BERNARD LASCAR

Problèmes de Cauchy hyperboliques en dimension infinie

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. n° 6, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A7_0>

Séminaire P. KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 6, 29 p.

PROBLÈMES DE CAUCHY HYPERBOLIQUES EN DIMENSION INFINIE

par Bernard LASCAR (*)

L'objet de ce travail est d'étudier des problèmes de Cauchy sur un espace hilbertien de dimension infinie. Le cadre, dans lequel nous nous plaçons, est celui du problème de Cauchy strictement hyperbolique à coefficients C^∞. Mais il est à noter que le cas analytique a été étudié dans [10]. Les instruments de base sont ceux de [12]. Nous obtenons une généralisation exacte des résultats classiques. Dans une première partie, on étudie une estimation avec poids, on se réfère alors à [6]. Dans une deuxième partie, on construit une paramétrixe. Dans un cas particulier, on utilisera [7]. Ce travail est une partie d'un des chapitres de [13].

Notations et énnncés principaux. - Le cadre est celui d'un triplet $E' \xhookrightarrow{i'} X' \simeq X \xhookrightarrow{i} E$; E', X, E étant des espaces hilbertiens réels séparables dont les normes sont $\| \|'$, $| |$, $\| \|$. i est de Hilbert-Schmidt. X est identifié à son dual. $(|)$ est le produit scalaire dans X. ν désignera l'image dans E de la mesure cylindrique gaussienne canonique de x. On utilisera également le triplet complexifié $E'^c \xhookrightarrow{i'^c} X'^c \simeq X^c \xhookrightarrow{i^c} E^c$, les normes sont notées comme plus haut. On notera z la variable dans E^c. $\nu_c(z)$ (ou $\nu(z)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguités) est la mesure image dans E^c de la mesure gaussienne de variance $1/2$ de X^c.

Nous nommerons $(e_n)_{n\in N}$ une base hilbertienne de X telle que $j(e_n) = a_n^{-1} e_n$, avec $\sum_n a_n^{-2} = 1$, et où j est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans X symétrique positif tel que $i = 1 \circ j$, où 1 est isométrique $X \longrightarrow E$. On note que $e_n \in E'$ et que $\|e_n\| = a_n^{-1}$. On notera $E \hat{\otimes} F$ le complété pour la norme hilbertienne de $E \otimes F$ lorsque E et F sont des Hilberts. On notera $\hat{\odot}_j E$ les tenseurs de Hilbert-Schmidt de E symétriques d'ordre j. On désigne par $\mathfrak{I}$ l'espace des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, où les α_j sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux, et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ Si $x \in E$, on écrit

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \dots ,$$

où les x_i sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne e_i. On écrit

(*) Texte reçu en Janvier 1979.

Bernard LASCAR, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 PALAISEAU ; et Analyse complexe, Tour 46, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05.

$$e_\alpha = \frac{\alpha!}{j!} \sum_{(i_1,\dots,i_j)\in I_\alpha} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_j} = \mathrm{sym}(e_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_n^{\alpha_n}) ,$$

pour $\alpha \in \mathfrak{J}$, $|\alpha| = j$, I_α étant l'ensemble des suites $(i_1, \dots, i_j) \in \underset{\sim}{N}^j$, telles que α_1 d'entre eux valent 1, ..., α_n d'entre eux valent n ...

De sorte que $(e_\alpha|x) = x^\alpha$ et $\|e_\alpha\|^2_{\hat{\odot}_j E} = \frac{\alpha!}{j!} a^{-2\alpha}$.

Nous noterons par $C_b^\infty(E , F)$ l'espace des fonctions C^∞-Fréchet différentiables $E \longrightarrow F$ dont toutes les dérivées sont uniformément bornées en norme sur E, lorsque E et F sont des espaces de Banach. Si $u \in L^2_\nu(E)$, on note

$$(\theta u)(z) = (\exp 2^{-1} z^2)\ \widehat{u\nu}(z) , \text{ pour } z \in X^c ,$$

la transformée de Fourier normalisée (voir [1] et [9]). On sait que

$$\Phi(z) = (\theta u)(z) \in F(X^c)$$

(espace de Fock). On a introduit dans [12] une chaîne d'espaces de Sobolev $\mathcal{E}^s(X,E)$, $s \in \underset{\sim}{R}$, tels que

$$\mathcal{E}^s(X , E) \overset{\theta}{\longmapsto} \Lambda^s(X , E) ,$$

avec $\Lambda^s(X , E) = \{g(z) \in L^2_{(1+\|z\|^2)^s \nu_c}(E^c)$; $\exists\ \Phi(z)$ analytique entière sur X^c,

avec $\mathcal{E}(g|s_q^c) = \Phi_{\restriction X_q^c}$, ν_q-presque partout, $\forall\ X_q$ sous-espace vectoriel de dimension finie de $X\}$. $\mathcal{E}(g|s_q^c)$ est l'espérance conditionnelle. s_q^c est l'extension continue, si $X_q \subset E'$, ou ν_c-mesurable si $X_q \subset X$, de la projection hermitienne $s_q^c : X^c \longrightarrow X_q^c$.

L'application $g \longrightarrow \Phi$ étant injective, nous noterons en fait g par Φ. Si $s = 0$, $\mathcal{E}^s = L^2_\nu$, $\Lambda^s = F(X^c)$. Si $s \in \underset{\sim}{N}$, $\mathcal{E}^s(X , E) = \{u \in L^2_\nu$, dont la dérivée de densité d'ordre j [8] est dans $L^2_\nu(E , \hat{\odot}_j E)$, $0 \leq j \leq s\}$. Pour $s < 0$, on a un espace de distributions cylindriques que nous noterons encore $u\nu$ faisant apparaître encore une "densité". $\mathcal{E}^s$ est un espace hilbertien dont la norme est notée $\| \|_s$. Nous avons étudié dans [12] une classe d'opérateurs pseudo-différentiels continus dans $\mathcal{E}^{-\infty}$ qui nous permettaient d'étudier des problèmes elliptiques.

On étudie des opérateurs différentiels sur $\underset{\sim}{R} \times E$ de la forme

$$P(x , t , D_x^* , D_x , D_t) = \sum_{j=0}^m A_j(x , t , D_x^* , D_x) D_t^{m-j} + R(x , t , D_x^* , D_x , D_t) .$$

Soit $P = P_m + R$, avec

$$A_j(x , t , D_x^* , D_x , D_t) = \sum_{p+q=j} \mathrm{div}_p\ a_{pq}(x , t) D_x^q$$

(R se décrit comme P_m, mais est d'ordre $\leq m - 1$), D_x est le produit par i^{-1} de la différentielle par rapport à x, $(-1)^p \mathrm{div}_p = D_x^{*p}$ est le transposé relativement à la mesure de Gauss de D^p.

$$a_{pq}(x , t) \in C_p^\infty(E \times \underset{\sim}{R} , \mathcal{L}(\hat{\odot}_q E , \hat{\odot}_p E')) .$$

On dit que P est hyperbolique dans la direction t si l'équation

$$\sum_{j=0}^{m} A_j(x , t , \xi)\lambda^{m-j} = 0 ,$$

avec $A_j(x , t , \xi) = \sum_{p+q=j} (a_{pq} \xi^q , \xi^p)$, a, $\forall x , t , \xi$, des racines réelles $\lambda_j(x , t , \xi)$ et si, de plus, $\forall (t , x) \in \underset{\sim}{R} \times E$, $\exists C_0$ et C_1 tels que

$$|\lambda_j(x , t , \xi) - \lambda_k(x , t , \xi)| \geqslant C_0 \|\xi\| , \quad j \neq k , \quad \forall \xi \in E \setminus \{0\} ,$$

$$|\lambda_j(x , t , \xi)| \leqslant C_1 \|\xi\| , \quad \forall \xi \in E \setminus \{0\} .$$

On appellera ainsi (H) ces conditions. On remarque qu'il est nécessaire de mentionner l'existence de C_0 et C_1 car la sphère $\|\xi\| = 1$ n'est pas compacte. On pose

$$HSC_{0,b}^{\infty}(\underset{\sim}{R} \times E) = \{u(t , x) \in HSC_b^{\infty}(\underset{\sim}{R} \times E) , \text{ à support compact en } t\} .$$

THÉORÈME I.1. - Soit I_0 un intervalle compact de $[0 , \infty[$, K un compact de E , il existe I' et $\mathcal{U}$ des voisinages de I_0 et K , $\tau_0 > 0$, tels que

$$u \in HSC_{0,b}^{\infty}(\underset{\sim}{R} \times E) , \quad \text{supp } u \subset I' \times \mathcal{U} , \quad \tau \geqslant \tau_0$$

entraînent

$$\sum_{0\leq j+k\leq m-1} \tau^{2(m-j-k)-1} \int_0^{+\infty} \|D_t^k u\|_j^2 \exp(2\tau t)\, dt \leqslant C \int_0^{+\infty} \int |Pu|^2 \exp(2\tau t)\, dt\, d\nu(x) .$$

On introduit comme dans [6] des espaces $\mathcal{K}_{m,0}(\underset{\sim}{R} \times E)$ adaptés, et nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2. - Soit I_0 un intervalle compact de $[0 , \infty[$, K un compact de E , il existe I' et $\mathcal{U}$ des voisinages ouverts de I_0 et K tels que $\forall s \in \underset{\sim}{R}$, $\forall k \in \underset{\sim}{N}$, $\exists C > 0$ avec

$$u \in HSC_{0,b}^{\infty}(\underset{\sim}{R} \times E) , \quad \text{supp } u \subset I' \times \mathcal{U}$$

entraîne $\|u\|_{k+m-1,s} \leqslant C \|Pu\|_{k,s}$.

On obtient le théorème suivant.

THÉORÈME I.3. - Soit I_0 un intervalle compact de $[0 , \infty[$, K un compact de E , il existe un voisinage ouvert $I' \times \mathcal{U}$ de $I_0 \times K$ tel que, pour $s \in \underset{\sim}{R}$ et $k \in \underset{\sim}{N}$,

$$f \in \mathcal{K}_{k,s}^{o}(\underset{\sim}{R}^+ \times E) , \quad w \in \mathcal{K}_{k+m-1}^{o}(\underset{\sim}{R}^+ \times E) , \text{ avec } Pw = f \text{ sur } I' \times \mathcal{U} .$$

On a un résultat d'unicité.

