SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Séries de distributions aléatoires indépendantes (exposé 1)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 54-64

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__54_0>

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités — Novembre 1966

SÉRIES DE DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

(par X. Fernique)

Exposé I : Généralités sur les distributions aléatoires.

§ 1 : TOPOLOGIES SUR $\mathcal{D}_K$ ET $\mathcal{D}$. ([1], [2], [3]).

1.- Pour toute partie compacte K de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_K$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact contenu dans K muni de la topologie de la convergence uniforme pour les fonctions et chacune de leurs dérivées ([1], p. 64). Un système fondamental de semi-normes définissant cette topologie est constitué par la famille (N_p) :

$$N_p(\varphi) = \sup_{x \in K} |D^p \varphi(x)| .$$

L'espace $\mathcal{D}_K$ est à base dénombrable de voisinages, localement convexe et complet, c'est donc un espace de Fréchet. Le théorème d'Ascoli montre que c'est aussi un espace de Montel. Il en résulte en particulier qu'il est séparable ([2], p.99, ex. 28).

La famille des semi-normes N_p est mal adaptée à l'étude des distributions aléatoires ; le théorème suivant vise à lui substituer un autre système fondamental dont l'existence résulterait d'ailleurs immédiatement de la nucléarité de $\mathfrak{D}_K$ ([3], p. 55), mais dont la construction explicite ne coûte pas cher :

<u>Théorème 1</u>. - <u>Pour tout voisinage</u> V <u>de l'origine dans</u> $\mathfrak{D}_K$, <u>il existe deux formes quadratiques positives</u> (<u>non dégénérées</u>) Q <u>et</u> R <u>continues sur</u> $\mathfrak{D}_K$ <u>telles que</u> :

(1) $$\underline{\{R(\varphi,\varphi) \leq 1\} \subset \{Q(\varphi,\varphi) \leq 1\} \subset V} \quad .$$

(2) <u>Pour toute famille</u> Φ <u>orthonormée pour</u> R, <u>on a</u>

$$\sum_{\Phi} Q(\varphi,\varphi) \leq 1 \; .$$

<u>Démonstration</u>. - Elle repose sur le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u>. - Soient r un nombre positif tel que le compact K soit contenu dans $[-r, +r]$ et Φ une famille d'éléments de $\mathfrak{D}_K$ dont les dérivées $(p+1)$ièmes soient orthonormées dans $L^2(K)$; on a alors :

$$\sum_{\Phi} \int |D^p \varphi|^2 \leq 4r^2 \; .$$

<u>Démonstration du lemme</u>. - Pour tout élément t de K et tout élément φ de Φ, on a :

$$D^p \varphi(t) = -\int_t^{\infty} D^{p+1} \varphi(x)\,dx \; ,$$

l'intégration pouvant d'ailleurs être réduite à $[t, +\infty[\cap [-r, +r]$; la formule de Perseval montre alors :

$$\sum_{\Phi} |D^p \varphi(t)|^2 \leq \int_{-r}^{+r} dx = 2r \; ,$$

En intégrant alors entre $-r$ et $+r$, on en déduit le résultat du lemme.

<u>Démonstration du théorème 1</u> . - Soient V un voisinage de l'origine dans $\mathcal{D}_K$ et r un nombre positif tel que le compact K soit inclus dans $[-r,+r]$; la famille $((2r)^p N_p)$ étant filtrante, il existe un nombre positif M et un entier p tels que :

$$\{ \|D^p \varphi\|_\infty \leq M \} \subset V .$$

On pose alors :

$$Q(\varphi, \varphi) = \frac{2r}{M^2} \int |D^{p+1} \varphi(x)|^2 \, dx \ , \ R(\varphi, \varphi) = \frac{8r^3}{M^2} \int |D^{p+2} \varphi(x)|^2 \, dx \quad .$$

