PAUL-ANDRÉ MEYER

Intégrales stochastiques IV

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 1 (1967), p. 142-162
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1967__1__142_0>

Université de Strasbourg
1966-67

Séminaire de Probabilités

INTÉGRALES STOCHASTIQUES IV

Cet exposé contient le point essentiel de la théorie de S. WATANABE (et co-auteurs) : la définition et les propriétés du noyau de LÉVY d'un processus de HUNT.

Le paragraphe I contient des résultats accessoires sur les temps terminaux. Il est recommandé de commencer la lecture au § I,n°3.

§ I. COMPLÉMENTS SUR LES TEMPS TERMINAUX

1. Une forme de la propriété de Markov des f. multiplicatives

Soit M une fonctionnelle multiplicative " ordinaire" (i.e. à valeurs dans l'intervalle [0,1], à trajectoires p.s. décroissantes et continues à droite) , et supposons que M soit exacte (cf les exposés sur les f.m. , [6],[7],[8])*. On a alors l'énoncé suivant, qui étend la propriété de Markov forte de M à des processus non canoniques.

Soit $(W,\underline{\underline{G}},\underset{\sim}{P})$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante et continue à droite $(\underline{\underline{G}}_t)$ de sous-tribus de $\underline{\underline{G}}$, et soit (Y_t) un processus markovien par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Pour tout $w \in W$, on note τw la trajectoire de w (on a $\tau w \in \Omega$).

Soit R un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. On a p.s.

(1) $M_{R(w)+u}(\tau w) = M_{R(w)}(\tau w).M_u(\theta_{R(w)}\tau w)$ pour tout $u \geq 0$.

Schéma de la démonstration.- a) En vertu de la continuité à droite, il suffit de vérifier (1) p.s. pour chaque u fixé.

b) Les deux membres de (1) sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par R et par les variables aléatoires Y_t (après complétion). Or celle-ci est contenue dans la tribu $\underline{\underline{H}}$ engendrée par $\underline{\underline{G}}_R$, et par les variables aléatoires Y_{R+t} , $t \geq 0$. En effet, l'application $(s,w) \mapsto Y_{R+s}(w)$ est mesurable par rapport à

*Ce qui suit s'étend en fait aux fonctionnelles fortement markoviennes, non nécessairement exactes.

$\underline{\underline{B}}(\underset{\sim}{R}_+)\times\underline{\underline{H}}$, l'application $w \mapsto ((t-R(w))^+,w)$ est mesurable de $\underline{\underline{H}}$ vers $\underline{\underline{B}}(\underset{\sim}{R}_+)\times\underline{\underline{H}}$; par composition, on voit que $Y_{t\vee R}$ est $\underline{\underline{H}}$-mesurable . Comme il en est de même pour R et $Y_{t\wedge R}$, Y_t est $\underline{\underline{H}}$-mesurable.

c) Pour vérifier (1), il suffit donc de multiplier les deux membres par une fonction de la forme $a(w).g_1\circ Y_{t_1}(w)\ldots g_n\circ Y_{t_n}(w)$, et de montrer que les résultats obtenus ont même espérance , si a est $\underline{\underline{G}}_R$-mesurable bornée, et si les g_i sont boréliennes bornées. On se ramène alors , par récurrence sur n, à vérifier que

$$\underset{\sim}{E}[M_{R+u}(\tau w)f\circ Y_{R+u}(w)|\underline{\underline{G}}_R] = M_R(\tau w)Q_u(Y_R(w),f) \qquad p.s.$$

où f est borélienne bornée, et (Q_t) est le semi-groupe associé à (M_t). On se ramène enfin au cas où f est continue.

d) On fait une transformation de Laplace en u, et on est ramené au théorème d'arrêt de DOOB pour une martingale, continue à droite du fait que M est exacte. Voir [6], [7] ou [8].

Voici une conséquence utile :

PROPOSITION 1.- Soit M une fonctionnelle multiplicative exacte, et soient S et T deux temps d'arrêt de la famille (canonique) $(\underline{\underline{F}}_t)$, tels que $S\leq T$. On a alors p.s.

(2) $$M_u\circ\theta_S = M_{T-S}\circ\theta_S.M_{u-T}\circ\theta_T \quad \text{pour tout } u\geq T .$$

DÉMONSTRATION.- Appliquons le résultat précédent en prenant $W=\Omega$, $Y_t=X_{S+t}$, $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{F}}_{S+t}$, $\tau = \theta_S$, $R=T-S$.

2. Itération des temps d'arrêt. Temps terminaux.

Soient S et T deux temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et soit $U=T+S\circ\theta_T$; on vérifie sans peine ([7], chap.XIII, T19) que U est un temps d'arrêt, et que $\theta_U=\theta_S\circ\theta_T$.

Soit ν un temps d'arrêt ; les itérés de ν sont les temps d'arrêt définis par récurrence de la manière suivante

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_1=\nu \quad , \quad \nu_{n+1} = \nu_n+\nu\circ\theta_{\nu_n} .$$

La proposition suivante a été énoncée dans l'exposé III sans aucune démonstration ; j'ai découvert dans le livre de BLUMENTHAL et GETOOR qu'elle était loin d'être évidente.

PROPOSITION 2.- Soit ν un temps terminal exact* (i.e., tel que la fonctionnelle multiplicative $M_t=I_{\{t<\nu\}}$ soit exacte) . Alors

a) $\nu_{n+p} = \nu_n+\nu_p\circ\Theta_{\nu_n}$ pour tout p

b) Si T est un temps d'arrêt, on a p.s.

(3) $\qquad T+\nu\circ\Theta_T = \nu_{n+1}$ sur l'ensemble $\{\nu_n\leq T\leq \nu_{n+1}\}$, et aussi sur le même ensemble

(4) $\qquad T+\nu_p\circ\Theta_T = \nu_{n+p}$

c) Le processus $B_t = \sum_{n>0} I_{\{\nu_n\leq t\}}$ est une fonctionnelle additive (à valeurs dans $[0,+\infty]$) fortement markovienne.

DÉMONSTRATION (abrégée).- La propriété a) est vraie en fait pour tous les temps d'arrêt, et résulte aussitôt de la première phrase du n°2, par récurrence sur p. Pour établir (3) , on distingue le cas (trivial) où $\nu_n=T=\nu_{n+1}$, et le cas où $\nu_n\leq T<\nu_{n+1}$. Dans ce dernier cas, on applique (2) aux temps d'arrêt ν_n et $T\vee\nu_n$, ce qui nous donne $M_u\circ\Theta_{\nu_n} = M_{u-T}\circ\Theta_T$ pour tout u, d'où le résultat. On déduit (4) de (3) par récurrence sur p, et c) se déduit aussitôt de (4).

Voici la seule proposition de ce paragraphe qui sera directement utilisée dans la suite. Rappelons que x est dit permanent pour le temps terminal ν si $\underset{\sim}{P}^x\{\nu>0\}=1$, et qu'un temps terminal ν pour lequel tout x est permanent est exact.

