornée, et plus généralement à toute martingale bornée sans discontinuité commune avec M. Posons $N^{nc} = H^{nc}$, $N^{nd} = H^{nd}+\overset{c}{Z}{}^n$.

(*) Il est aisé de vérifier qu'il suffit de supposer cela pour toute martingale continue bornée.

On montre alors sans aucune peine l'existence de deux martingales locales M^c et M^d, telles qu'on ait pour tout n

$$N_t^{nc} = M_{t\wedge R_n}^c \ , \quad N_t^{nd} = M_{t\wedge R_n}^d \ ,$$

Alors M^c et M^d satisfont aux conditions de l'énoncé.

Nous passons maintenant à la définition du processus croissant $[M,M]$ pour une martingale locale M quelconque.

PROPOSITION 4.- Soit $M\in\underline{\underline{L}}$, admettant la décomposition $M=M^c+M^d$ (prop.3) ; on pose

$$[\ M,M\ ]_t \ = \ <M^c,M^c>_t + \sum_{s\leqq t}\Delta M_s^2$$

Le processus croissant $[M,M]$ appartient alors à $\underline{\underline{V}}^+$ (autrement dit, on a p.s. $[M,M]_t <\infty$ pour tout t), et le processus $M^2-[M,M]$ est une martingale locale.

DÉMONSTRATION.- Reprenons les notations de la prop.2 ; on a évidemment pour tout t

$$[M,M]_{t\wedge R_n} = [N^n,N^n]_{t\wedge R_n} = [H^n,H^n]_{t\wedge R_n} + \Delta M_{R_n}^2 I_{\{t\geqq R_n\}} < +\infty$$

puisque la martingale H^n appartient à $\underline{\underline{M}}$. Le second point est plus délicat . Il suffira de montrer que $(N^n)^2-[N^n,N^n]$ est une martingale uniformément intégrable pour tout n . Nous omettrons partout n dans la suite de la démonstration.

Nous avons $N=H+Z-\tilde{Z} = H+Z^c$, donc (pour $t\leqq\infty$)

$$N_t = H_t - \tilde{Z}_t + \Delta N_R I_{\{t\geqq R\}}$$

donc

$$N_t^2 = (H_t - \tilde{Z}_t)^2 + 2(H_t-\tilde{Z}_t)\Delta N_R I_{\{t\geqq R\}} + \Delta N_R^2 I_{\{t\geqq R\}}$$

d'autre part, $[N,N]_t = [H,H]_t + \Delta N_R^2 I_{\{t\geqq R\}}$. Comme $H-\tilde{Z}$ est borné en valeur absolue par une constante k, comme ΔN_R et $[H,H]_t$ sont intégrables, la variable aléatoire $|N_t^2-[N,N]_t| \leqq k^2 + 2k|\Delta N_R|$ est intégrable. On a d'autre part

$$N_t^2-[N,N]_t = (H_t^2-[H,H]_t) + (\tilde{Z}_t^2 - 2H_t\tilde{Z}_t + 2(H_t-\tilde{Z}_t)\Delta N_R I_{\{t\geqq R\}}) \ .$$

Le processus $H^2-[H,H]$ étant une martingale uniformément intégrable, il suffit de montrer que la seconde parenthèse en est une aussi. Ecrivons la

(1) $$\tilde{Z}_t^2 - 2H_t\tilde{Z}_t + 2\int_0^t (H_s-\tilde{Z}_s)dZ_s \ .$$

On peut remplacer $H_s-\tilde{Z}_s$ par $H_{s-}-\tilde{Z}_{s-}$, car H est continu à l'instant de l'unique saut de Z, et $\tilde{Z}$ est continu. Le processus très-bien-mesurable $U_s=H_{s-}-\tilde{Z}_{s-}$ étant borné, et Z et $\tilde{Z}$ étant associés, U.Z et U.$\tilde{Z}$ sont aussi associés (exposé I, prop.2) ; le processus (1) ne diffère donc du processus

(2) $$\tilde{Z}_t^2-2H_t\tilde{Z}_t+2\int_0^t (H_{s-}-\tilde{Z}_{s-})d\tilde{Z}_s = \tilde{Z}_t^2-2H_t\tilde{Z}_t+2\int_0^t (H_s-\tilde{Z}_s)d\tilde{Z}_s$$

que par la martingale uniformément intégrable U.(Z-$\tilde{Z}$). Comme $\tilde{Z}$ est continu, on a $\tilde{Z}_t^2 = 2\int_0^t \tilde{Z}_s d\tilde{Z}_s$, et il reste simplement

(3) $$-2(H_t\tilde{Z}_t - \int_0^t H_s d\tilde{Z}_s)$$

Comme $\sup_s |H_s|$ et $\int_0^t |d\tilde{Z}_s|$ appartiennent à L^2, on peut appliquer le théorème 15 du chap.VII de [3], qui montre que (3) est bien une martingale (uniformément intégrable).