THÉORÈME I.4. - Soit $(t_0 , x_0) \in \underset{\sim}{R} \times E$. $u \in \mathcal{K}_{\sigma,\tau}(\underset{\sim}{R} \times E)$ $(\sigma , \tau \quad \underset{\sim}{R})$ tel que $Pu = 0$ au voisinage de (t_0 , x_0) et $u = 0$, pour $t < t_0$ au voisinage de (x_0 , t_0) . Alors, il existe un voisinage ouvert de (t_0 , x_0) dans lequel $u = 0$.

Dans une seconde partie, on construit une paramétrixe pour le problème de Cauchy dans le cas particulier où les $a_{pq}(x , t)$ ne dépendent que de t. On prouve ainsi le théorème suivant.

THÉORÈME II.1. - Soit $I_0 \subset\subset \mathbb{R}$, on construit une paramétrixe du problème de Cauchy sur la forme

$$\begin{cases} PE_j = R_j \\ D_t^k E_{j|t=0} = \delta_{jk} + \rho_{jk} \end{cases}, \quad t \in I , \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1 , \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 ,$$

où E_j est un opérateur intégral de Fourier, et les R_j et ρ_{jk} sont des "pseudo-différentiels" dans des classes précisées. Ces termes sont employés un peu abusivement car on ne décrit pas ces opérateurs de la manière classique.

THÉORÈME II.2. - Soit $(t_0 , x_0) \in \mathbb{R} \times E$, $I_0 \subset\subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I_0$, il existe un voisinage $I_1 \times \mathcal{U}$ de (t_0 , x_0) sur lequel, $\forall\, \sigma \in \mathbb{R}$, $\forall\, \sigma_j \in \mathbb{R}^m$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Pu = f \\ D_t^j u_{|t=t_0} = g_j , \quad 0 \leq j < m-1 \end{cases},$$

a une unique solution $u \in \mathcal{K}_{\tau,\tau'}$ pour $f \in C^0(I_0 , \mathcal{E}^{\sigma}) \cap \mathcal{K}_{k,\sigma}(I \times E)$.

$g_j \in \mathcal{E}^{\sigma_j}$ est donnée par

$$u = E(\varphi f) + \textstyle\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{E}_j(\varphi g_j) - E'(\psi R(\varphi f) + \sum_{j=0}^{m-1} \psi R'_j(\varphi g_j))$$

sur $I_1 \times \mathcal{U}$. $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ont leurs supports au voisinage de x_0. On donne une description des opérateurs E, E_j, E', ainsi que des propriétés adéquates de continuité.

I. Estimation de Carleman pour un opérateur hyperbolique à coefficients C^∞.

Soit $P(x , t , D_x^* , D_x , D_t)$ de la forme indiquée plus haut. On note immédiatement que l'opérateur P applique l'espace $C^\infty(\mathbb{R}_t , \mathcal{E}^s(X , E)) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_t , \mathcal{E}^{s-m}(X, E))$ car l'application $t \longrightarrow a(t) = a(t , .) \in C_b^\infty(E , \mathcal{L}(\hat{\odot}_q E , \hat{\odot}_p E'))$, munie de la topologie d'espace de Fréchet, définie par les semi-normes.

$$\sup_{\|h\|\leqslant 1} \sup_{x\in E} \|D^\ell a(x)\, h^{(\ell)}\|_{\mathcal{L}(\hat{\odot}_q E , \hat{\odot}_p E')} ,$$

est C^∞ en t. On définit le symbole de $P(x , t , D_x , D_t)$ comme

$$P_m(x , t , \bar{z} , z , \tau) = \sum_{j=0}^{m} \tau^{m-j} A_j(x , t , \bar{z} , z) ,$$

avec

$$A_j(x , t , \bar{z} , z) = \sum_{p+q=j} (a_{pq}(x , t)\bar{z}^q z^p) .$$

On suppose donc que P est hyperbolique dans la direction t, c'est-à-dire que l'on a (H).

THÉORÈME I.1. - Soit I_0 un intervalle compact de $[0, +\infty[$, K un compact de E. Il existe des voisinages I' de I_0 et $\mathcal{U}$ de K, $\tau_0 > 0$, et $C > 0$, tels que $\tau \geq \tau_0$, $u \in HSC^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, $\operatorname{supp} u \subset I' \times \mathcal{U}$ entraînent

$$\sum_{0\leq j+k\leq m-1} \tau^{2(m-j-k)-1} \int_0^{+\infty} \|D_t^k u\|_j^2 \exp(2\tau t)\, dt \leq C \int_0^{+\infty} \int |Pu|^2 \exp(2\tau t)\, d\nu(x)\, dt .$$

La démonstration du théorème I.1 s'effectue selon le schéma général suivant

1. Réduction à une forme quadratique différentielle.
2. Réduction au cas où les $A_j(x, t, \bar{z}, z)$ ne dépendent pas de x et de t.
3. Estimation pour une forme quadratique.
4. Inégalité globale.

c'est-à-dire selon un schéma analogue à celui utilisé pour démontrer les inégalités de Carleman en dimension finie, voir [6], par exemple. Signalons que la réalisation de ce programme présente cependant des difficultés techniques supplémentaires par rapport à la dimension finie, voir [13], chapitre 5, pages 5 à 25.

5. Inégalité a priori dans les espaces $\mathcal{K}_{k,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$.

Nous donnons d'abord un résultat qui améliore le lemme de [12].

PROPOSITIONS. - Soit $\pi_s = \operatorname{op}((1 + \|z\|^2)^{s/2})$ (avec les notations de [12]), $a(x) \in C_b^\infty(E, \mathcal{L}(F, G))$, F et G sont des espaces de Hilbert. $[\pi_s, a]$ applique continûment $\mathcal{E}^\sigma \otimes F \longrightarrow \mathcal{E}^{\sigma-s+1} \hat{\otimes} G$, $\forall \sigma, s$.

Démonstration. - Soit d'abord $s < 0$, on a

$$\pi_{-s} = \int_0^{+\infty} \int \exp(-\lambda)\, \lambda^{-1+(s/2)} \frac{d\lambda}{\Gamma(s/2)}\, \tau_y\, d\nu_\lambda'(y)\, d\lambda ,$$

$$\tau_y u = u(x + 2y) \exp(- x\bar{y} - \tfrac{1}{2}\bar{y}^2 - |y|^2) ,$$

$$(\pi_{-s} a - a\pi_{-s})u = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\, \lambda^{-1+(s/2)} \frac{d\lambda}{\Gamma(s/2)} \int (a(x + 2y) - a(x))\tau_y u\, d\nu_\lambda' , \quad u \in B^\infty_{cyl} \otimes F,$$

$$a(x + 2y') - a(x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq N-1} \frac{a^{(\alpha)}(x) . y'^\alpha}{\alpha!} + a^N(x, y') , \quad x \in E , \quad y \in X^c ,$$

avec $a^{(\alpha)}(x) = (\partial/\partial x)^\alpha a(x)$, $a^N(x, y') = \int_0^1 \frac{(1-u)^{N-1}}{(N-1)!} a^{(N)}(x + 2uy')(2y')^N du$.

On note, dans tous ces calculs, que les intégrales sont définies au sens de Bochner (à valeur dans L^2_ν) pour u fixée dans $B^\infty_{cyl} \otimes F$.

Posons

$$A_\alpha\, u = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)} \frac{d\lambda}{\Gamma(s/2)} \int (2y')^\alpha\ \tau_y\, u\ d\nu'_\lambda\ .$$

On note que $A_\alpha\, u$ est associé au symbole $(i^{-1}\ (\partial/\partial\xi)^\alpha\ (1 + \|z\|^2)^{-s/2})$, donc

$$\|A_\alpha\, u\|^2_{\mathfrak{L}^\sigma \hat{\otimes} F} \leqslant C \int \|\hat{\varphi}(z)\|_F^2\ (1 + \|z\|^2)^\sigma\ |A_\alpha(\bar{z}\ ,\ z)|^2\ d\nu(z)\ ,$$

et, comme $|A_\alpha(\bar{z}\ ,\ z)| \leqslant (C/a^\alpha)(1 + \|z\|^2)^{-(s/2)-(|\alpha|/2)}$, on déduit

$$\|A_\alpha\, u\|^2_{\mathfrak{L}^\alpha \hat{\otimes} F} \leqslant (C/a^{2\alpha})\ \|u\|^2_{\sigma-s-|\alpha|}\ ,$$

c'est-à-dire $(A_\alpha\, u) \in \mathfrak{L}^\sigma \hat{\otimes} F \hat{\otimes} \widehat{\odot}_j X$.

Comme $a^{(\alpha)}(x) \in C_b^\infty(E\ ,\ \mathfrak{L}(F\ ,\ G))$, on définit une application

$$a(x)\ :\ (\xi_\alpha) \in F \hat{\otimes} \widehat{\odot}_j X \longrightarrow a(x)\xi = \sum_{|\alpha|=j} \frac{a^{(\alpha)}(x).\xi_\alpha}{\alpha!} \in G\ ,$$

et $a(x) \in C_b^\infty(E\ ,\ \mathfrak{L}(F \hat{\otimes} \widehat{\odot}_j X\ ,\ G))$ car , $k \in E$,

$$\|D^p\ a(x).k(\xi_\alpha)\|_G$$
$$\leqslant C \sum_{|\alpha|=j} \|D^p\ a^{(\alpha)}(x).k\|_{\mathfrak{L}(F,G)}\ \|\xi_\alpha\|_F \leqslant C\|k\|^p (\sum_{|\alpha|=j} \|\xi_\alpha\|_F^2)^{1/2}\ .$$

D'après un résultat de [11], on a

$$\|\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant N-1} a^{(\alpha)}(x).A_\alpha\, u\|_\sigma \leqslant C\ \|u\|_{\sigma-s-1}\ ,\quad \forall\ \sigma \in \underset{\sim}{R}\ .$$

Il suffit donc d'étudier le reste

$$R_N\, u = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)} \frac{d\lambda}{\Gamma(s/2)} \int a^N(x\ ,\ y')\ \tau_y\, u\ d\nu'_\lambda\ .$$

On constate que $a^N(x\ ,\ y') \in C^\infty(E \times X\ ,\ \mathfrak{L}(F\ ,\ G))$, avec

$$\|D_x^\ell\ \partial_y^\ell\ a^N(x\ ,\ y').h\|_{\mathfrak{L}(F,G)} \leqslant C\ \|h\|^\ell\ |y|^{(N-|\lambda|)_+}\ (1 + |y|)^{m_1}\ ,$$

pour $h \in E$, $y \in X$.