PROPOSITION 3.- Soit ν un temps terminal pour lequel tout $x\in E$ est permanent, et soient ν_n les itérés de ν. Soient ϕ la fonction p-excessive (p>0) $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\exp(-p\nu)]$, K_u l'ensemble finement fermé $\{\phi\leq u\}$, où $0\leq u<1$, et B la fonctionnelle additive

$$B_t=\sum_{n>0} I_{\{\nu_n\leq t\}}$$

a) La fonctionnelle $I_K.B$ admet un p-potentiel borné.

b) Si ϕ est régulière, il en est de même de la fonctionnelle $\dot{I}_K.B$ (pour ces notations, cf. exposé III, §I, n°3).

*Ou plus généralement, fortement markovien.

DÉMONSTRATION.- Nous simplifierons les notations en écrivant K au lieu de K_u, en désignant par ν' le temps terminal égal à ν sur l'ensemble $\{X_\nu \in K\}$, à $+\infty$ sinon, et en notant B' la fonctionnelle $I_K.B$. Le p-potentiel de B' est égal à

$$P^p_{\nu'}1 + P^p_{\nu'}P^p_{\nu'}1 + P^p_{\nu'}P^p_{\nu'}P^p_{\nu'}1 + \ldots.$$

On a $P^p_\nu 1 = \phi \leqq u$ sur K, donc a fortiori $P^p_{\nu'}1 \leqq u$ sur K. Mais les mesures $P^p_{\nu'}(x,.)$ sont portées par K (finement fermé), donc $P^p_{\nu'}f \leqq P^p_{\nu'}1.(\sup_{x\in K} f(x))$ pour toute fonction borélienne positive. On a par conséquent aussi $\sup_{x\in K} P^p_{\nu'}f(x) \leqq u.(\sup_{x\in K} f(x))$. On en déduit aussitôt par récurrence que $(P^p_{\nu'})^n 1$ est majoré par u^{n-1} sur E, par u^n sur K, et il en résulte enfin que le p-potentiel de B' est majoré par $1/(1-u)$.

Supposons maintenant que ϕ soit une fonction p-excessive régulière. Choisissons deux nombres b,c tels que $0<u<b<c<1$. Comme ϕ est régulière, on a p.s. $\phi\circ X_{t-} = (\phi\circ X_t)_-$ pour tout t, donc $X_{\nu_n -} \in K_u \iff (\phi\circ X_{\nu_n})_- \leqq u$. On a par conséquent, si $X_{\nu_n -} \in K_u$,

$\phi\circ X_t < b$ pour $t<\nu_n$ et suffisamment près de ν_n. Partageons maintenant en deux la somme dont l'espérance est le p-potentiel de $I_K.B$.

$$\sum_{n>0} I_{\{X_{\nu_n -} \in K_u\}} e^{-p\nu_n} \leqq \sum_{n>0} I_{\{X_{\nu_n} \in K_c\}} e^{-p\nu_n} +$$

$$+ \sum_{n>0} I_{\{X_{\nu_n -} \in K_u, X_{\nu_n} \notin K_c\}} e^{-p\nu_n} .$$

La première somme au second membre a une espérance au plus égale à $1/(1-c)$ d'après le raisonnement fait plus haut. Choisissons d'autre part un nombre $r>0$ assez petit pour que $b<ce^{-pr}$, et considérons la fonctionnelle additive

$$C_t = \sum_{n>0} I_{\{\nu_n \leqq t\ ,\ X_{\nu_n -} \in K_u,\ X_{\nu_n} \notin K_c\}}$$

La fonction $\underset{\sim}{E}^{\cdot}[C_r]$ est bornée : en effet, chaque saut de C sur l'intervalle $[0,r]$ correspond à une montée de la surmartingale $(e^{-pt}\phi\circ X_t)$ sur l'intervalle $(b, e^{-pr}c)$, et l'espérance du nombre de ces sauts vaut donc au plus $2/(e^{-pr}c-b)$ d'après l'inégalité de DOOB. Il en résulte que C a un p-potentiel borné (voir l'exposé III, §I, début du n°2). La proposition est démontrée.

REMARQUE.- Dire que ϕ est régulière revient à dire que le temps terminal ν est totalement inaccessible. En effet, supposons que ϕ soit régulière, et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt qui converge en croissant vers ν. D'après un lemme de HUNT (cf.[7], chap.XV, T.20 , où l'on remplacera T_A par ν), $\phi\circ X_{T_n}$ tend p.s. vers 1 sur l'ensemble $\{\nu<\infty\ ,\ T_n<\nu \text{ pour tout } n\}$; si ϕ est régulière, on a donc sur cet ensemble $\phi\circ X_{\nu-} = (\phi\circ X_\nu)_- = 1$, ce qui est impossible puisque ϕ est partout <1 . L'ensemble considéré est donc p.s. vide, et ν est totalement inaccessible.

Inversement, supposons ν totalement inaccessible, et désignons par $N(\omega)$ l'ensemble $\{\nu_p(\omega),\ p>0\}$. Soit (T_n) une suite croissante de temps d'arrêt, et soit $T=\lim_n T_n$; $T_n+\nu\circ\theta_{T_n}$ (resp. $T+\nu\circ\theta_T$) est le premier élément de N situé après T_n (resp. T). Ces points ne diffèrent que s'il existe un élément de N entre T_n et T (i.e., dans $]T_n,T]$. Or les temps d'arrêt ν_p sont totalement inaccessibles (utiliser le critère:S totalement inaccessible $\Leftrightarrow$ $X_{S-}\neq X_S$ p.s. sur $\{S<\infty\}$). Il en résulte aussitôt que $T_n+\nu\circ\theta_{T_n} = T+\nu\circ\theta_T$ p.s. pour n assez grand, et donc que $\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\exp(-pT_n)\phi\circ X^n_{T_n}] \to \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\exp(-pT)\phi\circ X_T]$ Par conséquent, ϕ est bien régulière.

La proposition suivante (qui ne nous servira pas directement dans la suite) montre que l'on peut compenser la fonctionnelle B de la prop.3, bien que celle ci n'appartienne pas à $\underline{\underline{A}}'$. Les notations sont celles de la proposition 3.

PROPOSITION 4.- Supposons que ϕ soit régulière. Il existe alors une fonctionnelle additive positive finie et continue $\tilde{B}$, unique, telle que les fonctionnelles $\dot{I}_A.B$ et $\dot{I}_A.\tilde{B}$ soient associées pour tout ensemble borélien A tel que $\dot{I}_A.B \in \underline{\underline{A}}'$.

DÉMONSTRATION.- Posons $K_n = K_{1-1/n}$, désignons par B_n la fonctionnelle $\dot{I}_{K_n}.B$, qui appartient à $\underline{\underline{A}}'$ d'après la prop.3, et par $\tilde{B}_n$ la fonctionnelle continue associée à B_n. La relation $B_n=\dot{I}_{K_n}.B_{n+1}$ entraîne $\tilde{B}_n=\dot{I}_{K_n}.\tilde{B}_{n+1}$ (exposé I, prop.2). Il existe donc une fonctionnelle additive continue $\tilde{B}$,(*) unique du fait que $E=\bigcup_n K_n$, telle que $\tilde{B}_n = \dot{I}_{K_n}.\tilde{B}$ pour tout n. Pour montrer que $\tilde{B}$ est finie, il suffit de remarquer que, pour presque tout ω, l'image de tout intervalle compact $[0,t]$ par ω est contenue dans l'un des K_n . En effet, la fonction $s \mapsto \phi\circ X_s(\omega)$ est partout <1 , ainsi que sa limite à gauche $s \mapsto (\phi\circ X_s)_-(\omega)= \phi\circ X_{s-}(\omega)$: elle est donc bornée par un nombre < 1 sur $[0,t]$. La relation $\dot{I}_A.\tilde{B} \sim \dot{I}_A.B$ est vraie lorsque A est contenu dans l'un des K_n, et on en déduit aussitôt le cas général.