Nous allons esquisser maintenant la théorie des intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale $M\in\underline{\underline{L}}$. Soit X un processus bien-mesurable ; pour simplifier, nous supposerons que X est <u>borné</u>. Reprenons les notations de la prop. 2 . Soit Y^n le processus

$$Y_t^n = X_{R_n}\Delta M_{R_n} I_{\{t\geqq R_n\}} \quad ;$$

Y^n appartient à $\underline{\underline{A}}$, car M_{R_n} et M_{R_n-} sont intégrables. Posons

$$U^n = X.H^n + \overset{c}{Y}{}^n \quad ;$$

U^n est une martingale uniformément intégrable. D'autre part, on a $U^{n+1}_{t\wedge R_n} = U^n_t$ (ces deux martingales ont en effet la même partie continue et les mêmes sauts). Il en résulte aussitôt qu'il existe une martingale locale (notée X.M) unique, telle que $(X.M)_{t\wedge R_n} = U^n_t$. Nous dirons encore que X.M est l'intégrale stochastique de X par rapport à M.

Nous n'insisterons pas sur les propriétés de l'intégrale stochastique X.M qui vient d'être définie.

II.- FORMULES D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

THÉORÈME 1.- Soit $M\in\underline{\underline{M}}$, et soit $V\in\underline{\underline{V}}$ (i.e., un processus continu à droite dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée) tel que $\underset{\sim}{E}[\int_0^t V_{s-}^2 d\langle M,M\rangle_s] < +\infty$ pour tout t. Le processus $(V_tM_t-\int_0^t M_s dV_s)$ est alors une martingale, égale à l'intégrale stochastique $(\int_0^t V_{s-}dM_s)$.

DÉMONSTRATION.- Remarquons d'abord (les trajectoires de M étant bornées sur tout intervalle borné) que $\int_0^t |M_s||dV_s|$ est fini pour tout t. Désignons par T_n le temps d'arrêt

$$\inf\{t : |V_t| \geqq n\},$$

et par V^n le processus $(\int_0^t I_{[0,T_n[}(s)dV_s) \in \underline{\underline{V}}$, dont la valeur absolue $|V^n|$ est bornée par n. Supposons établi le théorème pour V^n : le processus $I^n = (\int_0^t V_{s-}^n dM_s)$ converge p.s. vers $I= (\int_0^t V_{s-}dM_s)$, car I^n et I coïncident jusqu'à l'instant T_n, et $T_n \to \infty$. D'autre part, $V_t^nM_t-\int_0^t M_s dV_s^n$ converge vers $V_tM_t-\int_0^t M_s dV_s$, d'où l'égalité annoncée.

Nous allons donc supposer maintenant que le processus $\{V\}$ est borné par une constante K. Nous allons démontrer le théorème en trois étapes.

a) M est de la forme $\overset{c}{A}$, avec $A\in\underline{\underline{A}}$; alors $\int_0^t V_{s-}dM_s$ est égale à l'intégrale de Stieltjes ordinaire(*) $\int_0^t V_{s-}\, d\overset{c}{A}_s$ par rapport à $\overset{c}{A}\in\underline{\underline{A}}$, et le théorème est la formule ordinaire d'intégration par parties ([3], chap.VII, th.22).

b) M est continue. L'intégrale $\int_0^t V_{s-}dM_s$ est limite en norme de

---

(*) Les deux intégrales coïncident en effet sur les processus "étagés" très-bien-mesurables, donc sur tous les processus très-bien-mesurables bornés sommes de la forme $\sum V_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})$, l'intégrale $\int_0^t M_s dV_s$ est limite p.s. des sommes $\sum M_{t_{i+1}}(V_{t_{i+1}}-V_{t_i})$. Il suffit alors de faire une " transformation d'Abel ".

c) Passons au cas général. Il résulte de l'exposé I (th.6 p.12, et inégalité de DOOB, bas de la p.5) qu'il existe une suite de martingales M^n possédant les propriétés suivantes :

1) M^n est la somme d'une martingale continue et d'une martingale de la forme A^c, $A \in \underline{\underline{A}}$.

2) $M^n \in \underline{\underline{M}}$; $M^n \to M$ dans $\underline{\underline{M}}$ lorsque $n \to \infty$.

3) $\sup_{s \leq t} |M_s^n - M_s| \to 0$ p.s. lorsque $n \to \infty$.

Le théorème, vrai pour chacune des martingales M^n, se démontre alors pour M grâce à un passage à la limite.

REMARQUE.- Le théorème s'étend en réalité à $V \in \underline{\underline{V}}$ et $M \in \underline{\underline{L}}$ sans autre restriction, à condition de remplacer dans l'énoncé " martingale" par " martingale locale" . En effet, reprenons les notations de la prop.2, en choisissant de plus les temps d'arrêt R_n tels que chaque variable aléatoire $\{V\}_{R_n-}$ soit bornée. Appliquons alors le théorème précédent à $V^n = I_{[0,R_n]} \cdot V$ et à la martingale $H^n \in \underline{\underline{M}}$:

$$\int_0^{t\wedge R_n} V_{s-} dH_s^n = V_{t\wedge R_n} H_{t\wedge R_n}^n - \int_0^{t\wedge R_n} H_s^n dV_s$$

et d'autre part, d'après la formule habituelle d'intégration par parties

$$\int_0^{t\wedge R_n} V_{s-} d\overset{c}{Z}{}_s^n = V_{t\wedge R_n} \overset{c}{Z}{}_{t\wedge R_n}^n - \int_0^{t\wedge R_n} \overset{c}{Z}{}_s^n dV_s$$

Autrement dit, en ajoutant

$$\int_0^{t\wedge R_n} V_{s-} dM_s = V_{t\wedge R_n} M_{t\wedge R_n} - \int_0^{t\wedge R_n} M_s dV_s$$

Il ne reste plus qu'à noter que le premier membre est une martingale uniformément intégrable, et à faire tendre n vers $+\infty$.