L'opérateur R_N^* est de la même forme, avec la fonction

$$a'(x\ ,\ y') = a^*(x + 2y'\ ,\ -y')\ .$$

Il est clair que $a'(x\ ,\ y')$ vérifie des conditions analogues à celles de a . On va prouver que R_N est continu de $\mathfrak{L}^\sigma(E\ ,\ F)$ dans $\mathfrak{L}^{\sigma+N}(E\ ,\ G)$, pour $\sigma \in \underset{\sim}{N}$. On étudie donc

$$\sum_{|\alpha|\leqslant\sigma+N} \int \frac{\|\partial^\alpha(R_N\, u)\|_G^2}{a^{2\alpha}}\ d\nu(x)\ .$$

Soit

$$\partial^\alpha(R_N\, u) = \sum_{\alpha=\beta+\gamma} \frac{\alpha!}{\beta!\ \gamma!} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)}\ d\lambda \int \partial^\beta\ a(x\ ,\ y')\ \partial^\gamma(\tau_y\, u)\ d\nu'_\lambda\ ,$$

$$\partial^\gamma(\tau_y u) = \begin{cases} \partial^\gamma(\tau_y u) \ , \text{ si } |\gamma| \leq \sigma \\ \sum_{\gamma=\gamma'+\gamma'', |\gamma'|=\sigma} \frac{\gamma!}{\gamma'!\ \gamma''!} C_{\sigma,|\gamma|}\ \partial^{\gamma''}(\partial^{\gamma'}(\tau_y u)) \end{cases}$$

$$= C_{\sigma,|\gamma|} \sum_{\substack{\gamma=\gamma''+\eta+p \\ |\eta|+|p|=\sigma}} \frac{\gamma!}{\gamma''!\ \eta!\ p!} (-1)^{|p|}\ \partial^{\gamma''}(\tau_y(\partial^\eta u))\bar{y}^p \ , \text{ si } |\gamma| > \sigma$$

Comme $\partial^\gamma\ \tau_y\ u$ est associé à $(i\bar{z})^\gamma \exp(i(\bar{z}y + z\bar{y}))$, $\partial^\gamma\ \tau_y\ u = (\partial/\partial y)^\gamma\ (\tau_y\ u)$. Donc, pour $|\gamma| > \sigma$, on peut écrire

$$\partial^\gamma(\tau_y\ u) = \sum_{\gamma=\gamma''+\eta+p, |\eta|+|p|=\sigma} C_{\gamma,p,\eta}\ \partial_y^{\gamma''}(\tau_y(\partial^\eta u))\ \bar{y}^p \ .$$

D'où

$$\sum_{|\alpha|\leq\sigma+N} \int \frac{\|\partial^\alpha R_N u\|_G^2}{a^{2\alpha}} d\nu$$

$$\leq C \int \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|<\sigma+N \\ |\gamma|<\sigma}} \frac{d\nu(x)}{a^{2(\beta+\gamma)}} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)}\ d\lambda \int \|\partial^\gamma(\tau_y\ u)\|^2\ d\nu'_\lambda$$

$$+ \int d\nu(x) \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma|\leq\sigma+N \\ |\gamma|>\sigma}} \frac{1}{a^{2(\beta+\gamma)}} \left\|\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)}\ d\lambda \int \partial^\beta a\ \partial^\gamma(\tau_y u)\ d\nu'_\lambda\right\|_G^2 .$$

Pour le 1er terme désigné par I , on a

$$I \leq C \sum_{|\gamma|<\sigma} \frac{1}{a^{2\gamma}} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda)\ \lambda^{-1+(s/2)}\ d\lambda \int \|\partial^\gamma\ \tau_y\ u\|^2_{L^2_\nu(E,G)}\ d\nu'_\lambda(y) \leq C\ \|u\|_\sigma^2 .$$

$$II \leq C \sum_{\mathcal{U}} \frac{1}{a^{2(\beta+\gamma''+\eta+p)}} \int d\nu(x) \left\|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\ \lambda^{-1+\frac{\sigma}{2}}\ d\lambda \int \partial_x^\beta\ a(x,y')\ \partial^{\gamma''}(\tau_y(\partial^\eta u))\bar{y}^p\, d\nu'_\lambda\right\|_G^2$$

où $\mathcal{U} = \{(\beta\ ,\ \gamma''\ ,\ \eta\ ,\ p)$ avec $|\beta| + |\gamma''| + |\eta| + |p| \leq \sigma + N\ ,\ |\eta| + |p| = \sigma\}$,

et

$$II \leq C \sum_{\mathcal{U}} \frac{1}{a^{2(\beta+\delta+\theta+\eta+p)}} \int d\nu(x) \left\|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^{-1+\frac{s}{2}} d\lambda \int \partial_x^\beta \partial_y^\theta a(x,y')\tau_y(\partial^\eta u)\bar{y}^p \lambda^{-|\delta|} a^{2\delta}\bar{y}^\delta d\nu'_\lambda\right\|_G^2 ,$$

où $\mathcal{U} = \{(\beta\ ,\ \delta\ ,\ \theta\ ,\ \eta\ ,\ p)$ avec $|\beta| + |\delta| + |\theta| + |\eta| + |p| \leq \sigma + N$, $|\eta| + |p| = \sigma\}$.

Sommant d'abord en δ , on obtient, en posant

$$\mathcal{U}'' = \{(\beta,\theta,\eta,p);\ |\beta|+|\theta|+|\eta|+|p|\leq\sigma+N,\ |\eta|+|p|=\sigma, \text{ on posera } r=|\beta|+|\theta|+\sigma\} ,$$

$$II \leq C \sum_{\mathcal{U}''} \frac{1}{a^{2(\beta+\theta+\eta+p)}} \sum_{\upsilon\leq|\delta|\leq\sigma+N-r} \int d\nu(x)$$

$$\times \left\|\int d\nu'(y)\ a^\delta\ \bar{y}^\delta \int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\ \lambda^{-1+\frac{s}{2}}\ \partial_x^\beta\ \partial_y^\theta\ a(x\ ,\ \lambda^{\frac{1}{2}}\ y')\ \tau_{\lambda^{\frac{1}{2}}y}(\partial^\eta\ u)\ \lambda^{-\frac{|\delta|}{2}+\frac{|p|}{2}}\ \bar{y}^p\ d\lambda\right\|_G^2 .$$

Et donc

$$\text{II} \leqslant C \sum_{\mathcal{U}''} \frac{1}{a^{2(\beta+\theta+\eta+\rho)}} \sum_{n=0}^{\sigma+N-r}$$

$$\times \int d\nu'(y) \, \| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^{-1+\frac{s}{2}} \partial_x^\beta \partial_y^\theta a(x, y^{\frac{1}{2}} y') \, \tau_{y^{\frac{1}{2}} y} (\partial^\eta u) \, \lambda^{-\frac{|\delta|}{2}+\frac{\rho}{2}} \bar{y}^\rho \, d\lambda \|^2_{L^2_\nu(E,G)} .$$

Soit

$$\text{II} \leqslant C \sum_{\mathcal{U}''} \frac{1}{a^{2(\beta+\theta+\eta+\rho)}} \sum_{n=0}^{\sigma+N-r} \int d\nu'(y)$$

$$\times \left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \lambda^{-1+\frac{s}{2}} |y'|^{N-|\theta|} \, \|\tau_{\lambda^{\frac{1}{2}} y} (\partial^\eta u)\|_{L^2_\nu(E,F)} \, (1+|\lambda|)^m \, (1+|y|^2)^{m'} \, \lambda^{-\frac{n}{2}+\frac{\rho}{2}+N-\frac{|\theta|}{2}} d\lambda \right|^2 .$$

Comme $\eta + |\theta| \leqslant N$, on voit facilement que

$$\text{II} \leqslant C \sum_{|\eta| \leqslant \sigma} \frac{1}{a^{2\eta}} \int_0^{+\infty} \int \varphi(\lambda) \, \|\tau_{\lambda^{\frac{1}{2}} y} (\partial^\eta u)\|^2_{L^2_\nu(E,F)} \, (1 + |y|^2)^{m''} \, d\nu'(y) \, d\lambda ,$$

avec $\varphi(\lambda) \in L^1_\lambda(]0, \infty[)$.