Soit $\Phi = (\varphi_i)$ une famille orthonormée pour R ; la famille $(D^{p+2} \frac{(2r\sqrt{2r})}{M} \varphi)$ est orthonormée dans $L^2(K)$. Le lemme 1 montre donc :

$$\sum_\Phi Q(\varphi, \varphi) = \sum_\Phi \frac{1}{4r^2} \int |D^{p+1} \frac{(2r\sqrt{2r})}{M} \varphi(x)|^2 \, dx \leq 1 ;$$

c'est la propriété (2) de l'énoncé. En l'appliquant à une famille Φ réduite à un élément, on en déduit la première inclusion de la propriété (1) ; la seconde inclusion résulte de l'inégalité :

$$\frac{1}{M^2} \|D^p \varphi\|_\infty^2 \leq \frac{1}{M^2} \left[\int |D^{p+1} \varphi(x)| \, dx\right]^2 \leq \frac{1}{M^2} . 2r . \int |D^{p+1} \varphi(x)|^2 \, dx \quad .$$

2 . Dans la suite, on utilisera sans autres justifications les notations et propriétés suivantes :

Soit E un espace vectoriel topologique ; on désigne par le terme abrégé " f. q. sur E " une forme quadratique positive non dégénérée continue sur E. Soit Q une f. q. sur E ; Q définit une structure préhilbertienne sur E ; on note $\widehat{E}_Q$ l'espace de Hilbert associé à cette structure préhilbertienne. Soit F le dual topologique de E ; on note $\bar{Q}$ la forme quadratique duale de Q , finie ou non , définie sur F par :

$$\bar{Q}(p,p) = \sup_{\varphi \in E} \frac{<p,\varphi>^2}{Q(\varphi,\varphi)} \quad ;$$

l'ensemble $\{p \mid \bar{Q}(p,p) \leq 1\}$ sera noté K_Q ; c'est un ensemble équicontinu .

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et u une application linéaire continue de H_1 dans H_2 ; on dit que u est une application de Hilbert-Schmidt s'il existe une base orthonormée Φ de H_1 telle que :

$$\sum_{\Phi} \|u(\varphi)\|^2_{H_2} < \infty \quad .$$

Le premier membre est alors indépendant de la base Φ ; sa racine carrée est appelée norme de Hilbert-Schmidt de u et notée $\|u\|_{H.S}$.

Soient H , H_1 et H_2 trois espaces de Hilbert, f une application linéaire continue de H dans H_1 et u une application de Hilbert-Schmidt de H_1 dans H_2 ; en utilisant des familles orthonormales dans H dont les images par f soient des familles orthogonales dans H_1 , on constate que l'application $u \circ f$ est une application de Hilbert-Schmidt de H dans H_2 et qu'on a :

$$\|u \circ f\|_{H.S} \leq \|f\| . \|u\|_{H.S} \quad .$$

Soient E un espace vectoriel topologique et Q et R deux f. q. sur E ; on dira que Q est subordonnée à R et on écrira $Q \ll R$ si l'application identique de E dans E se prolonge en une application de Hilbert - Schmidt de $\hat{E}_R$ dans $\hat{E}_Q$.

Avec ces notations, les propriétés de $\mathcal{D}_K$ énoncées ci-dessus s'écrivent :

(1a) les f. q. sur $\mathcal{D}_K$ définissent la topologie de $\mathcal{D}_K$.

(2a) toute f. q. Q sur $\mathcal{D}_K$ est subordonnée à une f. q. R sur $\mathcal{D}_K$.

(3) $\mathcal{D}_K$ est séparable .

3 . On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{D}_K$ où K parcourt l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}$, ou une suite croissante de parties compactes dont les intérieurs recouvrent $\mathbb{R}$ ([1], p. 66) .

Théorème 2 . -

(1') Les f. q. sur $\mathcal{D}$ définissent la topologie de $\mathcal{D}$,

(2') toute f. q. Q sur $\mathcal{D}$ est subordonnée à une f. q. R sur $\mathcal{D}$,

(3') l'espace $\mathcal{D}$ est séparable .