Le théorème 1 est une forme particulière (un peu plus précise) de la formule générale du changement de variables qu'on verra au §III. Il en est de même du théorème 2 ci-dessous.

Voici une application facile du th.1, qui nous servira dans le prochain exposé : soit (X_t) un processus de HUNT, admettant un semi-groupe de transition (P_t), une résolvante (U_p), et soit g une fonction borélienne bornée qui appartient au domaine du générateur infinitésimal A. Posons $f=Ag$: f est bornée, et $g = U_p(pg-f)$ pour tout $p>0$. Le processus

$$M_t = g\circ X_t - g\circ X_0 - \int_0^t f\circ X_s ds$$

est une martingale bornée continue à droite. On a alors si $p>0$

$$\int_0^t e^{-ps} dM_s = e^{-pt} g\circ X_t - g\circ X_0 + \int_0^t (pg-f)\circ X_s ds \ .$$

En effet, le premier membre vaut aussi, d'après le théorème 1

$$e^{-pt} M_t + \int_0^t pe^{-ps} M_s ds \ .$$

On transforme alors cette expression par des calculs très simples, mais fatigants à écrire.

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> M <u>et</u> N <u>deux éléments de</u> $\underline{\underline{L}}$; <u>on a</u>

$$\int_0^t M_{s-} dN_s + \int_0^t N_{s-} dM_s = M_t N_t - [M,N]_t$$

DÉMONSTRATION.- Nous ne ferons que l'esquisser. Nous pourrons nous limiter, par arrêt (à la manière de la prop.2) au cas où M et N sont uniformément intégrables, arrêtées à un temps d'arrêt R, bornées sur $[0,R[$. Il y a deux cas à distinguer :

a) M et N sont continues : il s'agit alors d'un cas particulier de la formule du changement de variables pour les martingales continues, que nous verrons plus loin.

b) M est une somme compensée de sauts . On se ramène alors au cas où M est de la forme $\overset{c}{A}$, avec $A\in\underline{\underline{A}}$, et $\int_0^t M_{s-} dN_s + [M,N]_t = \int_0^t M_s dN_s$ (intégrale de Stieltjes ordinaire sur les trajectoires). On retombe alors sur le th.1.

<u>Remarque</u>.- Lorsque M et N appartiennent à $\underline{\underline{M}}_{loc}$, on a aussi la formule d'intégration par parties

$$\int_0^t M_{s-} dN_s + \int_0^t N_s dM_s = M_t N_t - \langle M,N \rangle_t \ .$$

En effet, compte tenu du théorème 2, cette formule s'écrit

$$\int_0^t (N_s - N_{s-})dM_s = [M,N]_t - \langle M,N\rangle_t$$

Or soit $A\in\underline{\underline{A}}_{loc}$ le processus croissant $A_t = \sum_{s\leq t}\Delta M_s \Delta N_s$: les deux membres sont égaux à $\overset{c}{A}$.

III. SEMIMARTINGALES ET CHANGEMENT DE VARIABLES

La notion de semimartingale a été introduite par FISK(*) sous le nom de "quasimartingale" (le mot semimartingale signifiait "sousmartingale" dans le livre de DOOB, mais il n'est plus utilisé en ce sens).

DÉFINITION.- On dit qu'un processus continu à droite X est une semimartingale (resp. une semimartingale locale) si X peut s'écrire $X=M+A$, où M est une martingale et A appartient à $\underline{\underline{A}}$ (resp. où M est une martingale locale et A appartient à $\underline{\underline{A}}_{loc}$).

Remarque.- Dans cet ordre d'idées, il est intéressant d'introduire aussi la notion de semimartingale locale faible, obtenue en remplaçant $\underline{\underline{A}}_{loc}$ par $\underline{\underline{V}}$ ci-dessus. Par exemple, soit $M\in\underline{\underline{L}}$; nous avons vu que $[M,M]\in\underline{\underline{V}}$ et que $M^2-[M,M] \in \underline{\underline{L}}$, donc M^2 est une semimartingale locale faible , mais non pas une semimartingale locale, sans doute. Nous laisserons cependant cette notion de côté dans ce qui suit.