3. <u>Fonctionnelles du type de Poisson</u>.

Nous appellerons ainsi les fonctionnelles $(p_t)\in\underline{\underline{A}}'$, purement discontinues, <u>quasi-continues à gauche</u> :

(5) pour toute suite (T_n) de temps d'arrêt , qui converge en croissant vers un temps d'arrêt T, on a $\lim_n p_{T_n}=p_T$ p.s. sur $\{T<\infty\}$,

et dont <u>tous les sauts sont égaux à</u> 1. Nous désignerons par $\underline{\underline{P}}$ l'ensemble des fonctionnelles du type de Poisson.

On peut évidemment décrire toute fonctionnelle $p\in\underline{\underline{P}}$ de la manière suivante : soit ν l'instant du premier saut de p ; ν est un temps terminal totalement inaccessible (en vertu de la quasi-continuité à gauche) et tout point de E est permanent pour ν; On a alors $p_t = \sum_{n>0} I_{\{\nu_n\leq t\}}$.

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> $p\in\underline{\underline{P}}$; <u>on a alors</u> $\overset{c}{p} \in \underline{\underline{M}}'$ <u>et</u> $< \overset{c}{p},\overset{c}{p} > = \tilde{p}$.(**)

DEMONSTRATION.- Les temps d'arrêt ν_n définis plus haut sont p.s. tous distincts. Soit μ une mesure telle que $\underset{\sim}{E}^{\mu}[p_t]<\infty$ pour tout t (une mesure bornée par exemple) ; posons

---

(*) $\tilde{B}$ est continue du fait que ν est totalement inaccessible : B est un processus retors au sens de l'exposé I.(**) Aussi $[\overset{c}{p},\overset{c}{p}]=p$.

$$p^n_t = I_{\{t \geqq \nu_n\}} \;;$$

(p^n_t) est, pour la mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, un processus croissant intégrable retors - donc associé à un processus croissant intégrable continu ($\tilde{p}^n_t$) . Posons $\overset{c}{p}{}^n = p^n - \tilde{p}^n$; comme p^n est borné, $\overset{c}{p}{}^n$ est une martingale de carré intégrable ([3], chap.VIII, th.31), et on a $\langle \overset{c}{p}{}^n, \overset{c}{p}{}^n \rangle = \tilde{p}^n$ (remarque suivant cet énoncé). D'autre part, les martingales $\overset{c}{p}{}^n$, sommes compensées de sauts sans discontinuités communes, sont deux à deux orthogonales. En sommant sur n, on voit alors que $\overset{c}{p}$ appartient à $\underline{\underline{M}}'$, et que $\langle \overset{c}{p}, \overset{c}{p} \rangle = \tilde{p}$.

REMARQUE.- Nous avons vu (exp.III , prop.1) que la "valeur absolue" d'une fonctionnelle additive $A \in \underline{\underline{A}}'$ est une fonctionnelle additive. Etant données deux fonctionnelles A et B, cela nous permet aussitôt de définir une fonctionnelle C (que nous noterons $A \wedge B$ s'il n'y a pas de risque de confusion) telle que pour tout ω la mesure $dC_t(\omega)$ soit la borne inférieure des mesures $dA_t(\omega)$ et $dB_t(\omega)$ sur $\underset{\sim}{R}_+$. En particulier, si A et B sont deux fonctionnelles du type de Poisson, $A \wedge B$ est encore une fonctionnelle du type de Poisson, dont les sauts sont les <u>sauts communs</u> à A et à B . On a alors le résultat suivant, qui généralise le théorème 1 :

PROPOSITION 5.- *Soient* p *et* p' *deux fonctionnelles du type de Poisson ; alors*

$$(5)' \qquad \langle \overset{c}{p}, \overset{c}{p}{}' \rangle = \widetilde{p \wedge p'} \;.$$

DÉMONSTRATION.- Nous avons en effet $[\overset{c}{p}, \overset{c}{p}{}']_t = \sum_{s \leqq t} \Delta \overset{c}{p}_s \cdot \Delta \overset{c}{p}{}'_s = \sum_{s \leqq t} \Delta p_s \cdot \Delta p'_s$, puisque p et p' sont des sommes compensées de sauts ; cette somme est aussi égale à $(p \wedge p')_t$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\langle \overset{c}{p}, \overset{c}{p}{}' \rangle$ est la fonctionnelle naturelle associée à $[p,p']$ (exposé I, §3, n°2).

§II. SEMI-GROUPES ET NOYAU DE LÉVY

1. Nous avons vu à la fin de l'exposé III qu'il existe une fonctionnelle additive H continue, positive, telle que

pour toute loi μ, toute martingale M de carré intégrable pour la loi $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, le processus croissant $< M,M >$ soit absolument continu par rapport à la fonctionnelle H.
(voir l'exposé III, §2, prop.3).

Nous dirons dans la suite de cet exposé que (P_t) est un semi-groupe de LÉVY si la fonctionnelle $H_t=t$ possède cette propriété.
Cette terminologie n'est pas consacrée. La notion de semi-groupe de LÉVY nous servira surtout, dans la suite, à présenter sous une forme plus élégante certains énoncés qui valent en réalité pour tous les processus de HUNT (prop.6).

Pour vérifier que (P_t) est un semi-groupe de LÉVY , il suffit de vérifier que $< M,M >$ définit une mesure absolument continue par rapport à la mesure dt, pour des M très particulières :

a) soit μ une mesure bornée ; si des martingales $N^n \in \underline{\underline{M}}$ convergent dans $\underline{\underline{M}}$ (pour la mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$) vers une martingale N, alors $\{ < N^n,N^n> - <N,N >\}_t \rightarrow 0$ dans L^1 pour tout t, comme le montre le calcul suivant

$$\{ < N^n,N^n> - <N,N>\}_t \leqq 2\{<N,N-N^n>\}_t + < N-N^n,N-N^n>_t$$

et chacun de ces deux termes tend vers 0 dans L^1 (exp.I, prop.3). Quitte à faire une extraction de suite, on peut supposer que $\{<N^n,N^n>-<N,N>\}_t$ tend vers 0 p.s. pour tout t **entier** , donc pour tout t. Cette convergence préservant la continuité absolue, il en résulte qu'il suffit de vérifier que $<N,N>$ est absolument continue par rapport à dt lorsque N parcourt un ensemble **total** dans $\underline{\underline{M}}$. Par exemple, lorsque N est de la forme $(\underset{\sim}{E}[Y|\underline{\underline{F}}_t])$, où Y est $\underline{\underline{F}}^{\circ}$-mesurable et bornée.

b) Si $< N,N >$ est absolument continu par rapport à dt, et si H est un processus qui appartient à $\dot{L}^2(N)$, $< H.N,H.N > = H^2.<N,N>$ est aussi absolument continu par rapport à dt. Il suffit donc de faire la vérification pour les martingales $C^{p,g}$ de l'exposé III, §2, n°4 , qui engendrent $\underline{\underline{M}}$ au sens des sous-espaces stables.