Soit

$$\text{II} \leqslant C \sum_{|\eta| \leqslant \sigma} \frac{1}{a^{2\eta}} \|\partial^\eta u\|^2_{L^2_\nu(E,F)} \leqslant C \|u\|^2_\sigma .$$

On a donc bien prouvé $\|R_N u\|_{\sigma+N} \leqslant C \|u\|_\sigma$, pour $\sigma \in \underset{\sim}{N}$. Si on choisit N tel que $N \geqslant s + 1$, on voit que

$$\|a\pi_{-s} u - \pi_{-s} au\|_{\sigma+s+1} \leqslant C \|u\|_\sigma ,$$

pour $\sigma \in \underset{\sim}{N}$, et ensuite pour $\sigma \in \underset{\sim}{R}$, par interpolation et transposition. Donc

$$[\pi_s , a] : \mathcal{E}^s \longrightarrow \mathcal{E}^{\sigma-s+1} ,$$

si $s \in \underset{\sim}{R}_-$. Soit maintenant $s \in \underset{\sim}{R}$ quelconque . $s = 2k + s'$, $s' < 0$, $\pi_s = \pi_{2k} \circ \pi_{s'} + R_{s-1}$ et

$$\pi_s a - a\pi_s = \pi_{2k}(- a\pi_{s'} + \pi_{s'} a) - [a , \pi_{2k}]\pi_{s'} + R_{s-1} a - aR_{s-1} ,$$

et donc

$$[\pi_s , a] : \mathcal{E}^\sigma \hat{\otimes} F \longrightarrow \mathcal{E}^{\sigma-s+1} \hat{\otimes} G , \text{ pour } \sigma \text{ et } s \in \underset{\sim}{R} .$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Soit I_0 un intervalle compact de $]0 , \infty[$, K un compact de E , I' et $\mathcal{U}$ les voisinages de I_0 et K donnés par le théorème I.1. On désigne par I'' et $\mathcal{U}''$ des voisinages de I_0 et K tels que $I'' \times \mathcal{U}'' \subset I' \times \mathcal{U}$, et tels qu'il existe $\varphi \in C^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset I' \times \mathcal{U}$. $\varphi \equiv 1$ au voisinage de $I'' \times \mathcal{U}''$. Soit $u \in HSC^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, $\operatorname{supp} u \subset I'' \times \mathcal{U}''$. On considère $v = \varphi\pi_s u$, $v \in C^\infty_0(\underset{\sim}{R} , \mathcal{E}^M)$, $\forall M \in \underset{\sim}{N}$. Si I est un intervalle compact de $\underset{\sim}{R}$, $M \in \underset{\sim}{N}$, $v \in C^\infty(I , \mathcal{E}^M)$, il existe une suite $\alpha_n \in C^\infty_0(\underset{\sim}{R}) \otimes HSC^\infty_0(E)$ telle que

$$\sup_{t\in I} \|D_t^j v - D_t^j \alpha_n\|_M \longrightarrow 0 , \text{ pour } 0 \leqslant j \leqslant m ,$$

comme il est facile de le voir. Ceci permet, après un passage à la limite, d'appliquer le théorème I.1 à $v = \varphi\pi_s u$.

Posons

$$\|u\|^2_{k,s} = \sum_{\ell=0}^{k} \int_0^{+\infty} \|D_t^{k-\ell} u\|^2_{s+\ell}\, dt \ , \text{ pour } u \in HSC^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E) \ .$$

THÉORÈME I.2. - Soit I_0 un intervalle de $[0\ ,\ +\infty[$, K un compact de E , il existe I' et $\mathcal{U}$ des voisinages ouverts de I_0 et K tels que, $\forall\ s \in \underset{\sim}{R}$, $\forall\ k \in \underset{\sim}{N}$, il existe $C > 0$, avec $u \in HSC^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, $\operatorname{supp} u \subset I' \times \mathcal{U}$, entraîne

$$\|u\|_{k+M-1,s} \leq C\ \|Pu\|_{k,s} \ .$$

Nous sommes donc conduits à étudier brièvement un espace $\mathcal{K}_{k,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$ dans lequel le théorème I.2 montre qu'on obtiendra des solutions.

6. Espaces $\mathcal{K}_{k,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$.

On notera $\mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}\ ,\ \mathcal{E}^{-\infty})$ les opérateurs continus linéaires $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \longrightarrow \mathcal{E}^{-\infty}(X\ ,\ E)$. Pour $u \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}\ ,\ \mathcal{E}^{-\infty})$, on note $\hat{u} \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}\ ,\ \mathcal{E}^{-\infty})$ défini par

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}) \in \mathcal{E}^{-\infty} \ , \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \ .$$

Définition. - Soient $m\ ,\ s \in \underset{\sim}{R}$. $\mathcal{K}_{k,s}(\underset{\sim}{R} \times E) = \{u \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}\ ,\ \mathcal{E}^{-\infty})\ ;\ \hat{u}(\tau)$ est représenté par une fonction $d\tau$-mesurable et localement intégrable à valeurs dans $\mathcal{E}^{s+m}$ et telle que

$$\Phi(\tau\ ,\ z) = \exp(\tfrac{1}{2} z^2)\ \mathcal{F}(\hat{u}(\tau)\nu)(z) = \theta(\hat{u}(\tau))(z) \in \Lambda^{s+m}$$

vérifie

$$\iint |\Phi(\tau\ ,\ z)|^2\ (1 + \tau^2 + \|z\|^2)^m\ (1 + \|z\|^2)^s\ d\nu(z)\ \frac{d\tau}{2\pi} < +\infty \ .$$

Utilisant l'isomorphisme de Λ^{s+m} sur $\mathcal{E}^{s+m}$, on a associé à $u \in \mathcal{K}_{m,s}$ une fonction $d\tau$-mesurable et localement intégrable à valeurs dans Λ^{s+m} , donc dans $L^2_{\nu(1+\|z\|^2)^{s+m}}$. On associe donc à $u \in \mathcal{K}_{m,s}$ une unique classe $g(\tau\ ,\ z)$ de fonctions $(d\tau \otimes \nu)$-mesurables qui est dans $L^2(\underset{\sim}{R} \times E^c\ ,\ \mu_{ms})$, avec $\mu_{ms} = (1 + \tau^2 + \|z\|^2)^m\ (1 + \|z\|^2)^s\ (d\tau/2\pi) \otimes \nu$, telle que, $d\tau$-presque-partout, $z \longrightarrow \tilde{g}(\tau\ ,\ z)$ coïncide, ν-presque-surement, avec une fonction de la classe $\theta(\hat{u}(\tau))$ (pour un représentant $\tilde{g}$ arbitraire de g). Réciproquement à $g(\tau\ ,\ z) \in L_{m,s} = L^2(\underset{\sim}{R} \times E^c\ ,\ \mu_{m,s})$ telle que, $d\tau$-presque-partout, $g(\tau\ ,\ z) \in \Lambda^{s+m}$ on fait correspondre $u \in \mathcal{K}_{m,s}$ défini par $\hat{u}(\tau) = \theta^{-1}(g(\tau\ ,\ z))$, $d\tau$-presque-partout.

PROPOSITION 6.1. - $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$, muni de la norme $\|u\|_{m,s} = \|\Phi(\tau\ ,\ z)\|_{L_{m,s}}$, est un espace hilbertien.

Démonstration. - Vu ce qui précède, il suffit de voir que le sous-espace de $L_{m,s}$ formé par les $\Phi(\tau\ ,\ z)$ telles que, $d\tau$-presque-partout, $\Phi(\tau\ ,\ z) \in \Lambda^{s+m}$, est un sous-espace fermé. Si $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ dans $L_{m,s}$, on détermine une sous-suite n_j , N , $d\tau$-négligeable, tel que $\tau \notin N$ entraîne $\Phi_{n_j}(\tau\ ,\ .) \longrightarrow \Phi(\tau\ ,\ .)$ dans

$L^2_{\nu(1+\|z\|^2)^{s+m}}(E^c)$ (car $L_{m,s} \subset L^2_{(1+|\tau|^2)^{1+|m|}}(\underset{\sim}{R}, L^2_{\nu(1+\|z\|^2)^{s+m}}(E^c))$. Donc $\tau \notin N'$ entraîne $\Phi(\tau, \circ) \in \Lambda^{s+m}$ (qui est fermé dans $L^2_{\nu(\ )^{s+m}}$), où N' est encore $d\tau$-négligeable.

PROPOSITION 6.2. – <u>soit</u> $m \in \underset{\sim}{N}$.

$$\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E) = \{u \in \mathcal{S}'(\underset{\sim}{R}, \mathcal{E}^{-\infty}) \ ; \ D_t^{m-j} u \in L^2(\underset{\sim}{R}, \mathcal{E}^{s+j}) \ , \ 0 \leq j \leq m\} .$$

PROPOSITION 6.3. – <u>Soit</u> $g \in L_{m,s}$. <u>L'application</u> $\mathrm{Id} \hat{\otimes} \pi$ <u>sur</u> $L^2_{(1+|\tau|^2)^{-m}}(\underset{\sim}{R}, L^2_{\nu(\ )^{s+m}}(E^c))$ <u>permet de définir</u> πg, <u>elle détermine une application continue de</u> $L_{m,s} \longrightarrow L_{m,s}$ <u>notée</u> $g \longrightarrow \pi g$.

<u>Démonstration</u>. – πg est bien définie dans $L^2_{(1+|\tau|^2)^{-m}}(\underset{\sim}{R}, L^2_{\nu(\ )^{s+m}})$. Il s'agit de prouver que $\pi g \in L_{m,s}$.

Soit d'abord $m \in \underset{\sim}{N}$, soit

$$\tau^{m-j} g(\tau) \in L^2(\underset{\sim}{R}, L^2_{\nu(\ )^{s+j}}) \simeq L^2(\underset{\sim}{R}) \hat{\otimes} L^2_{\nu(\ )^{s+j}} ,$$

donc la continuité de $\pi : L^2_{\nu(\ )^{s+j}} \longrightarrow L^2_{\nu(\ )^{s+j}}$ entraîne

$$\int \tau^{2(m-j)} \|\pi g\|^2_{s+j} \, d\tau \leq C_{s,j} \int \tau^{2(m-j)} \|g(\tau)\|^2_{s+j} \, d\tau .$$

Soit $\|\pi g\|_{m,s} \leq C_{m,s} \|g\|_{m,s}$, pour $m \in \underset{\sim}{N}$, $s \in \underset{\sim}{R}$.

Procédant par interpolation, on obtient cette inégalité pour $m \in \underset{\sim}{R}^+$, $s \in \underset{\sim}{R}$. Le dual de l'espace $L_{m,s}$ étant $L_{-m,-s}$ pour le produit de dualité issu du produit scalaire de $L^2_{d\nu\otimes\nu}(\underset{\sim}{R} \times E^c)$, on obtient par transposition un opérateur $\pi^* : L_{-m,-s} \longrightarrow L_{-m,-s}$, mais, comme π est auto-adjoint dans $L_{0,0} = L^2_{d\tau\otimes\nu}$, π est continu de $L_{m,s} \longrightarrow L_{m,s}$, $\forall\ m, s \in \underset{\sim}{R}$.

L'image de $L_{m,s}$ par π est isomorphe à l'espace $\mathcal{K}_{m,s}$.