Soit X une semimartingale ; nous pouvons écrire $X_t=X_0+M_t+A^r_t+A^n_t$, où M est une martingale nulle pour t=0, où $A^n\in\underline{\underline{A}}$ est naturel (c'est la somme de la partie continue et des sauts accessibles de A), et où $A^r\in\underline{\underline{A}}$ est purement discontinu et retors (c'est la somme des sauts totalement inaccessibles de A). Ecrivons alors $X=X_0+(M+\overset{c}{A}{}^r)+(A^n+\tilde{A}^r)$; nous voyons que X s'écrit (cette fois de manière unique) comme somme de X_0, d'une martingale nulle pour t=0, d'un élément naturel de $\underline{\underline{A}}$. On en déduit aussitôt, par arrêt, que toute surmartingale locale X se décompose uniquement en X_0,

---

(*) D.L. FISK a obtenu des résultats intéressants sur les semimartingales continues. Voir son article "Quasimartingales" (Trans. Amer. Math. Soc., 1965).

un élément de $\underline{\underline{L}}$, et un élément naturel de $\underline{\underline{A}}_{loc}$. On n'a pas de résultat analogue pour les semimartingales locales faibles, semble t'il.

Soit $X=X_0+M+A^n$ une semimartingale locale, et soit Y un processus bien-mesurable : il est naturel de désigner par $\int_0^t Y_s dX_s$ ou $(Y.X)_t$ l'intégrale stochastique $\int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t Y_s dA_s^n$, à condition que ces deux intégrales existent séparément. De même, il est naturel de noter $[X,X]_t$ (resp. $\langle X,X\rangle_t$) la limite de $\sum(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2$ (resp. de $\sum \underset{\sim}{E}[(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}]$, si ces sommes ont un sens) le long du filtre des subdivisions de $[0,t]$, c'est à dire $[M,M]_t + \sum_{s\leq t}(\Delta A_s^n)^2$ (resp. $\langle M,M\rangle_t+\sum_{s\leq t}(\Delta A_s^n)^2$).

Voici maintenant le premier théorème de changement de variables dans les intégrales stochastiques ; il est relatif aux semimartingales $X=X_0+M+A$ à trajectoires <u>continues</u> . On notera qu'alors (les discontinuités de M étant totalement inaccessibles et celles de A accessibles), M et A sont nécessairement <u>continus</u>.

THÉORÈME 3.- <u>Soient n semimartingales locales continues</u>

$$X^i=X_0^i + M^i + A^i \quad (i=1,\dots,n,\ M^i\in\underline{\underline{M}}_{loc}^c,\ A^i\in\underline{\underline{A}}_{loc}^c)$$

<u>et soit</u> X <u>le processus</u> $(X^i)_{i=1,\dots,n}$ <u>à valeurs dans</u> $\underset{\sim}{R}^n$. <u>Soit</u> F <u>une fonction définie sur</u> $\underset{\sim}{R}^n$, <u>admettant des dérivées partielles continues d'ordres</u> 1 <u>et</u> 2. <u>Le processus</u> $(F\circ X_t)$ <u>est alors une semimartingale locale continue, admettant la décomposition</u>

$$F\circ X_t = F\circ X_0 + \sum_{i=1}^n \int_0^t D^iF\circ X_s\, dM_s^i +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^t D^iF\circ X_s\, dA_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t D^iD^jF\circ X_s\, d\langle M^i,M^j\rangle_s \ (*)$$

DÉMONSTRATION.- Nous nous bornerons au cas où n=1. Par arrêt à des temps d'arrêt convenables, on se ramène aussitôt au cas où

(*) Si n=1, il est commode d'écrire formellement $d(F\circ X_s) = F'\circ X_s dX_s + \frac{1}{2}F''\circ X_s ds$.

$X, M, \{A\}$ sont bornés en valeur absolue par une constante K. On peut alors supposer que F a son support dans $[-2K,+2K]$. Il suffit d'autre part de traiter le cas où F admet des dérivées continues des <u>trois</u> premiers ordres (on effectue ensuite un passage à la limite). Alors, si b et a sont deux éléments de $[-2K,2K]$, la formule de Taylor donne

$$F(b)-F(a) = (b-a)F'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 F''(a) + r(a,b)$$

avec $|r(a,b)| \leq C|b-a|^3$. Dans ces conditions, prenons une subdivision (t_i) de $[0,t]$; nous avons

$$F(X_t)-F(X_0) = \sum [F(X_{t_{i+1}})-F(X_{t_i})] = \sum F'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum F''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2 + \sum r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})$$

Le premier terme de la somme ne pose pas de problème :

$\sum F'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})$ (resp. $(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$) converge en norme (resp. p.s.) vers $\int_0^t F' \circ X_s dM_s$ (resp. dA_s).

Passons au second terme. Soit H une constante qui majore $|F''|$; les sommes $\sum F''(X_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2$, $\sum F'' X_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})$ étant majorées respectivement en valeur absolue par $H.\{A\}_t.\ \sup|A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|$ et $H.\{A\}_t.\ \sup|M_{t_{i+1}}-M_{t_i}|$, sommes qui tendent p.s. vers 0 en vertu de la continuité des trajectoires de M et de A, il suffit d'étudier la limite de $\sum F''\circ X_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$. Or soit $\underline{\underline{H}}$ l'espace des processus continus à gauche et bornés Y , tels que $\sum Y_{t_i}(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$ tende en probabilité vers $\int_0^t Y_s d\langle M,M\rangle_s$ lorsque les subdivisions deviennent arbitrairement fines ; il résulte de l'appendice de l'exposé I que $\underline{\underline{H}}$ est fermé pour la convergence uniforme , et contient tous les processus étagés de la forme $Y_s(\omega) = \sum Y_{s_i}(\omega)I_{]s_i,s_{i+1}]}(s)$; $\underline{\underline{H}}$ contient donc aussi le processus continu et borné $(F''\circ X_s)$.

