CLAUDE DELLACHERIE

Un complément au théorème de Weierstrass-Stone

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 52-53

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__52_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UN COMPLÉMENT AU THÉORÈME DE WEIERSTRASS-STONE

par Claude DELLACHERIE

La démonstration classique du théorème de Stone-Weierstrass utilise la proposition suivante : si $\underline{\underline{H}}$ est une algèbre de fonctions réelles bornées, qui contient les constantes, et qui est fermée pour la convergence uniforme, alors $\underline{\underline{H}}$ est stable pour les opérations latticielles $\vee$ (sup) et $\wedge$ (inf). La réciproque de cette proposition, bien que très simple, semble être peu connue. Après l'avoir établie, nous avons découvert qu'elle se trouvait déjà (sous une forme un peu plus générale) dans un article de G. NÖBELING et H.BAUER : Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen , Jahresbericht der DMV, 58 (1955) p. 54-72. Les démonstrations ci-dessous sont tellement simples qu'elles méritent peut être d'être publiées tout de même!

PROPOSITION.- *Soit $\underline{\underline{H}}$ un espace vectoriel de fonctions réelles bornées définies dans un ensemble $\mathbb{E}$, contenant les constantes, fermé pour la convergence uniforme et stable pour les opérations latticielles ; $\underline{\underline{H}}$ est alors une algèbre.*

Il suffit évidemment de montrer que la relation $f \in \underline{\underline{H}}$ entraîne $f^2 \in \underline{\underline{H}}$. Soit $M = \sup |f(x)|$, et soit C_f l'ensemble des fonctions réelles continues ϕ sur l'intervalle $[-M,+M]$, telles que $\phi \circ f \in \underline{\underline{H}}$. Il est clair que C_f est un espace vectoriel, stable pour les opérations latticielles, contenant les constantes, fermé pour la convergence uniforme . D'autre part, l'application identique appartenant à C_f, C_f sépare les points de $[-M,M]$; C_f contient donc toutes les fonctions continues d'après le théorème de Stone-Weierstrass, et en particulier la fonction $x \mapsto x^2$, ce qui démontre la proposition.

On obtient une autre démonstration, plus "élémentaire", en remarquant que $x^2 = 2\int_{-M}^{M} |x-t|dt - 2M^2$ sur l'intervalle $[-M,M]$ (noter que la dérivée seconde de $|x-t|$ au sens des distributions est une masse unité au point x). En approchant cette intégrale par des sommes de Riemann, on voit que f^2 est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions de la forme $|f-t|$, qui appartiennent à $\underline{\underline{H}}$.

Cette proposition permet de simplifier plusieurs démonstrations en théorie des processus de Markov. Soit (P_t) un semi-groupe de HUNT sur un espace localement compact à base dénombrable E : lorsque (P_t) est fellérien, l'espace $\underline{\underline{C}}_0(E)$ est une <u>algèbre</u> de fonctions bornées sur E, qui se comportent très bien sur les trajectoires du processus (X_t), et cette algèbre est invariante par le semi-groupe. La proposition ci-dessus permet de construire une telle algèbre dans le cas général. Soit un $p>0$, et soit $\underline{\underline{R}}$ le cône des fonctions p-excessives régulières bornées (f p-excessive est régulière si et seulement si a) pour toute suite croissante $T_n \uparrow T$ de temps d'arrêt on a p.s. $f\circ X_T = \lim_n f\circ X_{T_n}$ sur $\{T<\infty\}$, ou si b) $A_{\varepsilon t}$ désignant l'ensemble $\{f-e^{-pt}P_tf >\varepsilon\}$, on a $\lim_{t\to 0} P^p_{A_{\varepsilon t}} = 0$ pour tout $\varepsilon>0$). On vérifie sans peine que $\underline{\underline{R}}$ est stable pour l'opération $\wedge$, et que si $f\in\underline{\underline{R}}$ on a aussi $P_tf\in\underline{\underline{R}}$ pour tout t. Soit alors $\underline{\underline{H}}$ l'adhérence de $\underline{\underline{R}}-\underline{\underline{R}}$ pour la convergence uniforme : $\underline{\underline{H}}$ est une algèbre invariante par le semi-groupe , et il est bien connu que les fonctions de $\underline{\underline{H}}$ ont un très bon comportement sur les trajectoires de (X_t) .