PROPOSITION 6.- <u>Il existe un semi-groupe de LÉVY (L_t) tel que chacun des semi-groupes $(L_t),(P_t)$ puisse se déduire de l'autre par changement de temps.</u>

DÉMONSTRATION.- Construisons la réalisation canonique de (P_t), et choisissons une fonctionnelle additive (H_t), possédant les propriétés rappelées au début de ce paragraphe. Quitte à remplacer H_t par $t+H_t$ si nécessaire, nous pouvons supposer que H est continue, strictement croissante, telle que $H_\infty = \infty$. Pour tout s, posons $c_s = \inf\{T : H_t > s\}$. On sait que c_s est un temps d'arrêt, que l'on a $c_0=0$, $c_{s+t} = c_s + c_t \circ \theta_{c_s}$ p.s. pour chaque couple (s,t).

Posons ensuite :

$$\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{F}}_{c_t} \ , \ Y_t = X_{c_t} \quad , \ L_t(x,f) = \underset{\sim}{E}^x[f\circ X_{c_t}]$$

pour f borélienne bornée. Il est bien connu que les noyaux L_t forment un semi-groupe markovien, que les processus (Y_t) forment, par rapport à la famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, une réalisation de ce semi-groupe qui satisfait aux axiomes des processus de HUNT. Il en résulte que (L_t) est un semi-groupe de HUNT (i.e., la réalisation canonique de (L_t) est de HUNT).

Soit Z une variable aléatoire bornée, mesurable par rapport à $\underline{\underline{T}}(Y_s, s\geq 0)$, et soit (Z_t) une version continue à droite de la martingale $\underset{\sim}{E}[Z|\underline{\underline{F}}_t]$. Il existe un processus bien-mesurable K tel que l'on ait $< Z,Z > = K.H.$* Désignons par Z',K',H' les processus Z_{c_t} , K_{c_t} , $H_{c_t}=t$: le processus $Z^2-<Z,Z>$ étant une martingale uniformément intégrable, le théorème d'arrêt de DOOB nous montre que $(Z^2_{c_t} - <Z,Z>_{c_t})$ est une martingale uniformément intégrable, donc $<Z',Z'>_t = < Z,Z >_{c_t} = (K.H)_{c_t} = (K'.H')_t$. Il en résulte que le processus croissant <Z',Z'> est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette propriété passe à la réalisation canonique de (L_t) (on pourra par exemple, pour le voir, utiliser la prop.1 de l'exposé I), et il en résulte que (L_t) est un semi-groupe de LÉVY.

---

* $(K.H)_t = \int_0^t K_s dH_s$

Il reste à voir que (P_t) peut, à son tour, être déduit de (L_t) par changement de temps. Le moyen le plus rapide (mais non le plus élémentaire !) pour s'en convaincre consiste à invoquer le théorème de BLUMENTHAL-GETOOR-McKEAN, suivant lequel deux semi-groupes qui ont mêmes mesures d'entrée dans les compacts peuvent se déduire l'un de l'autre par changement de temps. Cette hypothèse est évidemment satisfaite par (P_t) et (L_t).

2. Le noyau de LÉVY.

Nous supposons désormais que (P_t) est un semi-groupe de LÉVY, et nous désignons par η une mesure de référence bornée ($\eta(A)=0$ <=> A est de potentiel nul).

THÉORÈME 2.- Il existe un noyau n sur E, appelé noyau de LÉVY du semi-groupe de LÉVY (P_t) , tel que $n(x,\{x\})=0$ pour tout $x\in E$ et que l'on ait, pour toute fonction borélienne positive f sur $E\times E$

(6) $$\underset{\sim}{E}^{\bullet}\Big[\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}\Big] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}\Big[\int_0^t ds\int_E n(X_s,dy)f(X_s,y)\Big].^{*}$$

DÉMONSTRATION.- Choisissons une distance d compatible avec la topologie de E, et introduisons, pour tout $m\in\underset{\sim}{N}$, le temps terminal totalement inaccessible

$$S^m = \inf\ \{\ t\ :\ \tfrac{1}{m} > d(X_{t-},X_t) \geqq \tfrac{1}{m+1}\ \}$$

Tous les points de E sont permanents pour S^m. Soit S^m_n le n-ième itéré de S^m . Nous introduirons la fonctionnelle additive retorse s^m définie par

$$s^m_t = \sum_{n>0} I_{\{S^m_n\leqq t\}}$$

et nous désignerons par $\underset{=}{G}^m$ l'ensemble des parties boréliennes K de E telles que la fonctionnelle $I_K.s^m$ ait un p-potentiel borné pour tout p>0. D'après la prop.3, E est la réunion d'une suite d'éléments de $\underset{=}{G}^m$. La fonctionnelle $I_K.s^m$ étant du type de Poisson, la fonctionnelle $\widetilde{I_K.s^m}$ est égale à $\langle I_K.s^m,I_K.s^m\rangle$ (prop.5), et elle est donc absolument continue par rapport à la fonctionnelle additive $H_t=t$. On peut donc écrire, pour tout t et tout $K\in\underset{=}{G}^m$

(*) **Il est plus naturel à certains égards d'écrire le second membre** $\underset{\sim}{E}^{\bullet}\Big[\int_0^t ds\int_E n(X_{s-},dy)f(X_{s-},y)\Big]$.

(7) $$\underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\sum_{s\leq t} I_{\{\frac{1}{m}>d(X_{s-},X_s)\geq \frac{1}{m+1}\}} I_{\{X_s\in K\}}\Big] = \underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\int_0^t \bar{n}_m(X_s,K)ds\Big]$$

où $\bar{n}_m(\cdot,K)$ est une fonction positive borélienne, définie à une fonction de potentiel nul près. Si $K\in\underline{\underline{G}}^m$ est réunion d'une suite (K_i) d'ensembles boréliens disjoints, on a évidemment $\sum_i \bar{n}_m(\cdot,K_i) = \bar{n}_m(\cdot,K)$ p.p. On en déduit (*) l'existence d'un noyau positif n_m tel qu'on ait, pour tout $K\in\underline{\underline{G}}^m$, $\bar{n}_m(\cdot,K)=n_m(\cdot,K)$ p.p..