Reste à étudier le dernier terme. Soit C une borne de la dérivée troisième F''' ; ce terme est majoré par

$$C.\sum |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^3 \leqq C.\ \sup|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|.\ \sum(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})^2$$

$$\leqq 2C.\ \sup|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|.\ \sum [\ (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2+(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})^2]$$

$$\leqq 2C.\ \sup|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|.\ \sum (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$$

$$+2C.\ \sup|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|.\ \sup|A_{t_{i+1}}-A_{t_i}|.\{A\}_t$$

Ce dernier terme tend évidemment vers 0 p.s. ; celui qui le précède tend vers 0 en norme dans L^1, car nous avons vu dans l'appendice de l'exposé I que les variables aléatoires $\sum(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$ sont uniformément intégrables, tandis que $\sup|X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|$ tend p.s. vers 0 en restant borné.

Extension . On peut remplacer les bornes 0 et t par S et T, où S et T sont des temps d'arrêts, et $S\leqq T$. On se ramène aussitôt à établir cela pour des bornes de la forme 0 et T, et cela se fait en approchant T par une suite décroissante de temps d'arrêt étagés.

Application.- Le théorème suivant est dû à Paul LÉVY ; la démonstration est celle de KUNITA-WATANABE (on comparera à la démonstration classique, donnée dans le livre de DOOB, p.384).

PROPOSITION 5.- Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tel que $X_0=0$, dont les composantes X^i sont des martingales continues telles que $<X^i,X^j>_t = \delta_{ij}t$. Alors X est un mouvement brownien issu de 0.

DÉMONSTRATION.- Posons $F(x)=e^{iu.x}$ (u.x est le produit scalaire des vecteurs u et x dans $\mathbb{R}^n$). La formule du changement de variables nous donne, si $r<t$

$$E[F\circ X_t-F\circ X_r|\underline{\underline{F}}_r] = E[\frac{1}{2}\sum \int_r^t D^iD^jF\circ X_s\ d<X^i,X^j>_s\ |\underline{\underline{F}}_r]$$

$$=E[-\frac{1}{2}|u|^2\int_r^t F\circ X_s ds|\underline{\underline{F}}_r]\ .$$

Soit $A\in\underline{\underline{F}}_r$, et soit pour $w\geqq 0$ $f(w) = \int_A F\circ X_{r+w}dP$. Cette formule

s'écrit
$$f(w)-f(0) = -\frac{1}{2}|u|^2\int_0^w f(s)ds$$
d'où $f(w)= f(0).\exp(-\frac{1}{2}|u|^2 w)$, et enfin
$$\underset{\sim}{E}[e^{iu.X_t}-e^{iu.X_r}|\underline{\underline{F}}_r] = e^{iu.X_r}\exp(-\frac{t-r}{2}|u|^2)$$
ou
$$\underset{\sim}{E}[\exp(iu.(X_t-X_r))|\underline{\underline{F}}_r] = \exp(-\frac{t-r}{2}|u|^2).$$
Cela exprime que X est un mouvement brownien.

La formule générale du changement de variables.

Nous donnons ici cette formule sous une forme un peu différente de celle de KUNITA-WATANABE, qui a l'avantage de s'appliquer aux martingales locales les plus générales (alors que celle de KUNITA-WATANABE concerne les martingales locales définies sur l'espace canonique d'un processus de HUNT ; nous l'étudierons plus tard). Nous laisserons de côté les processus à valeurs vectorielles, pour ne pas compliquer les notations (mais ceux-ci n'offrent aucune véritable difficulté supplémentaire).

On notera que la décomposition indiquée n'est pas canonique : elle comporte un élément de $\underline{\underline{A}}$ retors. Bien entendu, rien ne serait plus facile que de la rendre canonique (formellement) en compensant ce processus, mais ce serait un simple jeu d'écriture. Au contraire, dans le cas des martingales liées aux processus de HUNT, un calcul plus explicite est possible, grâce au " système de LÉVY" du processus, et on obtient alors la formule de KUNITA et WATANABE.

THÉORÈME 4.- Soit X une semimartingale locale, admettant la décomposition canonique
$$X = X_0 + M + A = X_0 + M^c + M^d + A^c + A^d ,$$
où $M\in\underline{\underline{L}}$ (et M^c et M^d sont respectivement continue, et une somme compensée de sauts), où A est un élément naturel de $\underline{\underline{A}}_{loc}$(et A^c et A^d sont respectivement la partie continue et la partie discontinue de A). Soit F une fonction définie sur $\underset{\sim}{R}$, admettant des dérivées des deux premiers ordres continues et bornées.