Démonstration. - Soient V un voisinage convexe de l'origine dans $\mathcal{D}$, (f_n) une partition de l'unité sur $\mathbb{R}$ par des fonctions indéfiniment différentiables à support compact et pour tout entier n , K_n le support de f_n . A tout entier n, le théorème 1 permet d'associer des f. q. Q_n et R_n sur $\mathcal{D}_{K_n}$ telles que :

$$\{ R_n(\varphi,\varphi) \leq 1 \} \subset \{ Q_n(\varphi, \varphi) \leq 1 \} \subset V \cap \mathcal{D}_{K_n} \quad ,$$

$$Q_n << R_n \quad .$$

Pour tout élément φ de $\mathcal{D}$ on pose alors :

$$Q(\varphi, \varphi) = \sum_n 2^{(2n)} Q_n(f_n\varphi , f_n\varphi) ,$$

$$R(\varphi, \varphi) = \sum_n 2^{(3n)} R_n(f_n\varphi , f_n\varphi) \ ;$$

les séries sont convergentes, car elles ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls ; comme ce nombre est lié au support de φ , Q et R sont continues sur tout $\mathcal{D}_K$; elles sont alors des f. q. sur $\mathcal{D}$.

L'application de $\mathcal{D}$ dans $(\mathcal{D}_{K_n})$ qui à φ associe $f_n\varphi$ se prolonge en une application de $\hat{\mathcal{D}}_R$ dans $(\widehat{\mathcal{D}_{K_n}})_{R_n}$ de norme inférieure à $2^{-\frac{(3n)}{2}}$;

l'application identique de $(\mathcal{D}_{K_n})$ dans $(\mathcal{D}_{K_n})$ se prolonge en une application de Hilbert-Schmidt de $\widehat{(\mathcal{D}_{K_n})}_{R_n}$ dans $\widehat{(\mathcal{D}_{K_n})}_{Q_n}$ de norme inférieure à 1. Il en résulte que l'application de $\mathcal{D}$ dans $(\mathcal{D}_{K_n})$ qui à φ associe $f_n \varphi$ se prolonge une application de Hilbert-Schmidt de $\widehat{\mathcal{D}}_R$ dans $\widehat{(\mathcal{D}_{K_n})}_{Q_n}$ de norme inférieure à $2^{(-\frac{3n}{2})}$. Soit alors une famille Φ d'éléments de $\mathcal{D}$ orthonormale et totale dans $\widehat{\mathcal{D}}_R$, on a :

$$\sum_{\Phi} Q(\varphi, \varphi) = \sum_n \sum_{\Phi} 2^{(2n)} Q_n(f_n \varphi, f_n \varphi) \leq \sum_n 2^{(2n)} 2^{(-3n)} = 1 \ ;$$

Q est donc subordonnée à R.

Par ailleurs, soit φ un élément de $\mathcal{D}$ tel que $Q(\varphi, \varphi)$ soit inférieur ou égal à 1 ; la définition de Q montre que pour tout entier n, $Q_n(2^n f_n \varphi, 2^n f_n \varphi)$ est aussi inférieur ou égal à 1 ; la définition de Q_n montre alors que $(2^n f_n \varphi)$ appartient à V ; l'égalité :

$$\varphi = \sum_n \frac{1}{2^n} (2^n f_n \varphi) ,$$

la nullité de tous les termes à l'exception d'un nombre fini d'entre eux et la convexité de V montrent que φ appartient à V. Ceci démontre les énoncés (1') et (2') ; la séparabilité de $\mathcal{D}$ résulte immédiatement de celle des $\mathcal{D}_K$; d'où le théorème.

§ 2 : ÉLÉMENTS DU CALCUL DES PROBABILITÉS SUR $\mathcal{D}'$.

1. L'espace $\mathcal{D}'$ des distributions est le dual topologique de $\mathcal{D}$. On le munit, soit de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de $\mathcal{D}$, soit de la topologie de la convergence simple. Pour ces deux topologies, les ensembles relativement compacts sont les mêmes, ce sont les ensembles inclus dans un K_Q où Q est une f.q. sur $\mathcal{D}$ ([1], p. 72). Pour chacune

de ces topologies , $\mathcal{D}'$ est séparé et il existe un espace polonais P et une bijection continue f de P sur $\mathcal{D}'$: pour chacune de ces topologies , $\mathcal{D}'$ est un espace standard ([4]) (i. e. lusinien , moins la métrisabilité , [5]) .

2 . On rappelle ici quelques propriétés des espaces standards : Soit T un espace topologique , on appelle tribu borélienne sur n T et on note $\mathcal{B}(T)$ la tribu engendrée par les parties ouvertes de T : ses éléments sont dits boréliens dans T . Dans ces conditions :

<u>Proposition 1</u> . - Si f est une application continue injective d'un espace standard S dans un espace séparé T , l'image U de S par f est un espace standard borélien dans T .