Soit L un ensemble borélien ; les deux fonctionnelles sous les symboles $\underset{w}{E}$ dans (7) sont associées :le processus $(I_L\circ X_{s-})$ étant très bien-mesurable, la prop.2 de l'exposé I nous donne

(8) $$\underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\sum_{s\leq t} I_{\{X_{s-}\in L\}} I_{\{\frac{1}{m}>d(X_{s-},X_s)\geq \frac{1}{m+1}\}} I_{\{X_s\in K\}}\Big]$$
$$= \underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\int_0^t I_{\{X_s\in L\}} n_m(X_s,K)ds\Big]$$

où le remplacement de $\{X_{s-}\in L\}$ par $\{X_s\in L\}$ dans la seconde expression est bien légitime. L'argument habituel de classe monotone, et le fait que E est réunion d'une suite d'éléments de $\underline{\underline{G}}^m$, entraînent alors que l'on a, pour toute fonction borélienne positive f sur E×E

$$\underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s) I_{\{\frac{1}{m}>d(X_{s-},X_s)\geq \frac{1}{m+1}\}}\Big] = \underset{w}{E}^{\bullet}\Big[\int_0^t ds\int_E n_m(X_s,y)f(X_s,y)\Big].$$

Prenons pour f, en particulier, l'indicatrice du complémentaire C de $\{\frac{1}{m} >d(x,y)\geq \frac{1}{m+1}\}$. Le premier membre étant nul, la fonction $\int_E n_m(\cdot,dy)I_C(\cdot,y)$ est nulle presque partout. Autrement dit, au prix d'une modification de $n_m(\cdot,dy)$ sur un ensemble de potentiel nul, nous pouvons supposer que la mesure $n_m(x,dy)$ est portée, quel que soit $x\in E$, par l'ensemble $\{\, y : \frac{1}{m}>d(x,y)\geq \frac{1}{m+1}\}$. Nous

---

(*) Représenter E comme réunion d'une suite (K_j) d'éléments disjoints de G^m. Pour chaque j , et chaque $f\in\underline{C}_0(E)$, définir $\bar{n}_m(\cdot,f.I_{K_j})$ par une formule analogue à (7). Au moyen d'une suite totale dans $\underline{C}_0$, construire une application linéaire ≥ 0 n_m^j de $\underline{C}_0$ dans l'espace des fonctions boréliennes finies, telle que $n_m^j(f)= \bar{n}_m(\cdot,f.I_{K_j})$ p.p.; pour tout j, n_m^j est un noyau. Enfin,on somme sur j.

supposerons cela dans toute la suite.

Pour obtenir l'existence du noyau n, il suffit maintenant de sommer sur m. Reste à établir l'unicité. Prenons pour f l'indicatrice de l'ensemble $\{ \frac{1}{m} > d(x,y) \geqq \frac{1}{m+1} , y\in K \}$, et désignons par n'_m le noyau

$$n'_m(x,dy) = n'(x,dy).I_{\{\frac{1}{m} > d(x,y) \geqq \frac{1}{m+1}\}}$$

La formule (6) entraîne alors

$$\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\sum_{s\leqq t} I_{\{\frac{1}{m} > d(X_{s-},X_s) \geqq \frac{1}{m+1}\}} I_{\{X_s\in K\}}] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^t n'_m(X_s,K)ds]$$

$$= \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^t n_m(X_s,K)ds]$$

Prenons $K\in\underline{\underline{G}}^m$; toutes ces intégrales sont alors finies, et l'on voit que $n_m(x,K)=n'_m(x,K)$ pour presque tout x (th. d'unicité). La fin de la démonstration d'unicité est alors immédiate.

3. Construction de certains éléments de $\underline{\underline{M}}$

DÉFINITION.- Nous désignerons par Λ^1 l'ensemble des fonctions boréliennes f définies sur E×E, telles que

$$\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\sum_{s\leq t} |f(X_{s-},X_s)| I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}] < \infty \text{ pour tout } t.$$

Nous désignerons alors par S(f) ou Sf l'élément de $\underline{\underline{A}}$ défini par

(9) $$(Sf)_t = \sum_{s\leq t} f(X_{s-},X_s) I_{\{X_{s-}\neq X_s\}} .$$

L'ensemble des fonctions boréliennes f sur E×E telles que $f^2\in\Lambda^1$ sera noté Λ^2.

Nous continuerons à noter H la fonctionnelle additive fondamentale (H_t=t). D'autre part, si f est borélienne positive sur E×E, nous noterons Nf la fonction borélienne sur E $\int n(\cdot,dy)f(\cdot,y)$.

THÉORÈME 3.- (*) a) Soit f un élément de Λ^1. La fonction Nf est alors définie p.p., appartient à $\underline{\underline{L}}^1(H)$, et on a

---

(*) S'étend aussitôt aux semi-groupes de HUNT par chang^t de temps

(10) $\qquad\qquad \tilde{S}f = (Nf).H$

b) <u>Soit</u> $f \in \Lambda^2$, <u>et soit</u> $f_m = f.I_{\{\frac{1}{m} > f \geq \frac{1}{m+1}\}} I_{\{\frac{1}{m} > d \geq \frac{1}{m+1}\}}$; <u>on a</u> $f_m \in \Lambda^1$, <u>la fonctionnelle</u> $\overset{c}{S}f_m = Sf_m - \tilde{S}f_m$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{A}}' \cap \underline{\underline{M}}'$. <u>Les fonctionnelles</u> $\overset{c}{S}f_m$ <u>sont deux à deux orthogonales, et la série</u> $\sum_m \overset{c}{S}f_m$ <u>converge dans</u> $\underline{\underline{M}}'$ <u>vers une fonctionnelle</u> $\overset{c}{S}f$.

c) <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux éléments de</u> Λ^2. <u>On a alors</u> $fg \in \Lambda^1$ <u>et</u>

(11) $\qquad\qquad < \overset{c}{S}f, \overset{c}{S}g > = N(fg).H$.

DÉMONSTRATION.- L'assertion a) a déjà été établie pour des fonctions positives (c'est le théorème 2) , et le cas des fonctions de Λ^1 s'en déduit aussitôt par différence. Pour prouver b), prenons d'abord pour f une indicatrice d'ensemble, prenons $K \in \underline{\underline{G}}^m$ (notations de la démonstration du th.2) et posons $j_K(x,y) = I_K(y)$. La fonctionnelle $S(f_m j_K)$ est alors du type de Poisson, et la prop.5 nous donne

$$< \overset{c}{S}(f_m j_K), \overset{c}{S}(f_m j_K) > = S(f_m j_K) = N(f_m j_K).H$$

On en déduit sans peine que $< \overset{c}{S}(f_m j_K), \overset{c}{S}(f_m j_K) > = N(f_m^2 j_K).H$ lorsque f est une combinaison linéaire finie d'indicatrices, puis lorsque f est borélienne bornée. Supposons que f appartienne à Λ^2 ; l'inégalité $|f_m| \leq (m+1)f^2$ entraîne $f_m \in \Lambda^1$, d'où l'existence de $\overset{c}{S}f_m$, et on a évidemment encore $< \overset{c}{S}(f_m j_K), \overset{c}{S}(f_m j_K) > = N(f_m^2 j_K).H$, car f_m est bornée. Choisissons une suite (K_p) d'éléments de $\underline{\underline{G}}^m$, deux à deux disjoints, de réunion E, et sommons sur p. Les martingales $\overset{c}{S}(f_m j_{K_p})$ sont des sommes compensées de sauts sans discontinuités communes, donc deux à deux orthogonales, et la série $\sum_p < \overset{c}{S}(f_m j_{K_p}), \overset{c}{S}(f_m j_{K_p}) >$ converge dans $\underline{\underline{A}}'$; il en résulte que $\sum_p \overset{c}{S}(f_m j_{K_p})$ converge dans $\underline{\underline{M}}'$. Nous désignerons sa somme par $\overset{c}{S}(f_m)$; on a évidemment $< \overset{c}{S}f_m, \overset{c}{S}f_m > = N(f_m^2).H$. On somme à nouveau, sur m, et le même raisonnement montre que $\overset{c}{S}f$ existe, et prouve la relation $<\mathcal{S}f,\mathcal{S}f> = N(f^2).H$, d'où l'on déduit aussitôt (11).