<u>Le processus</u> $(F\circ X_s)$ <u>est alors une semimartingale locale</u>, <u>admettant la décomposition</u>

$$\begin{aligned} F\circ X_t = F\circ X_0 &+ \int_0^t F'\circ X_{s-}\, dM_s \\ &+ \int_0^t F'\circ X_{s-} dA^c_s \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} F''\circ X_{s-}\; d\langle M^c, M^c\rangle_s \\ &+ \sum_{\substack{s\leq t \\ \Delta A_s\neq 0}} [F(X_s)-F(X_{s-})] \\ &+ \sum_{\substack{s\leq t \\ \Delta M_s\neq 0}} [F(X_s)-F(X_{s-})-F'(X_{s-})(X_s-X_{s-})] \end{aligned} \qquad (*)$$

DÉMONSTRATION.- Par arrêt à des temps d'arrêt $R_n\to\infty$, on peut se ramener (grâce à la prop.2) à démontrer la formule dans le cas où il existe un temps d'arrêt R tel que :

- $\{A\}_R$ est intégrable, A est arrêté à l'instant R, $\{A\}$ est borné sur l'intervalle $[0,R[$;
- M est une martingale uniformément intégrable, arrêtée à l'instant R, bornée sur $[0,R[$, de la forme $H+\overset{c}{Z}$ ($H\in\underline{\underline{M}}$; cf. la prop.2).

Quitte à faire une transformation de l'ensemble des temps, nous pourrons supposer que les processus sont définis et continus à gauche pour la valeur $+\infty$ du temps, et prendre $t=\infty$: cela simplifiera les notations.

Ecrivons maintenant $H=H'+H''$, où H'' est la somme compensée des sauts de H d'amplitude $<\varepsilon$, de sorte que $H'\in\underline{\underline{M}}$ n'a que des sauts d'amplitude $\geq\varepsilon$ (et les trajectoires de H' n'ont donc qu'un nombre fini de sauts sur $[0,\infty]$) ; posons de même $A=A'+A''$, où A'' est la somme des sauts de A d'amplitude $<\varepsilon$ (ainsi A' n'a p.s. qu'un nombre fini de sauts sur $[0,\infty]$). Posons enfin $X'=X_0+H'+\overset{c}{Z}+A'$, $X''=H''+A''$; je dis qu'il suffira d'établir la

(*) Nous désignerons les termes du second membre, pris dans cet ordre, par T_i ($1\leq i\leq 6$). On peut évidemment remplacer X_{s-} par X_s dans les expressions de T_3 et T_4 .

formule pour X'. En effet , choisissons une suite $\varepsilon_n \to 0$, de telle sorte que les trajectoires de X' convergent p.s. uniformément vers celles de X (inégalité de DOOB, exposé I, bas de la p.5) . Alors $F\circ X'_\infty \to F\circ X_\infty$. Au second membre, aucun problème pour T_1 ($X_0=X'_0$). $\int_0^t F'\circ X_{s-}dM_s = \int_0^t F'\circ X'_{s-}dM'_s + \int_0^t (F'\circ X_{s-}-F\circ X'_{s-})dH'_s$ $+\int_0^t (F'\circ X_{s-}-F'\circ X'_{s-})d\overset{c}{Z}_s + \int_0^t F'\circ X_{s-}dH''_s$. Le second terme au 2e membre tend vers 0 dans L^2 (utiliser le théorème de Lebesgue, en tenant compte du fait que F' est bornée) ; le troisième terme tend vers 0 dans L^1, et le 4e à nouveau dans L^2 :cela règle la question de T_2. Pour T_4, la discussion est plus aisée , car M^c est commune à X et à X' : il suffit de noter que $F''\circ X'_{s-}$ converge p.s. uniformément vers $F''\circ X_{s-}$, d'où la convergence p.s. (ou dans L^1, F'' étant bornée). Même raisonnement pour T_3. (*)

Passons à T_5 . Notons d'abord que ce terme appartient à $\underline{\underline{A}}$, car on a , si $\Delta A_s \neq 0$

$$|F(X_s)-F(X_{s-})| \leqq K.|\Delta A_s|$$

où K est une borne de F' , et $\sum |\Delta A_s| \leqq \{A\}_\infty$ est intégrable. On a alors

$$\sum_{\Delta A_s\neq 0} [F(X_s)-F(X_{s-})] = \sum_{\Delta A'_s\neq 0} [F(X'_s)-F(X'_{s-})] +$$
$$+ \sum_{\Delta A'_s\neq 0} [F(X_s)-F(X'_s)-F(X_{s-})+F(X'_{s-})] + \sum_{\Delta A''_s\neq 0} [F(X_s)-F(X_{s-})] .$$

Le second terme au second membre tend vers 0 p.s., du fait que pour chaque ω il s'agit du somme <u>finie</u> , et qu'il y a convergence vers 0 de chaque terme ; le troisième terme lui aussi tend vers 0, car il est majoré en valeur absolue par $K.\{A''\}_\infty$.