<u>Remarque</u>. – $\mathcal{K}_{m_2,s_2} \subset \mathcal{K}_{m_1,s_1}$, si $m_2 \geq m_1$ et $m_2 + s_2 \geq m_1 + s_1$.

COROLLAIRES.

1° <u>Comme</u> $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes \mathrm{Pol}_{cyl}(E^c)$ <u>est dense dans</u> $L_{m,s}$, <u>on en déduit que</u> $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes \mathrm{Pol}_{cyl}(E)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{K}_{m,s}$, <u>puis, que</u> $C_0^\infty(\underset{\sim}{R}) \otimes B^\infty_{cyl}(E)$ <u>est dense dans</u> $\mathcal{K}_{m,s}$.

2° <u>Le dual de</u> $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$ <u>s'identifie à</u> $\mathcal{K}_{-m,-s}(\underset{\sim}{R} \times E)$ <u>dans la dualité</u> $(L^2_{dt\otimes\nu}(x), L^2_{dt\otimes\nu}(x))$.

Par ailleurs, un élément $v \in \mathcal{K}_{-m,-s}(\underset{\sim}{R} \times E)$ définit une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes B^\infty_{cyl}$ par $u(t, x) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes B^\infty_{cyl} \longrightarrow (v, u)$ obtenue par la forme bilinéaire $(v, \alpha(t)\beta(x)) = \langle (v, \alpha)_\nu, \beta \rangle_{B'_{cyl} \times B_{cyl}}$ sur $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \times B^\infty_{cyl}$. Si $u \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes B^\infty_{cyl}$, $v \in \mathcal{K}_{-m,-s}$, la forme bilinéaire de dualité $\mathcal{K}_{m,s} \times \mathcal{K}_{-m,-s}$ s'exprime également par $(v, \bar{u})$. L'application

$$v(\tau) \in L^2_{(1+|\tau|^2)^m}(\underset{\sim}{R}) \overset{\lambda}{\longmapsto} \psi(\theta) = 2\pi^{-1}\int e^{\tau\theta}\, v(\tau)\, e^{-\frac{1}{2}\tau^2}\, d\tau = e^{\frac{1}{2}\theta^2}\,(vxe^{-\frac{1}{2}\tau^2})(\theta)$$

est continue de $L^2_{(1+|\tau|^2)^m}(\underset{\sim}{R}) \longrightarrow \Lambda^m(\underset{\sim}{R})$, et est injective. On en deduit une injection continue de $\lambda \hat{\otimes} \mathrm{Id}$ de $L^2_{(1+|\tau|^2)^m}(\underset{\sim}{R}\, ,\, \Lambda^s(E))$ dans $\Lambda^m(\underset{\sim}{R}) \hat{\otimes} \Lambda^s(E)$.

Or $\Lambda^m(\underset{\sim}{R}) \hat{\otimes} \Lambda^s(E)$, considéré comme un sous-espace vectoriel de $L^2_{(1+|\theta|^2)^m(1+\|z\|^2)^s d\nu(\theta)\otimes d\nu(z)}(\underset{\sim}{C} \times E^c)$, s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\Lambda^{-s-|m|}(\underset{\sim}{R} \times E)$.

Soit $u \in \mathcal{K}_{m,s}$, $v(\tau) = \Phi(\tau) = \theta(\hat{u}(\tau)) \in L^2_{(1+\tau^2)^{-|m|}}(\underset{\sim}{R}\, ,\, \Lambda^{s+m})$. Donc $\int \Phi(z)\, \exp(-\frac{1}{2}\tau^2 + \tau\theta)\, \frac{d\tau}{2\pi}$ appartient à $\Lambda^{-|s|-|2m|}(\underset{\sim}{R} \times E)$. Mais

$$\begin{aligned}\psi(\theta\, ,\, z) &= \int \Phi(\tau)(z)\, \exp(-\tfrac{1}{2}\tau^2 + \tau\theta)\, \frac{d\tau}{2\pi} \\ &= \exp(\tfrac{1}{2} z^2) \int (\hat{u}(\tau)\, ,\, \exp(-\, ixz))\, \exp(-\tfrac{1}{2}\tau^2 + \tau\theta)\, \frac{d\tau}{2\pi} \\ &= \exp(\tfrac{1}{2}(\theta^2 + z^2))\, (u\, ,\, \exp(-\tfrac{1}{2} t^2 - it\theta)\, \exp(-\, ixz)),\end{aligned}$$

ce qui montre que $u \in \mathcal{E}^{-|s|-|2m|}(\underset{\sim}{R} \times E)$. Il faut noter maintenant que $u \in \mathcal{K}_{m,s}$ considéré comme élément de $\mathcal{E}^{-\infty}(\underset{\sim}{R} \times E)$ agit sur $\varphi(t\, ,\, x) \in HSC_b^\infty(\underset{\sim}{R} \times E)$ par

$$(u\, ,\, \varphi)_{\mathcal{E}^{-\infty}\ \mathcal{E}^{+\infty}} = (u\, ,\, \varphi(t\, ,\, x)\, \exp(-\tfrac{1}{2} t^2))_{\mathcal{K}_{m,s}\ \mathcal{K}_{-m,-s}} .$$

Au titre d'élément de $\mathcal{E}^{-\infty}(\underset{\sim}{R} \times E)$, on peut définir, pour $u \in \mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$, un support qui est un fermé de $\underset{\sim}{R} \times E$, voir [12]. On peut ainsi noter la propriété suivante.

PROPOSITION 6.4. - <u>Soit</u> $u \in \mathcal{K}_{m,s}$, I <u>et</u> F <u>des fermés de</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>et</u> E . $\mathrm{supp}\, u \subset I \times F$ <u>si, et seulement si</u>

- <u>le support de</u> u <u>comme distribution</u> $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \longrightarrow \mathcal{E}^{s+m}(E)$ <u>est contenu dans</u> I ;
- u <u>applique</u> $\mathcal{S}(\underset{\sim}{R})$ <u>dans</u> $\mathcal{E}_F^{s+m}(E) = \{v \in \mathcal{E}^{s+m}(E)\ ;\ \mathrm{supp}\, v \subset F\}$.

<u>Définition</u>. - On définit

$$\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^+ \times E) = \mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)/\{u \in \mathcal{K}_{m,s}\ ;\ \mathrm{supp}\, u \subset \overline{\underset{\sim}{R}^-}\} .$$

$\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^+ \times E)$ est un espace hilbertien dans lequel $C_0^\infty(\overline{\underset{\sim}{R}^+}) \otimes B_{cyl}^\infty(E)$ est dense.

PROPOSITION 6.5. - <u>Si</u> $m \in \underset{\sim}{N}$, <u>on peut identifier isométriquement</u> $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^+ \times E)$ <u>avec</u> $\tilde{\mathcal{K}}_{m,s} = \{u\ ;\ \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^+) \longrightarrow \mathcal{E}^{-\infty}$, <u>telles que</u> $D_t^{m-j} u \in L^2(\underset{\sim}{R}^+\, ,\, \mathcal{E}^{s+j}(E))$, $0 \leq j \leq m\}$.

<u>Démonstration</u>. - Il est clair que $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^+ \times E) \subset \tilde{\mathcal{K}}_{m,s}$. Pour la réciproque, on prouve d'abord la densité de $C_0^\infty(\underset{\sim}{R}^+\, ,\, \mathcal{E}^{s+m}) = \{$restrictions à $\underset{\sim}{R}^+$ des fonctions de $C_0^\infty(\underset{\sim}{R}\, ,\, \mathcal{E}^{s+m})\}$ dans $\tilde{\mathcal{K}}_{m,s}$, on utilise ensuite l'opérateur de prolongement usuel.

PROPOSITION 6.6.

1° <u>L'espace</u> $C_0^\infty(\underset{\sim}{R}^+) \otimes B_{cyl}^\infty(E)$ <u>est dense dans</u>

$$\mathcal{K}^{o}_{m,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{+} \times E) = \{u \in \mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E) \ , \quad \operatorname{supp} u \subset \overline{\underset{\sim}{R}}^{+}\} \ .$$

2° <u>Le dual de</u> $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^{+} \times E)$ <u>est</u> $\mathcal{K}^{o}_{-m,-s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{+} \times E)$, <u>pour l'extension de la forme bilinéaire</u> $\iint u(x , t)\, v(x , t)\, d\nu(x)\, dt$, <u>avec</u> $u \in C_0^{\infty}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{+}) \otimes B^{\infty}_{cyl}$, $v \in C_0^{\infty}(\underset{\sim}{R}^{+}) \otimes B^{\infty}_{cyl}$.

<u>Démonstration</u>. - Pour le 1er point, on utilise

$$\tau_h\, u = u(t - h) \in \mathcal{K}_{m,s} \ , \text{ pour } \ u \in \mathcal{K}_{m,s} \ .$$

Les $\tau_h\, u$ forment un ensemble borné d'opérateurs $\mathcal{K}_{m,s} \longrightarrow \mathcal{K}_{m,s}$,

$$\operatorname{supp} \tau_h\, u \subset \{t \geqslant h\} \ , \text{ pour } \ u \in \mathcal{K}^{o}_{m,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{+} \times E) \ ,$$

$\tau_h\, u \longrightarrow u$ sur le sous-espace dense $C_0^{\infty}(\underset{\sim}{R}) \otimes B^{\infty}_{cyl}$ de $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$.

Pour le 2e point, il suffit de voir que, dans la dualité $\mathcal{K}_{m,s}$, $\mathcal{K}_{-m,-s}$, le polaire de $\mathcal{K}^{o}_{m,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{-} \times E)$, est $\mathcal{K}^{o}_{-m,-s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^{+} \times E)$, ce qui résulte facilement du 1er point.

On va maintenant étudier l'action d'opérateurs sur $\mathcal{K}_{m,s}$.