Le théorème suivant donne un exemple fondamental de fonction de Λ^2.

THÉORÈME 4.- Soient p un nombre ≥ 0, u_1 et u_2 deux fonctions p-excessives bornées, et $u=u_1-u_2$. Posons $f(x,y)=u(y)-u(x)$ sur $E\times E$. Alors $f\in\Lambda^2$ et

(12) $$\underset{\sim}{E}^{\cdot}\left[\int_0^{\infty} e^{-2pt} d<\mathcal{S}f,\mathcal{S}f>_t\right] = \underset{\sim}{E}^{\cdot}\left[\int_0^{\infty} N(f^2)\circ X_t e^{-2pt} dt\right]$$

$$\leq 2\|u\|_{\infty}(\|u_1\|_{\infty}+\|u_2\|_{\infty})$$

DÉMONSTRATION.- Notons d'abord que u_1,u_2,f sont boréliennes d'après l'hypothèse de continuité absolue. Désignons par A_1 et A_2 les fonctionnelles additives naturelles dont les p-potentiels sont u_1 et u_2 respectivement, et posons $A=A_1-A_2$. La fonctionnelle

$$M_t = u\circ X_t - u\circ X_0 + \int_0^t (dA_s - p.u\circ X_s)ds$$

est une martingale de carré intégrable (pour toute loi $\underset{\sim}{P}^x$) du fait que u_1 et u_2 sont bornées ([3], chap.VII, th.24), et nous avons pour l'intégrale stochastique $K_t=\int_0^{\infty} e^{-ps} dM_s$ l'expression

$$K_t = e^{-pt}u\circ X_t - u\circ X_0 + \int_0^t e^{-ps} dA_s$$

(exposé II, th.1). Nous avons alors

$$\underset{\sim}{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-2ps} d<M,M>_s\right] = \underset{\sim}{E}\left[\left(\int_0^{\infty} e^{-ps} dM_s\right)^2\right] = \underset{\sim}{E}[K_{\infty}^2]$$

$$= \underset{\sim}{E}\left[\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-ps} dA_s\right)^2\right]$$

Calculons cette intégrale par la "formule de l'énergie". Elle vaut

$$\underset{\sim}{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-ps}(u\circ X_s + (u\circ X_s)_-)e^{-ps} dA_s\right] \leq 2\|u\|_{\infty}\underset{\sim}{E}^{\cdot}\left[\int_0^{\infty} e^{-ps}|dA_s|\right]$$

$$\leq 2\|u\|_{\infty}(\|u_1\|_{\infty}+\|u_2\|_{\infty})$$

Mais nous savons aussi (exposé I, prop.4) que

$$\underset{\sim}{E}\left[\sum_{r\leq s\leq t}\Delta M_s^2\right] \leq \underset{\sim}{E}[(M_t-M_r)^2] \leq \underset{\sim}{E}[<M,M>_t - <M,M>_r]$$

et par conséquent aussi

$$\underset{\sim}{E}[\sum_s e^{-2ps}\Delta M_s^2] \leqq \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty e^{-2ps}d\langle M,M\rangle_s]$$

Les sauts d'une martingale étant totalement inaccessibles, la première somme ne porte que sur des s tels que $X_{s-} \neq X_s$. Pour un tel s on a $\Delta A_s=0$, puisque A est une fonctionnelle naturelle, donc $\Delta M_s = u\circ X_s - (u\circ X_s)_- = u\circ X_s - u\circ X_{s-}$ (l'ensemble des (s,ω) tels que $u\circ X_{s-}(\omega)\neq(u\circ X_s)_-(\omega)$ est une réunion de graphes de temps d'arrêt <u>accessibles</u>) ; ainsi $\Delta M_s=f(X_{s-},X_s)$, et il vient donc

$$\underset{\sim}{E}[\sum_s f^2(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}e^{-2ps}] \leqq 2\|u\|_\infty(\|u_1\|_\infty+\|u_2\|_\infty)$$

relation équivalente à l'énoncé, car le premier membre vaut aussi $\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty e^{-2ps}N(f^2)\circ X_s ds]$ d'après le th. 2.

4. <u>Structure de certaines fonctionnelles</u>

Le lecteur pourra s'assurer que les résultats qui suivent s'étendent, par changement de temps, aux semi-groupes de HUNT.

Nous avons vu dans l'exposé I qu'il y avait identité entre les sommes compensées de sauts, d'une part, et d'autre part les martingales de carré intégrable orthogonales à toute martingale continue. Nous allons voir ici un résultat analogue pour les éléments de $\underline{\underline{M}}'$ (bien entendu, les théorèmes qui suivent sont encore dus à WATANABE).

THÉORÈME 5.- <u>Soit $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$ l'ensemble des fonctionnelles de la forme $\overset{c}{S}f$, $f\in\Lambda^2$, $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$ est l'orthogonal dans $\underline{\underline{M}}'$ de l'ensemble $\underline{\underline{M}}'_c$ des fonctionnelles continues de $\underline{\underline{M}}'$.</u>

DÉMONSTRATION.- Les fonctionnelles $\overset{c}{S}f$ sont des sommes compensées de sauts, elles sont donc orthogonales à toute martingale continue. L'orthogonal $\underline{\underline{M}}'_d$ de $\underline{\underline{M}}'_c$ contient donc $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$. Pour montrer l'inclusion inverse, nous procéderons en trois lemmes.

LEMME 1.- <u>Le sous espace stable de $\underline{\underline{M}}'$ engendré par $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$ est $\underline{\underline{M}}'_d$</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit $g\in\underline{\underline{C}}_0$, et soit $p>0$; posons $u=U^pg$, $f(x,y)=u(y)-u(x)$. Nous avons vu (th.4) que f appartient à Λ^2. La martingale

$$C_t^{p,g} = u\circ X_t - u\circ X_0 + \int_0^t (g-pu)\circ X_s ds$$

a les mêmes sauts que $\overset{c}{S}f$. Autrement dit, $C^{p,g}-\overset{c}{S}f \in \underline{\underline{M}}'_c$. Soit alors M une fonctionnelle , appartenant à $\underline{\underline{M}}'_d$ mais orthogonale à $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$; M est alors orthogonales aux fonctionnelles $C^{p,g}$, et le th. 6' de l'exposé III entraîne que M=0.

Il reste donc seulement à voir que $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$ est un sous-espace stable, ce qui fait l'objet des deux lemmes suivants.

LEMME 2.- <u>Soit</u> $f\in\Lambda^2$, <u>et soit</u> g <u>une fonction borélienne bornée sur</u> E. <u>Soit</u> f' <u>la fonction</u> $(x,y)\mapsto g(x)f(x,y)$ <u>sur</u> E×E. <u>On a alors</u> $g.\overset{c}{S}f = \overset{c}{S}f'$. (<u>Par conséquent</u> $M\in\overset{c}{\underline{\underline{S}}} \Rightarrow g.M\in\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$).