Passons enfin à T_6, et montrons comme ci-dessus , pour commencer, que ce terme appartient à $\underline{\underline{A}}$ (*). Il faut distinguer le saut à l'instant R, que nous majorerons en module par $2K|\overset{c}{Z}_R-\overset{c}{Z}_{R-}|$ (K désignant toujours une borne de F'), variable aléatoire qui est intégrable, et, d'autre part, la contribution des sauts

(*) À $\underline{\underline{A}}_{loc}$ si on ne fait pas les hypothèses simplificatrices du début.

antérieurs à R. Or on a, L désignant une borne de F"

$$\sum_{\substack{\Delta M_s\neq 0\\ s<R}} |\ F(X_s)-F(X_{s-})-F(X_{s-})(X_s-X_{s-})| \leqq$$

$$\frac{1}{2}L\sum_{\substack{\Delta M_s\neq 0\\ s<R}}(X_s-X_{s-})^2 = \frac{1}{2}L\sum_s(H_s-H_{s-})^2$$

dont l'espérance est au plus $\frac{1}{2}L\underset{\sim}{E}[H_\infty^2]$. Pour étudier le comportement de T_6 dans le passage à la limite, on procède alors comme plus haut : contribution du saut à l'instant R, commun à X et X' (convergence p.s.) ; contribution des sauts de H' (il n'y en a qu'un nombre fini , et il y a convergence de chaque terme comme ci-dessus dans l'étude de T_5) ; contribution dans T_6 (relatif à X) des sauts de H" ; on la majore par $\frac{1}{2}L\sum(H''_s-H''_{s-})^2$, qui tend vers 0 dans L^1.

<u>Il nous reste donc seulement à établir la formule pour</u> X'. **Posons** alors

$$B'_t = \sum_{s\leqq t}\Delta H'_s + Z_t$$

Ce processus appartient à $\underline{\underline{A}}$, est purement discontinu et retors. On a

$$X' = X_0 + H^c + \overset{c}{B'} + A^c + A'$$

où B' et A' n'ont qu'un nombre fini de sauts sur $[0,\infty]$. Nous reviendrons aux notations initiales, en omettant tous les ' et en posant $H^c=M^c$, $B'=B$, $A'=A^d$, $\overset{c}{B} = M^d$, $M^c+M^d=M$, $A^c+A^d=A$:

$$X = X_0 + M + A = X_0 + M^c + \overset{c}{B} + A^c + A^d$$

Soient $U_0=0$, et $U_1,U_2\dots$ les instants des sauts successifs de X : pour chaque ω, on a $U_n(\omega)=\infty$ pour n assez grand. La semimartingale X est continue sur l'intervalle $[U_i,U_{i+1}[$, où elle se réduit à $X_{U_i}+M^c-\widetilde{B} + A^c$; on peut donc écrire, en appliquant la formule du changement de variables des semimartingales continues (avec translation de l'origine des temps à l'instant U_i ; cf [3],chap. IV, n^os 55 et 58)

$$F(X_{U_{i+1}-})-F(X_{U_i}) = \int_{U_i}^{U_{i+1}} F'\circ X_{s-}dM_s^c + \int_{U_i}^{U_{i+1}} F'\circ X_s dA_s^c$$
$$+ \int_{U_i}^{U_{i+1}} \tfrac{1}{2}F''\circ X_s d\langle M^c,M^c\rangle_s$$
$$- \int_{U_i}^{U_{i+1}} F'\circ X_s d\tilde{B}_s$$

Sommons sur i, ce qui est légitime car il n'y a p.s. qu'un nombre fini de termes pour chaque ω ; il vient

$$F(X_\infty)- F(X_0) = \int_0^\infty F'\circ X_{s-}dM_s^c + \int_0^\infty F'\circ X_{s-}dA_s^c + \int_0^\infty \tfrac{1}{2}F''\circ X_s d\langle M^c,M^c\rangle_s$$
$$-\int_0^\infty F'\circ X_{s-}d\tilde{B}_s + \sum_j [F(X_{U_j})-F(X_{U_j-})]$$

Ecrivons cette somme $\sum_s [F(X_s)-F(X_{s-})]$, et partageons la en deux : celle qui correspond aux sauts de A, que nous ne modifierons pas, et celle qui correspond aux sauts de $M^d = B-\tilde{B}$, que nous écrirons

$$\sum_{\Delta M_s\neq 0} F'\circ X_{s-}(X_s-X_{s-}) + \sum_{\Delta M_s\neq 0} [F(X_s)-F(X_{s-})-F'\circ X_{s-}(X_s-X_{s-})] \, .$$

On obtient alors la formule annoncée en remarquant que

$$\sum_{\Delta M_s\neq 0} F'\circ X_s(X_s-X_{s-})- \int_0^t F'\circ X_{s-}d\tilde{B}_s = \int_0^\infty F'\circ X_{s-} (dB_s-d\tilde{B}_s)$$
$$= \int_0^\infty F'\circ X_{s-}dM_s^d \, .$$

BIBLIOGRAPHIE

D.L. BURKHOLDER.- **Martingale Transforms. Annals of Math. Stat., 37, n°6, 1966, 1494-1504.**

P.W. MILLAR.- **Martingale integrals (article à paraître).** Voir C.R. Acad. Sc., t.264, 1967, p. 694-697.