Le fait que U est borélien dans T est démontré dans [5] quand S est polonais et T métrisable ; la démonstration s'applique aussi au cas où T n'est pas métrisable ; son extension au cas où S n'est pas polonais résulte immédiatement de la définition des espaces standards . Cette même définition montre immédiatement que U est standard .

De la proposition 1 , il résulte :

<u>Proposition 2</u> . - Si f est une application continue bijective d'un espace standard S sur un espace standard T , les applications f et f^{-1} définissent une correspondance biunivoque entre les boréliens dans S et les boréliens dans T d'une part , entre les mesures sur S et les mesures sur T d'autre part .

<u>Démonstration</u> . - Soient S un espace standard , b une partie borélienne de S , P un espace polonais et f une bijection continue de P sur S ; puisque f est continue , $f^{-1}(b)$ est une partie borélienne de P ; il est alors lusinien ([5] p. 134) , donc standard par définition ; la proposition 1 montre alors que b est standard .

Soient S et T deux espaces standards et f une application continue bijective de S sur T ; pour toute partie borélienne b de S , f(b) est l'image par la restriction de f à b de l'espace standard b ; T étant séparé, la proposition 1 montre que f(b) est borélien dans T . Réciproquement, la continuité de f suffit à montrer que pour toute partie borélienne b de T , $f^{-1}(b)$ est borélien dans S ; d'où la première affirmation ; la seconde **en résulte** immédiatement, en définissant pour toute mesure μ sur S , $f(\mu)$ par :

$$\forall\, b \in \mathcal{B}(T) \quad , \quad [f(\mu)](b) = \mu(f^{-1}(b)) \ .$$

3 . Proposition 3 . - Les tribus boréliennes sur $\mathcal{D}'$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de $\mathcal{D}$ ou de la topologie de la convergence simple sont identiques . Par ailleurs, toute mesure sur $\mathcal{D}'$ est régulière .

Démonstration . - Soient P un espace polonais , f une bijection continue de P sur $\mathcal{D}'$ muni de la première topologie et i l'application de $\mathcal{D}'$ muni de la première topologie sur $\mathcal{D}'$ muni de la seconde topologie associée à l'identité ; l'application de la proposition 2 à l'application i montre l'identité des tribus boréliennes . Par ailleurs toute mesure μ sur $\mathcal{D}'$ est l'image par f d'une mesure m sur P ; m étant régulière , on a :

$\forall\, b \in \mathcal{B}(P)$, $m(b) = \sup m(K)$, K parcourant l'ensemble des parties compactes de P incluses dans b ; on en déduit :

$\forall\, b \in \mathcal{B}(\mathcal{D}')$, $\mu(b) = \sup \mu(f(K))$, K parcourant l'ensemble des parties compactes de P incluses dans $f^{-1}(b)$; l'image d'une partie compacte de P par l'application continue f étant compacte dans $\mathcal{D}'$, on en déduit le résultat .

4 . Une distribution aléatoire X est une application mesurable d'un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathcal{D}', \mathcal{B}(\mathcal{D}'))$; l'image de P par X est alors une mesure μ_X sur $\mathcal{D}'$ appelée loi de X ; soit X une distribution aléatoire, on

appelle fonctionnelle caractéristique de X et on note L_X la transformée de Fourier $\widehat{\mu_X}$ de sa loi : c'est l'application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$L_X(\varphi) = \int \exp(i <X, \varphi>) \; dP .$$

On sait qu'il y a identité entre l'ensemble des lois de distributions aléatoires et l'ensemble des fonctions de type positif continues sur $\mathcal{D}$ égales à 1 à l'origine .

5 . Soit (X_i) une famille de distributions aléatoires ayant même espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; on dit qu'elle est indépendante si la famille $(X_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{D}')))$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{A}$ indépendantes par rapport à P sur Ω ; pour toute famille (φ_i) d'éléments de $\mathcal{D}$, la famille $(<X_i, \varphi_i>)$ est alors une famille de variables aléatoires usuelles indépendantes . Soit X une distribution aléatoire, on notera X^s une distribution aléatoire symétrisée, différence de deux distributions aléatoires indépendantes de mêmes lois que X .