DÉMONSTRATION.- Comme $\overset{c}{S}f$ est une somme compensée de sauts, il en est de même de $g.\overset{c}{S}f$, et le saut de cette martingale à l'instant s est égal à $g\circ X_{s-}\Delta(\overset{c}{S}f)_s = g\circ X_{s-}f(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}$ (*) $= f'(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}$. On a $f'\in\Lambda^2$, puisque g est bornée. Les deux martingales $\overset{c}{S}f'$ et $g.\overset{c}{S}f$ sont donc des sommes compensées de sauts qui ont même sauts ; elles sont donc égales.

LEMME 3.- <u>Soit</u> (M^p) <u>une suite d'éléments de</u> $\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$ <u>qui converge dans</u> $\underline{\underline{M}}'$ <u>vers une fonctionnelle</u> M ; <u>on a alors</u> $M\in\overset{c}{\underline{\underline{S}}}$.

DÉMONSTRATION.- Choisissons des fonctions $f_p\in\Lambda^2$ telles que $M^p = \overset{c}{S}f_p$ pour tout p. Les fonctionnelles M^p convergeant dans $\underline{\underline{M}}'$, on a

$$(13)\qquad \lim_{\substack{p\to\infty\\ q\to\infty}} \underset{\sim}{E}^x\left[\int_0^t N((f_p-f_q)^2)\circ X_s\, ds\right] = 0 \text{ pour tout } x \text{ et tout } t.$$

Introduisons sur E×E les mesures

$$\mu_{x,t}(f) = \underset{\sim}{E}^x\left[\int_0^t Nf\circ X_s\right] \qquad (\text{ f borélienne positive })$$

et aussi

$$m(x,t) = \sup_p \mu_{x,t}(f_p^2)$$

(*) Si M est une martingale, si $H\in\underline{\underline{L}}^2(M)$ est un processus très-bien-mesurable, on a $\Delta(H.M)_s = H_s.\Delta M_s$ (**exposé I , th.8**).

Comme $\mu_{x,t}(f_p^2) = \underset{\sim}{E}^x[(M_t^p)^2]$, $m(.,t)$ est mesurable et finie. Fixons un $t>0$, et choisissons une mesure de référence bornée η telle que $m(.,t)$ soit η-intégrable. Soit ν la mesure $\int \mu_{x,t} d\eta(t)$. Il résulte de (13) et du théorème de Lebesgue que la suite (f_p) est une suite de Cauchy dans $L^2(\nu)$; comme ν est σ-finie (th.2 et prop.3), on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite (f_p) converge ν-presque partout vers une fonction borélienne f, telle que $|f| \leqq \lim\inf_p |f_p|$. Cela entraîne $f\in\Lambda^2$ d'après le lemme de Fatou. Soit A la fonctionnelle additive positive $< \overset{c}{S}f-M, \overset{c}{S}f-M >$; on a

$$\underset{\sim}{E}^\eta[A_t] = \underset{\sim}{E}^\eta[(\overset{c}{S}f-M)_t^2] = \lim_p \underset{\sim}{E}^\eta[(\overset{c}{S}(f-f_p))_t^2] = \lim_p \nu((f-f_p)^2)=0$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la fonction $\underset{\sim}{E}^\cdot[A_t]$ est finement continue ; comme elle est nulle presque partout, elle est nulle partout ; comme t est >0, on en déduit A=0, donc $\overset{c}{S}f=M$. Cela établit le théorème.

THÉORÈME 6.- <u>Soit</u> A <u>une fonctionnelle additive, positive, purement discontinue et quasi-continue à gauche</u> (<u>pour toute suite</u> $T_n \uparrow T$ <u>de temps d'arrêt, on a</u> $A_T = \lim_n A_{T_n}$ <u>p.s.</u>). <u>Il existe alors une fonction borélienne positive</u> f <u>sur</u> E×E, <u>telle que</u> A <u>soit indistinguable de la fonctionnelle</u>

$$Sf_t = \sum_{s\leqq t} f(X_{s-},X_s)I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}$$

DÉMONSTRATION.- A étant purement discontinue est la somme des fonctionnelles A^m :

$$A_t^m = \sum_{s\leqq t} \Delta A_s \cdot I_{\{\frac{1}{m} > \Delta A_s \geqq \frac{1}{m+1}\}}$$

Il suffit d'établir le théorème pour chacune d'elles. Autrement dit, de traiter le cas où les sauts de A sont bornés supérieurement et inférieurement. <u>Nous faisons cette hypothèse dans la suite</u>. Soit ensuite $\nu = \inf\{t : \Delta A_t \neq 0\}$; ν est un temps terminal totalement inaccessible, et tout point de E est régulier pour ν.

D'après la prop.3, comme les sauts de A sont bornés supérieurement, E est la réunion d'une suite (K_p) d'ensembles disjoints, boréliens, tels que les fonctionnelles A^p

$$A_t^p = \sum_{s\leq t} \Delta A_s . I_{\{X_s \in K_p\}}$$

admettent, pour tout $q>0$, un q-potentiel borné. Il suffit donc de traiter le cas où A possède cette propriété.

On peut alors définir la fonctionnelle continue $\tilde{A}$, et la fonctionnelle compensée $\overset{c}{A}$, qui appartient à $\underline{\underline{M}}'$ d'après le th.1, et le fait que les sauts de A sont bornés supérieurement et inférieurement. D'après le th.5, il existe une fonction borélienne $g\in \Lambda^2$ telle que $\overset{c}{A-\tilde{A}} = \overset{c}{S}g$; comme $\tilde{A}$ est continue, les sauts de A sont ceux de $\overset{c}{S}g$. Autrement dit, A étant la somme de ses sauts (et aussi la somme des valeurs absolues de ses sauts, puisque ceux-ci sont positifs !)

$$A_t = \sum_{s\leq t} |g(X_{s-},X_s)| I_{\{X_{s-}\neq X_s\}}$$

Il ne reste plus qu'à poser $f=|g|$.

5.- <u>Relation entre le noyau de LÉVY et le générateur infinitésimal</u>.

Ce numéro est particulièrement important, puisqu'il permet de calculer explicitement le noyau de LÉVY dans certains cas. Les relations entre le noyau de LÉVY, les mesures harmoniques, et le générateur apparaissent pour la première fois dans un article de IKEDA-WATANABE (J.Math. Kyoto, 1962). On consultera l'article [5] de WATANABE pour une situation plus générale que celle que nous traitons ici.

Supposons que E soit une variété C^∞, et que les fonctions de $\underline{\underline{C}}_c^\infty$ (indéfiniment différentiables à support compact) appartiennent au domaine du générateur infinitésimal A de (P_t). Soient alors $x\in E$, $f\in \underline{\underline{C}}_c^\infty(E\setminus\{x\})$ (i.e., à support disjoint de x) ; si f est positive, $Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} P_t f(x)$ est positive, et il existe donc une mesure positive $a(x,dy)$ sur $E\setminus\{x\}$ telle que

$$\text{si } f \in \underline{\underline{C}}_c^\infty(E \setminus \{x\}) \qquad Af(x) = \int_{E\setminus\{x\}} a(x,dy)f(y)$$

Les mesures $\frac{1}{t}P_t(x,dy)$ sur $E \setminus \{x\}$ convergent donc vaguement vers $a(x,dy)$, et on a si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E\setminus\{x\})$, $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}P_t(x,f)=a(x,f)$. Nous considérerons dans toute la suite $a(x,dy)$ comme une mesure sur E telle que $a(x,\{x\}) = 0$ pour tout x - ce n'est pas une mesure de Radon en général.