APPENDICE.-UN RÉSULTAT DE D.AUSTIN

D.G. AUSTIN a montré récemment (A sample function property of martingales, Ann. Math. Stat. 37, 1966, 1396-1397) que si X_n est une martingale telle que $\sup_n \underset{\sim}{E}|X_n| < \infty$, la variable aléatoire $\sum_n (X_{n+1}-X_n)^2$ est p.s. finie. Ce résultat suggère l'énoncé analogue suivant, pour des processus à temps continu : <u>si</u> $X=(X_t)_{t\in \underset{\sim}{R}_+}$ <u>est une martingale continue à droite bornée dans</u> L^1 (i.e. telle que $\sup_t E[|X_t|]<\infty$) <u>la variable aléatoire</u> $\sum_s \Delta X_s^2$ <u>est p.s. finie</u>. Nous établirons ce résultat par la méthode qui nous a conduits à la prop. 2, mais nous permettrons ici à la famille de tribus d'avoir des temps de discontinuité.

Nous établirons en fait un énoncé un peu différent . Remarquons d'abord que la somme de deux martingales possédant la propriété de l'énoncé la possède encore (inégalité de Schwarz) ; ensuite, que toute martingale bornée dans L^1 est différence de deux martingales positives ("décomposition de KRICKEBERG"). Il suffit donc de traiter le cas où X est positive, et nous poserons alors $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$. Soit $a(t)= \frac{t}{1-t}$ pour $t\in[0,1[$, et soit $M_t=X_{a(t)}$ pour $t\in[0,1[$, $M_t=X_\infty$ pour $t>1$. Le processus (M_t) est alors une martingale locale,(x) et l'énoncé résulte du théorème suivant :

THÉORÈME.- <u>Soit</u> $M=(M_t)$ <u>une martingale locale continue à droite. Si</u> $t<\infty$, <u>la variable aléatoire</u> $\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2$ <u>est p.s. finie</u>.

DÉMONSTRATION.- En appliquant la définition des martingales locales, on se ramène aussitôt au cas où M est une martingale uniformément intégrable puis, par différence, au cas où M est une martingale uniformément intégrable positive. Posons alors , K étant un nombre >0

$$R = K\wedge(\inf\{s : M_s\geq K\})$$

Comme on a p.s. $R\geq t$ dès que K est assez grand, il nous suffira de démontrer le résultat pour la martingale $(N_t) =(M_{R\wedge t})$, autrement dit de

(x) Par exemple, parce que c'est une surmartingale positive, et que le processus croissant associé est nul.

prouver que :

<u>si</u> N <u>est une martingale uniformément intégrable positive, arrêtée à l'instant</u> R, <u>bornée par</u> K <u>sur</u> $[0,R[$, <u>on a</u> $\sum_s \Delta N_s^2 < \infty$.

Posons $Z_t = \Delta N_R . I_{\{t \geq R > 0\}}$; comme N_R est intégrable, N_{R-} bornée, Z est la différence de deux processus croissants intégrables. Nous allons montrer que $\sup_s |\tilde{Z}_s| \in L^2$. Posons $Y_t = N_t I_{\{t<R\}}$: Y est une surmartingale positive bornée. Le processus $J_t = N_R I_{\{t \geq R\}}$ est un processus croissant intégrable, et Y admet la décomposition $Y=(N-J+\tilde{J})-\tilde{J}$. Comme Y est bornée, on a $\tilde{J}_\infty \in L^2$. Posons $L_t = N_{R-} I_{\{t \geq R > 0\}}$; on voit de même que $\tilde{L}_\infty \in L^2$. Comme $Z=J-L$, on a $\tilde{Z}=\tilde{J}-\tilde{L}$, donc $\int_0^\infty |d\tilde{Z}_s| \leq \tilde{J}_\infty + \tilde{L}_\infty \in L^2$, d'où enfin le résultat cherché.

Posons maintenant $H=N-\overset{c}{Z}$; comme on a $\sum \Delta \overset{c}{Z}{}_s^2$, puisque les trajectoires de $\overset{c}{Z}$ sont à variation bornée, il suffira de montrer que $\sum \Delta H_s^2 < \infty$. Il suffira pour cela, d'après une propriété bien connue des martingales de carré intégrable, de montrer que $\sup_s |H_s - H_0| \in L^2$. Or cette variable aléatoire est majorée par la somme de $\sup_{0<s<R} |H_s - H_0|$ et de $|\Delta H_R|$. Sur $[0,R[$, on a $Z=0$, $H=N+\tilde{Z}$, donc $\sup_{0<s<R} |H_s - H_0| \leq 2K + \sup_s |\tilde{Z}_s| \in L^2$.

D'autre part, on a $\Delta N_R = \Delta Z_R$, donc $\Delta H_R = \Delta \tilde{Z}_R$, majoré en module par $2 \sup_s |\tilde{Z}_s| \in L^2$. Cela achève la démonstration.