<u>Définition</u>. - Soit F un espace hilbertien. On définit l'espace $HSC^{\infty}_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E , F)$ comme $\{\varphi(t , x) : \underset{\sim}{R} \times E \longrightarrow F$, $(\underset{\sim}{R} \times X)$-$C^{\infty}$ à support compact en t , $(dt \otimes \nu)$-Lusin mesurables ainsi que leurs dérivées $\partial_t^p\, \partial_x^j\, \varphi : \underset{\sim}{R} \times E \longrightarrow \widehat{\odot}_j X \widehat{\otimes} F$, avec $\sup_{t,x} \|\partial_t^p\, \partial_x^j\, \varphi\|_{\widehat{\odot}_j X \widehat{\otimes} F} < + \infty\}$.

A un élément de $HSC^{\infty}_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E , F)$ est associé un élément de $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E) \widehat{\otimes} F$ par $\varphi(t , x) = \sum_i \varphi_i(t , x) e_i$ (e_i base hilbertienne de F).

A $\varphi_i(t , x) \in HSC^{\infty}_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, on associe un élément φ_i de $\mathcal{K}_{m,s}$, $\forall\, m , s$, et l'on a

$$\sum_i \|\varphi_i\|^2_{m,s} < + \infty \ ,$$

à cause de l'hypothèse. L'image de $HSC^{\infty}_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E , F)$ est dense dans $\mathcal{K}_{m,s} \otimes F$, $\forall\, m , s \in \underset{\sim}{R}$.

PROPOSITION 6.7. - <u>Soit</u> $a(t , x) \in C_b^{\infty}(\underset{\sim}{R} \times E , \mathcal{L}(F , G))$, F , G <u>espaces de Hilbert</u>.

$$\varphi(t , x) \in HSC^{\infty}_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E , F) \longrightarrow a(t , x)\varphi$$

<u>se prolonge en une application continue</u> $\mathcal{K}_{m,s} \widehat{\otimes} F \longrightarrow \mathcal{K}_{m,s} \widehat{\otimes} G$.

<u>Démonstration</u>. - Il s'agit de prouver une inégalité $\|a\varphi\|_{m,s} \leqslant C \|\varphi\|_{m,s}$. D'abord $m \in \underset{\sim}{N}$,

$$D_t^j(a\varphi) = \sum_{\ell+k=j} \frac{j!}{\ell!\, k!}\, D_t^k\, a .\, D_t^{\ell}\, \varphi \ ,$$

et l'on a

$$\|D_t^{\ell}\, a . D_t^k\, \varphi\|_{s+m-j} \leqslant C \|D_t^k\, \varphi\|_{m-k+s} \ , \quad \forall\, t \in \underset{\sim}{R} \ .$$

D'où par prolongement continu, on a une application $\mathcal{K}_{m,s} \widehat{\otimes} F \longrightarrow \mathcal{K}_{m,s} \widehat{\otimes} G$, puis, procédant par interpolation sur m et par transposition, on obtient le résultat pour m et $s \in \underset{\sim}{R}$.

On note que l'opérateur défini ainsi coïncide avec l'opérateur qui à $u \in L^2(\underset{\sim}{R}, \mathcal{E}^{s+m} \hat{\otimes} F)$ associe $(au)(t) = a(t, .)u(t) \in L^2(\underset{\sim}{R}, \mathcal{E}^{s+m} \hat{\otimes} G)$.

PROPOSITION 6.8. – Les opérateurs $D_t^\ell : \mathcal{K}_{m,s} \longrightarrow \mathcal{K}_{m,s-\ell} \hat{\otimes} \widehat{\odot}_\ell E$, $\operatorname{div}_\ell : \mathcal{K}_{m,s} \hat{\otimes} \widehat{\odot}_\ell E' \longrightarrow \mathcal{K}_{m,s-\ell}$ et $D_t^k : \mathcal{K}_{m,s} \longrightarrow \mathcal{K}_{m-k,s}$ sont continus. Ainsi $P(x, D) = \operatorname{div}_p a_{pq}(x, t) D_x^q D_t^{m-j}$ applique $\mathcal{K}_{\sigma,\tau} \longrightarrow \mathcal{K}_{\sigma-m+j,\tau-j}$, lorsque $p + q = j$.

7. Théorèmes d'existence et d'unicité dans $\mathcal{K}_{m,s}$.

On reprend une méthode de [6] pour prouver un résultat d'existence. Soit I_0 un intervalle compact de $[0, \infty[$ et K un compact de E. Appliquant le théorème I.2 avec I_0, K, $k' = 0$, $s' = 1 - m - k - s$, on trouve des voisinages ouverts I' et $\mathcal{U}$ de I_0 et K, et une constante $C > 0$ tels que

$$u \in HSC_{0,b}^\infty(\underset{\sim}{R} \times E), \quad \operatorname{supp} u \subset I' \times \mathcal{U} \Longrightarrow \|u\|_{m-1,1-m-k-s} \leq C \|Pu\|_{0,1-m-k-s}$$

(normes dans $\mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R}^+ \times E)$).

Soit $|(f, u)| \leq C \|Pu\|_{0,1-m-k-s}$, pour $f \in \mathcal{K}_{k,s}^o(\underset{\sim}{\overline{R}}^+ \times E)$.

Le théorème de Hahn Banach et la proposition 6.6 montrent qu'il existe $w \in \mathcal{K}_{k,s}^o(\underset{\sim}{\overline{R}}^+ \times E)$ tel que

$$(P^* w, u) = (f, u), \quad \forall u \in HSC_{0,b}^\infty, \quad \operatorname{supp} u \subset I' \times \mathcal{U},$$

et donc $P^* w = f$ sur $I' \times \mathcal{U}$ (c'est-à-dire $\operatorname{supp}(P^* w - f) \subset (I' \times \mathcal{U})^c$). Soit $\alpha(t, x) \in HSC_{0,b}^\infty$, $\operatorname{supp} \alpha \subset I' \times \mathcal{U}$, et $\alpha \equiv 1$ au voisinage de $I_0 \times K$, $w' = \alpha w$ vérifie

$$P^*(\alpha, w) = \alpha P^*(w) + [P^*, \alpha]w \quad \text{et} \quad \alpha P^* w = \alpha f \in \mathcal{K}_{k,s}.$$

Soient σ et τ tels que $w \in \mathcal{K}_{\sigma,\tau}$.

$$[P^*, \alpha]w = \sum_{j=0}^m A_j [D_t^{m-j}, \alpha]w + \sum_{j=1}^m [A_j, \alpha] D_t^{m-j} w.$$

Donc $[P^*, \alpha]w \in \mathcal{K}_{\sigma-m+1,\tau}$, mais, lorsque $\sigma \leq k + m - 1$ et $\tau + \sigma \leq k + m - 1 + s$, $P^*(\alpha w) \in \mathcal{K}_{\sigma-m+1,\tau}$.

Comme P^* est un opérateur de la même forme que P, on déduit que

$$w' = \alpha w \in \mathcal{K}_{\sigma-1,\tau+1}.$$

En définitive, on obtient qu'il existe un voisinage de $I_0 \times K$ sur lequel $w \in \mathcal{K}_{k+m-1,s}$ et $P^* w = f$. On a ainsi prouvé le théorème suivant.

THÉORÈME I.3. - Soit I_0 un intervalle compact de $[0, +\infty[$, K un compact de E. Il existe un voisinage $I' \times \mathcal{U}$ de I_0 et K tel que, pour $s \in \underset{\sim}{E}$, $k \in \underset{\sim}{N}$, $f \in \mathcal{K}^o_{k,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^+ \times E)$, $w \in \mathcal{K}^o_{k+m-1,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^+ \times E)$, avec $P^* w = f$ sur $I' \times \mathcal{U}$.

On remarquera que l'on peut remplacer P^* par P dans l'énoncé précédent.

On veut maintenant prouver un résultat d'unicité. Pour cela, il faut utiliser un changement de variables qui convexifie. L'objet de la proposition suivante est d'**étudier** l'effet d'une telle opération.

PROPOSITION 7.1. - Soit $P(x, t, D_x, D_t) = \sum_{p+q\leq j} \mathrm{div}_p\, a_{pq}(x, t)\, D_x^q D_t^{m-j}$ un opérateur différentiel dont les coefficients $a_{pq} \in C_b^\infty(E \times \underset{\sim}{R}, \mathcal{L}(\widehat{\odot}_q E, \widehat{\odot}_p E'))$ ont leurs supports dans $B(0, R)$ ($R > 0$ arbitraire). Le changement de variables $(t, x) \longrightarrow (t', y)$ défini par $t' = t + 2^{-1}\|x - x_0\|^2$ et $y = x$ transforme l'opérateur P en

$$\tilde{P}(y, t', D_y, D_t) = \sum_{p',q,j'} \mathrm{div}_{p'}\, \tilde{a}_{p'q'}(t', y)\, D_y^{q'} D_t^{m-j'}$$

dont le symbole principal s'exprime par

$$\tilde{P}(y, t', \xi, \tau) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k+\ell=j} \left(a_{k\ell}\left(t' - \frac{\|y - x_0\|^2}{2}, y\right) - (\xi + \tau j(y - x_0))^\ell, (\xi + \tau j(y - x_0)^k\right),$$

où j est définie par

$$y = \sum_{i=1}^\infty y_i\, e_i \longmapsto j(y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{y_i}{a_i^2}\, e_i .$$

Démonstration. - Soit $u(t, x) \in C^\infty(\underset{\sim}{R} \times E)$. On pose

$$u(t, x) = v\left(t + \frac{\|x - x_0\|^2}{2}, x\right) = v(t', y) .$$

D'où

$$D_x^\ell u(t, x)\, h = \sum_{p+2q+\ell'=\ell} \frac{\ell!}{p!\, q!\, \ell'!} \frac{1}{2^q} (x - x_0|h)_E^p \|h\|^{2q} (\partial_{t'}^{p+q} D_y^{\ell'} v)(t', y) h^{\ell'} .$$

On est ainsi conduit à introduire l'opérateur

$$T_{\ell' pq}(y) : \widehat{\odot}_{\ell'} E \longrightarrow \widehat{\odot}_\ell E ,$$

avec $\ell = \ell' + p + 2q$ défini par $u \longrightarrow \mathrm{sym}(u \otimes j_p(y - x_0) \otimes t_q)$, pour

$$u \in \widehat{\odot}_{\ell'} E , \quad t_q = \sum_{|\beta|=q} \frac{q!}{\beta!} \frac{e_{2\beta}}{a^{2\beta}} \in \widehat{\odot}_{2q} E , \quad j_p(y) = \otimes_p j(y) ,$$

avec $j(y) = \sum_{i=1}^\infty (y_i/a_i^2)\, e_i$, si $y = \sum_i y_i\, e_i \in E$. Ce qui permet d'écrire

$$D_x^\ell u(t, x) = \sum_{p+2q+\ell'=\ell} \frac{\ell!}{p!\, q!\, \ell'!} \frac{1}{2^q} T_{\ell' pq}(y) (\partial_{t'}^{p+q} D_y^{\ell'} v(t', y)) .$$

On en déduit le lemme suivant.