§ 3 : LEMME DE MINLOS .

Lemme 2 . - Soit X une distribution aléatoire ; on suppose donnés un nombre $\epsilon > 0$ et deux f. q. Q et R sur $\mathcal{D}$ tels que :

(4) $$Q << R ,$$

(5) $$\forall \varphi \in \mathcal{D} , \; 1 - \mathcal{R}e \, L_X(\varphi) \leq \epsilon(1 + Q(\varphi, \varphi)) .$$

Dans ces conditions, on a aussi :

(6) $$E\left\{ \inf \left[\bar{R}(X,X) , 1 \right] \right\} \leq 6 \epsilon .$$

Démonstration . - L'espace $\mathcal{D}$ étant séparable, il existe dans $\widehat{\mathcal{D}_R}$ une suite orthonormale totale (φ_n) . La forme quadratique R étant non dégénérée , on a :

$$\bar{R}(X,X) = \sum_n <X, \varphi_n>^2 .$$

Dans ces conditions, pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que sous les hypothèses de l'énoncé , pour tout entier positif n , on a :

$$E\left\{\inf\left[\sum_{k=1}^{n} < X, \varphi_k >^2 , 1\right]\right\} \leq 6\,\varepsilon .$$

L'inégalité évidente :

$$\inf\left[x^2, 1\right] \leq 3\left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) ,$$

montre par intégration que :

$$(7) \qquad E\left\{\inf\left[\sum_{k=1}^{n} <X, \varphi_k >^2 , 1\right]\right\} \leq 3 \int \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} <p, \varphi_k >^2\right)\right) d\mu_X(p) ;$$

comme $\exp\left(-\frac{1}{2} <x, x>\right)$ est sa propre transformée de Fourier, le second membre de (7) s'écrit :

$$3\,(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\exp\left(-\frac{1}{2} <x, x>\right)\right] . \left(1 - L_X\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k\right)\right) dx .$$

L'intégrale étant réelle, on peut substituer à l'intégrand sa partie réelle ; l'inégalité (5) permet alors d'écrire :

$$(8) \qquad E\left\{\inf\left[\sum_{k=1}^{n} <X, \varphi_k >^2 , 1\right]\right\} \leq 3\,\varepsilon\left(1 + \sum_{k=1}^{n} Q(\varphi_k , \varphi_k)\right) ;$$

puisque Q est subordonnée à $\mathbb{R}$, le second membre de (8) est majoré par $6\,\varepsilon$. D'où le résultat .

<u>Corollaire</u> .- Soit μ une mesure positive sur $\mathfrak{D}'$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D} , \quad \hat{\mu}(0) - \mathcal{R}e\, \hat{\mu}(\varphi) \leq \varepsilon\left(1 + Q(\varphi, \varphi)\right) ;$$

dans ces conditions, on a :

$$\int_{K_R} \bar{R}(p, p)\, d\mu(p) + \mu\left\{p \notin K_R\right\} \leq 6\,\varepsilon .$$

<u>Démonstration</u>. - Il suffit d'appliquer le lemme à une distribution aléatoire X de loi $\frac{\mu}{\|\mu\|}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions , tome 1 , deuxième édition , Hermann , Paris, 1957 .

[2] N. BOURBAKI : Eléments de Mathématique, livre V , ch. 3.4 , 2^e^ édition , Hermann , Paris, 1955 .

[3] A. GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques , espaces nucléaires , Mem. Amer. Math. Soc. 16 , 1955 .

[4] P. CARTIER : Processus aléatoires généralisés , Sém. Bourbaki, 16^e^ année , 1963/64 , n° 272 .

[5] N. BOURBAKI : op. cit. Livre III , ch. 9 , 2^e^ édition, 1958 .

On trouvera une étude plus étendue des espaces standards et des bases du calcul des probabilités sur $\mathcal{D}'$ dans :

[6] X. FERNIQUE : Processus linéaires, processus généralisés, Ann. Inst. Fourier Grenoble , à paraître .

On trouvera une généralisation de l'étude des séries de distributions aléatoires indépendantes dans :

[7] X. FERNIQUE : Séries de variables aléatoires indépendantes, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, à paraître .

-=-=-=-=-