Montrons que a définit un noyau. Choisissons des fonctions ≥ 0 $g_n(x,y)$, appartenant à $\underline{\underline{C}}_c((E\times E)\setminus D)$ - où D désigne la diagonale- et tendant vers 1 en croissant sur $(E\times E)\setminus D$. Si f est continue bornée sur E, on a

$$\int_E a(x,dy)g_n(x,y)f(y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int P_t(x,dy)g_n(x,y)f(y)$$

Le second membre est une fonction mesurable ; il en résulte que le premier l'est aussi si f est borélienne **bornée, puis** borélienne positive. On fait alors tendre n vers $+\infty$.

Ceci étant établi, on a le résultat suivant

THÉORÈME 7.- <u>Sous les hypothèses ci-dessus</u>, (P_t) <u>est un semi-groupe de LÉVY, dont</u> a <u>est un noyau de LÉVY.</u>

DÉMONSTRATION.- a) Soient W un ouvert, F le complémentaire de W, x un point de F, f une fonction de $\underline{\underline{C}}_c^\infty(W)$; le processus

$$Y_t = e^{-pt}f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t e^{-ps}(Af-pf)\circ X_s ds$$

est une martingale bornée continue à droite, et $Y_0=0$; on a donc $\underset{\sim}{E}[Y_{T_W}] = 0$. Autrement dit,

$$\underset{\sim}{E}^x[\exp(-pT_W)f\circ X_{T_W}] = \underset{\sim}{E}^x[\int_0^{T_W} e^{-ps}(Af-pf)\circ X_s ds]$$

Comme $x\in F$, f est nulle avant T_W, et $Af\circ X_s = a(X_s,f)$ avant T_W. Ainsi

$$\underset{\sim}{E}^x[\exp(-pT_W)f\circ X_{T_W}] = \underset{\sim}{E}^x[\int_0^{T_W} e^{-ps}a(X_s,f)ds]$$

On en déduit aussitôt que les deux processus croissants bornés A et B définis par

$$A_t = f\circ X_{T_W} I_{\{0<T_W\leq t\}} e^{-pT_W}$$
$$B_t = \int_0^{t\wedge T_W} e^{-ps} a(X_s,f)ds$$

sont associés. On a donc pour tout processus Z très-bien-mesurable

$$\underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^{\infty} Z_u dA_u] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^{\infty} Z_u dB_u]$$

Prenons en particulier $Z_s = I_C\circ X_{s-}$, où C est borélien. Il vient

$$\underset{\sim}{E}^{\bullet}[e^{-pT_W} I_C\circ X_{T_W-} f\circ X_{T_W} I_{\{0<T_W\}}] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^{T_W} e^{-pu} I_C\circ X_{u-} a(X_u,f)du]$$

Cette relation s'étend au cas où f est borélienne bornée à support compact dans W. On en déduit alors que, si f est borélienne bornée sur E×E, et si K est un compact de W, on a

$$\underset{\sim}{E}^{\bullet}[e^{-pT_W} f(X_{T_W-},X_{T_W}) I_K\circ X_{T_W} I_{\{0<T_W\}}] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^{T_W} e^{-pu}du\int_E a(X_u,y)f(X_u,y)I_K(y)]$$

Enfin, grâce à un passage à la limite monotone, on étend cette formule au cas où f est borélienne positive quelconque, et on y remplace K par W : ainsi

$$(14)\quad \underset{\sim}{E}^{\bullet}[e^{-pT_W} f(X_{T_W-},X_{T_W}) I_{\{X_{T_W}\in W,\, 0<T_W\}}] = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_0^{T_W} e^{-pu}du\int_E a(X_u,y)f(X_u,y)]^{(*)}$$

Choisissons maintenant un nombre >0, et désignons par ν_h le temps terminal $\inf\{t: d(X_0,X_t)>h\}$. Prenons un $x\in E$, et appliquons la formule précédente, en prenant pour W l'ouvert $\{y : d(x,y)>h\}$, et pour f la fonction borélienne sur E×E

$$I_C(u) I_{\{d(u,v)>2h\}} I_B(v)$$

où B et C sont des parties boréliennes de E. On a $T_W=\nu_h$ $\underset{\sim}{P}^x$-p.s., et on peut supprimer l'indicatrice $I_W\circ X_{T_W}$ de la première intégrale : en effet, si $f(X_{T_W-},X_{T_W})\neq 0$, on a $d(X_{T_W-},X_{T_W})>2h$, et comme $d(x,X_{T_W-})\leq h$ on a $d(x,X_{T_W})>h$. Par conséquent :

$$\underset{\sim}{E}^x[\exp(-p\nu_h) I_C\circ X_{\nu_h-} I_{\{d(X_{\nu_h-},X_{\nu_h})>2h\}} I_B\circ X_{\nu_h}]$$
$$= \underset{\sim}{E}^x[\int_0^{\nu_h} e^{-pu}du\int_E a^h(x,dy)I_C(X_s)I_B(y)]$$

(*) L'indicatrice $I_W(y)$ a été supprimée, car $y\in W$ avant T_W. On a remplacé aussi X_{u-} par X_u, ce qui ne change rien.

où $a^h(x,dy) = a(x,dy)I_{\{d(x,y)>2h\}}$. La propriété de Markov forte nous donne des formules analogues avec les itérés ν_h^n de ν_h. Comme ces itérés tendent vers l'infini avec n, il vient en sommant sur n

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot}[\sum_s e^{-ps} I_C \circ X_{s-} I_{\{d(X_{s-},X_s)>2h\}} I_B \circ X_s] =$$

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot}[\int_0^\infty e^{-pu} du \int_E a^h(X_u,dy) I_C(X_u) I_B(y)]$$

Grâce à la prop.3, on peut inverser la transformation de Laplace lorsque B est assez petit, ce qui nous donne

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot}[\sum_{s\leq t} I_C \circ X_{s-} I_{\{d(X_{s-},X_s)>2h\}} I_B \circ X_s] =$$

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot}[\int_0^t du \int_E a^h(X_u,dy) I_C(X_u) I_B(y)]$$

On passe de là , par un argument de classe monotone , à une formule analogue où $I_C(x)I_B(y)$ est remplacée par $f(x,y)$, f borélienne bornée, nulle pour $y\notin K$ (où K est donné par la prop.3). Ensuite, au cas où f est borélienne positive quelconque. Enfin, en faisant tendre h vers 0, on obtient la formule (6) du th.2, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE COMPLÉMENTAIRE

(les n^{os} 1 à 5 figurent à la fin de l'exposé I).

[6]. MEYER (P.A.)- Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble,12, 1962.

[7]. MEYER (P.A.)- Processus de Markov , Lecture Notes in Math. n°26, 1967 (le chapitre XVI, consacré aux fonctionnelles multiplicatives, a été multigraphié ultérieurement à l'Institut de Mathém. de Strasbourg).

[8]. BLUMENTHAL et GETOOR.- Livre à paraître sur les processus de Markov.