LEMME. - L'application

$$v(t', y) \in C^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E) \longrightarrow v(t + \frac{\|x - x_0\|^2}{2}, x),$$

restreinte aux v tels que $\operatorname{supp} v \subset \underset{\sim}{R} \times B(0, R)$, se prolonge en une application continue (pour la topologie limite inductive)

$$\tilde{\mathcal{K}}_{m,0} = \cup_R \{v \in \mathcal{K}_{m,0} ; \operatorname{supp} v \subset \underset{\sim}{R} \times B(0, R)\} \longrightarrow \mathcal{K}_{m,0}(\underset{\sim}{R} \times E), \quad m \in \underset{\sim}{R}.$$

Il suffit en effet de noter que, $u \in \mathcal{K}_{m,0}$, $\operatorname{supp} u \subset \underset{\sim}{R} \times B(0, R)$ est la limite d'une suite $u_n \in C^\infty_0(\underset{\sim}{R}) \otimes C^\infty_b(E)$ à supports contenus dans $\underset{\sim}{R} \times B(0, R')$, et de prouver une inégalité. On utilise le calcul ci-dessus, à l'aide de la proposition 6.2, lorsque $m \in \underset{\sim}{N}$. Sinon on utilise une technique d'interpolation, puis on transpose. On note que, lorsque $m \geqslant 0$, l'application ainsi définie coïncide avec la transformation par changement de variables sur $L^2_{dt\otimes\nu}(\underset{\sim}{R} \times E)$.

Soit $V(t', y) = \sum_{|\alpha|=k} V_\alpha(t', y)\, e_\alpha$, où $V_\alpha \in C^\infty_{0,b}(\underset{\sim}{R} \times E)$, et où seul un nombre fini de termes sont non nuls. Soit $U(t, x) = V(t + (\|x - x_0\|^2/2), x)$. Alors

$$(\operatorname{div}_x)_k U(t, x) = \sum_{|\alpha|=k} (\frac{\partial}{\partial x} - x)^\alpha V_\alpha(t', y)$$

s'écrit

$$(\operatorname{div}_x)_k U(t, x) = \sum_{p'+2r'+k'=k} (-1)^r \frac{k!}{p!\, r'!\, k'!} [\operatorname{div}_{k'} T^*_{k'p'r'} \partial_{t'}^{p'+r'} V](t + \frac{\|x - x_0\|^2}{2}, x).$$

Soit $V(t', y) \in \mathcal{K}_{m,0} \hat{\otimes} \hat{\odot}_j E'$, $\operatorname{supp} V \subset \underset{\sim}{R} \times B(0, R)$. D'après le lemme, $U(t, x) \in \mathcal{K}_{m,0} \hat{\otimes} \hat{\odot}_j E'$. Le calcul ci-dessus donne l'expression de $(\operatorname{div}_x)_k\, U(t, x)$.

Donc, pour $P(x, t, D_x, D_t) = \operatorname{div}_k a_{k\ell} D^\ell_x D^{m-j}_t$, on écrit

$$Pu = \sum_{\substack{p'+2r'+k'=k \\ p+2r+\ell'=\ell}} \frac{k!\ \ell!}{p!\, p'!\, k'!\, \ell'!\, r!\, r'!} \frac{(-1)^{r'}}{2^{r+r'}}$$
$$\times \sum_{\rho\leq r+r'} (\ ) \operatorname{div}_{k'}[T^*_{k'p'r'}(y)\, \partial^p_t a_{k\ell}\, T_{\ell' pr}(y)]\, \partial_t^{m-j+p'+r'+p+r-\rho\ell'} D_x v(t+\frac{\|x-x_0\|^2}{2}, x)$$

ce qui s'écrit $Pu(t, x) = (\tilde{P}v)(t + (\|x - x_0\|^2/2), x)$ si

$$v(t + \frac{\|x - x_0\|^2}{2}, x) = u(t, x).$$

Supposant que $\operatorname{supp} a_{k\ell}(t, x) \subset \underset{\sim}{R} \times B(0, R)$, la fonction

$$(t', y) \longrightarrow T^*_{k'p'r'}(y)\, \partial^p_t a_{k\ell}(t' - \frac{\|y-x_0\|^2}{2}, y)\, T_{\ell' pr}(y) \in C^\infty_b(\underset{\sim}{R}\times E, \mathcal{L}(\hat{\odot}_{\ell'} E, \hat{\odot}_{k'} E')),$$

et donc l'opérateur $\tilde{P}$ est bien de la même forme que l'opérateur P. Il s'agit de calculer son symbole

$$(\xi, \tau) \longrightarrow \sum_{j=0}^m \sum_{p'+k'=k} \sum_{p+\ell'=\ell} \frac{k!\,\ell!}{p'!\,k'!\,p!\,\ell!} (a_{k\ell} T_{\ell' p}\xi, T_{k'p'}\xi)\, \tau^{m-j+k-k'+\ell-\ell'},$$

ce qui donne

$$\tilde{P}(y , t' , \xi , \tau)$$
$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k+\ell=j} (a_{k\ell}(t' - \frac{\|y - x_0\|^2}{2} , y)(\xi + \tau j(y - x_0))^{\ell} (\xi + \tau j(y - x_0))^{k}) .$$

Ce qui permet de noter que $\tilde{P}(x_0 , t' , \xi , \tau) = P(x_0 , t' , \xi , \tau)$.

$\tilde{P}$ est donc également hyperbolique dans la direction t' aux points (x_0 , t') . Ce résultat nous permet de poser le théorème suivant.

THÉORÈME I.4. - Soit $(t_0 , x_0) \in \underset{\sim}{R} \times E$, P un opérateur différentiel hyperbolique au sens décrit plus haut. $u \in \mathcal{K}_{\sigma,\tau}(\underset{\sim}{R} \times E)$ qui vérifie $Pu = 0$ au voisinage de (x_0 , t_0) , $u = 0$, pour $t < t_0$, dans un voisinage de (x_0 , t_0) , alors il existe un voisinage de (x_0 , t_0) dans lequel $u = 0$.

Démonstration. - Il n'est pas restrictif de supposer $t_0 = 0$. Par une troncature adéquate, on suppose que $\operatorname{supp} u \subset \{t \geqslant 0\}$, et que $Pu = 0$ sur un voisinage de $(x_0 , 0)$ noté V .

Le changement de variables $(t , x) \longrightarrow (t' , y)$, défini par

$$t' = - t - 2^{-1} \|x - x_0\|^2 \quad \text{et} \quad y = x ,$$

permet de poser

$$\begin{cases} v(t' , y) = u(t , x) = u(- t' - \dfrac{\|y - x_0\|^2}{2} - y) \\ (\tilde{P}v)(t' , y) = (Pu)(t , x) \end{cases} .$$

On notera $\tilde{a}_{k\ell}(t' , y)$ les coefficients de l'opérateur $\tilde{P}$ obtenu par la proposition 7.1. On notera $\tilde{P}_\epsilon(t' , y , D_{t'} , D_y) = \tilde{P}(t' - \epsilon , D_{t'} , D_y)$ l'opérateur dont les coefficients sont $\tilde{a}_{k\ell}(t' - \epsilon , y)$, et en particulier

$$\tilde{a}_{k\ell}(t' , x_0) = a_{k\ell}(- t' , x_0)(- 1)^{k+\ell} .$$

On fait remarquer que $\exists\ \epsilon_0 > 0$, $\exists\ V_0$ voisinage de $(0 , x_0)$, tels que $\forall\ \epsilon < \epsilon_0$, $\exists\ C > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que $\operatorname{supp} u \subset V_0$, $\tau > \tau_0$ entraîne

$$\sum_{0 \leq j+k \leq n-1} \tau^{2(m-j-k)-1} \int_0^{+\infty} \|D_t^k u\|_j^2 \exp(2\tau t)\, dt$$
$$\leq C \int_0^{+\infty} \int |\tilde{P}_\epsilon u|^2 \exp(2\tau t)\, d\nu\, dt .$$

En fait, il est clair que les propositions 1 et 2 sont valables avec des constantes indépendantes de ϵ , pour les opérateurs $\tilde{P}_\epsilon$. On remarque également qu'il existe ϵ_0 tel que, pour $\epsilon < \epsilon_0$, on ait la proposition 3 avec des constantes indépendantes de ϵ , le seul point délicat étant en effet d'obtenir des estimations pour les formes quadratiques $G_\tau(\lambda_\epsilon(\xi) , D , \bar{D})$, mais, comme $\lambda_\epsilon(\xi) = \lambda(- \epsilon , x_0 , \xi)$, la propriété résulte alors de ce que : $\exists\ \epsilon_0$, $\exists\ C_0$ et C_1 tels que $|\epsilon| < \epsilon_0$ entraîne

$$\begin{cases} |\lambda_j(\epsilon , x_0 , \xi) - \lambda_k(\epsilon , x_0 , \xi)| \geqslant C_0 \|\xi\| \\ |\lambda_j(\epsilon , x_0 , \xi)| \leqslant C_1 \|\xi\| \end{cases} ,$$

ce qui sera prouvé au paragraphe suivant (proposition 1). On a donc : $\exists\ V_0$ voisinage de $(x_0 , 0)$, $\exists\ \epsilon_0 > 0$ tel que $\forall\ \epsilon < \epsilon_0$, $\forall\ s \in \underset{\sim}{R}$, $\forall\ k \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\ g \in \mathcal{K}^o_{t,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^+ \times E)$, $\exists\ w \in \mathcal{K}^o_{k+m-1,s}$ tel que $\tilde{P}^*_\epsilon\ w = g$ sur V_0 .

Utilisant la proposition 7.1, en notant α_ϵ le difféomorphisme, on obtient

$$\begin{cases} x = y \\ t = -(t' + \dfrac{\|y - x_0\|^2}{2} - \epsilon^2) \end{cases} ,$$

on a un V_0-voisinage de $(x_0 , 0)$, $\epsilon > 0$, tels que, $\forall\ g \in \mathcal{K}_{k,0}$, $\operatorname{supp} g \subset \overline{S}^-_\epsilon$, $\exists\ w \in \mathcal{K}_{k+m-1,0}$, $\operatorname{supp} w \subset \overline{S}^-_\epsilon$ tel que $P^*\ w = g$ sur $\alpha_\epsilon(V_0)$, avec

$$S^-_{\epsilon t} = \{(x , t) ;\ t + 2^{-1}\ \|x - x_0\|^2 - \epsilon^2 < 0\} .$$

On choisit ϵ assez petit pour que $V_1 = \alpha_\epsilon(V_0)$ vérifie $V_1^c \cap \overline{S}^-_\epsilon \subset \{t < 0\}$, V_1 étant un voisinage de $(x_0 , 0)$. On a donc $\operatorname{supp} u \subset \{t \geqslant 0\}$ et $\operatorname{supp}(P^*\ w - g) \subset \overline{S}^-_\epsilon \cap V_1^c \subset \{t < 0\}$.

D'où $(P^*\ wu) = (g , u) = (w , Pu)$, mais $\operatorname{supp} Pu \subset \{t \geqslant 0\} \cap V^c \subset S^+_\epsilon$ si ϵ assez petit. D'où $(g , u) = 0$ mais, comme g est arbitraire dans $\mathcal{K}_{k,0}$, $\operatorname{supp} g \subset S^-_\epsilon$. On en déduit que $\operatorname{supp} u \subset \{t \geqslant 0\} \cap (S^-_\epsilon)^c$, soit $u = 0$ dans un voisinage de zéro.

<u>Remarque</u>. - Lorsque u a une certaine régularité en t par exemple, $u \in \mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E)$, m dégré de l'opérateur, $s \in \underset{\sim}{R}$, on peut remplacer la condition de support par une condition de trace.

On voit d'abord aisément que les opérateurs

$$u(t , x) \in \mathcal{S}(\underset{\sim}{R}) \otimes B^\infty_{cyl}(E) \longrightarrow D_t^{m-j}\ u(t_0 , x) \in B^\infty_{cyl}(E)$$

se prolongent en des opérateurs continus

$$\gamma_j :\ u \in \mathcal{K}_{m,s}(\underset{\sim}{R} \times E) \longrightarrow \gamma_j\ u(t_0) \in \mathcal{E}^{s+m-j-(1/2)} ,$$

à condition d'avoir $m > j + (1/2)$.

Il est facile de voir que $u \in \mathcal{K}_{m,s}$, $\gamma_0\ u_{|t=0} = \dots = \gamma_{m-1}\ u_{|t=0} = 0$ entraînent que

$$\tilde{u}(t , x) = \begin{cases} u & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

(qui est bien défini dans $L^2_{dt}(\underset{\sim}{R} , \mathcal{E}^{s+m})$) appartient à $\mathcal{K}^o_{m,s}(\overline{\underset{\sim}{R}}^+ \times E)$ et que $P\tilde{u} = \widetilde{Pu}$ est encore nul au voisinage de $(0 , x_0)$.

II. Construction d'une paramétrixe dans le cas où les coefficients a_{pq} ne dépendent que de t.

On écrit encore $P(t, D_x^*, D_x, D_t) = \sum_{j=0}^m A_j(t, D_x^*, D_x)D_t^{m-j} + R$, avec cette fois

$$\begin{cases} A_j(t, D_x^*, D_x) = \sum_{p+q=j} \operatorname{div}_p a_{pq}(t) D_x^q \\ A_0 = 1 \end{cases},$$

$R = \sum_{j=0}^{m-1} B_j(t, D_x^*, D_x)D_t^{m-j-1}$, et où B_j se décrit comme A_j. On pose également $A_j(t, \xi) = \sum_{p+q=j} (a_{pq}(t)\ \xi^q, \xi^p)$. L'hypothèse (H) est alors : $\forall\ t_0 \in \underset{\sim}{R}$, $\exists\ C_0$, $C_1 > 0$ tels que les racines $\lambda_j(t_0, \xi)$ de l'équation

$$P(t_0, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^m A_j(t_0, \xi)\ \lambda^{m-j} = 0$$

sont réelles, distinctes et vérifient

$$\begin{cases} |\lambda_j(t_0, \xi) - \lambda_k(t_0, \xi)| \geqslant C_0\ \|\xi\|, \quad j \neq k, \quad \forall\ \xi \in E \setminus \{0\} \\ |\lambda_j(t_0, \xi)| \leqslant C_1\ \|\xi\| \end{cases}.$$

La restriction sur la dépendance des coefficients nous permet d'associer à P un symbole d'Anti-Wick $A(t, \bar{z}, z, D_t) = \sum_{j=0}^m A_j(t, \bar{z}, z)D_t^{m-j}$. $A_j(t, \bar{z}, z)$ est un polynôme en z, $\bar{z}$ de degré au plus j et on peut écrire

$$\theta((Pu)(x, t))(z) = \int \exp(z\bar{z})\ A(t, \bar{z}, z, D_t)\Phi(t, z)\ d\nu(z).$$

$\forall\ t \in \underset{\sim}{R}$, $z' \in X^c$, si $u \in C^m(\underset{\sim}{R}, \mathcal{E}^s)$ et $\Phi(t, z) = \theta(u)$,

$$A_j(t, \bar{z}, z) = \sum_{p+q\leqslant j} (\tilde{a}_{pq}(t)\bar{z}^q, z^p),$$

avec $\tilde{a}_{pq}(t) = a_{pq}(t)$ si $p + q = j$. En effet, d'après [12], le symbole d'Anti-Wick de $\operatorname{div}_p a_{pq} D^q$ est

$$\sum_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!} \partial_z^\lambda\ \partial_{\bar{z}}^\lambda(a_{pq}\ \bar{z}^q, z^p) = \sum_{0\leqslant r\leqslant \inf(p,q)} (-1)^r\ (a_{pq}^r\ \bar{z}^{q-r}, z^{p-r}),$$

où $a_{pq}^r \in \mathcal{L}(\widehat{\bigodot}_{q-r} E, \widehat{\bigodot}_{pr} E')$ est défini par

$$\xi \in \widehat{\bigodot}_{p-r} E, \quad \eta \in \widehat{\bigodot}_{q-r} E$$
$$\longrightarrow \sum_{|\lambda|=r} \frac{p!}{(p-r)!} \frac{q!}{(q-r)!} \frac{1}{\lambda!}(a_{pq}\ \operatorname{sym}(e_\lambda \otimes \eta), \operatorname{sym}(e_\lambda \otimes \xi)).$$

On définira en particulier $A_j^o(t, \bar{z}, z) = \sum_{p+q=j} (a_{pq}\ \bar{z}^q, z^p)$ qui est la partie principale de A_j. Pour construire une paramétrixe pour le problème de Cauchy, il nous faut des estimations précises sur la dépendance en t et ξ des racines.

PROPOSITION 1. – Sous l'hypothèse (H), on peut définir m fonctions $\lambda_j(t, \xi)$ C^∞ sur $\underset{\sim}{R} \times E \setminus \{0\}$ homogènes de degré 1 dans la 2e variable. $P(t, \lambda_j(t, \xi), \xi)=0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, avec, $\forall\ I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, $\exists\ C_0 > 0$ tel que

$$|\lambda_j(t , \xi) - \lambda_k(t , \xi)| \geqslant C_0 \|\xi\| , \quad \forall\, t \in I_0 , \quad \forall\, \xi \in E \setminus \{0\}$$

et

$$\forall\, p \in \mathbb{N} , \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N} , \quad \sup_{t\in I_0} \|\partial_t^p D_\xi^\ell \lambda_j(t , \xi)\| \leqslant C \|\xi\|^{1-\ell} , \quad \xi \in E \setminus \{0\}$$

($\| \ \|$ désigne la norme des applications ℓ-linéaires continues sur E).

Démonstration. – Le fait que les fonctions $\lambda_j(t , \xi)$ soient bien définies et régulières est général. Il s'agit essentiellement de voir que $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$ tel que $|t - t_0| < \alpha$, ξ entraînent $|\lambda_j(t , \xi) - \lambda_j(t_0 , \xi)| \leq \epsilon\|\xi\|$.

Pour cela, on construit $\lambda_j(t , \xi)$ comme limite de la suite

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} = \lambda_n - P_\lambda'^{-1}(\lambda_j(t_0 , \xi) , t_0 , \xi) \, P(\lambda_n , t_0 , \xi) \\ \lambda_0 = \lambda_j(t_0 , \xi) \end{cases} ,$$

pour $\|\xi\| = 1$. Utilisant (H) , on note que $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \alpha > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tels que $\xi \in E$, $\|\xi\| = 1$, $|\lambda - \lambda_j(t_0 , \xi)| \leqslant \alpha$, $|\lambda' - \lambda_j(t_0 , \xi)| \leqslant \alpha$, $|t - t_0| \leqslant \eta$ entraînent

$$|P(\lambda , t , \xi) - P(\lambda' , t , \xi) - (\lambda - \lambda') \, P_\lambda'(\lambda_j(t_0 , \xi) , t_0 , \xi)| \leqslant \epsilon \, |\lambda - \lambda'| .$$

D'où l'on va déduire $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \eta' > 0$ tel que

$$|t - t_0| < \eta \Longrightarrow |\lambda_j(t , \xi) - \lambda_j(t_0 , \xi)| \leqslant \epsilon \, \|\xi\| , \quad \forall\, \xi .$$

Pour les conditions sur les dérivées, il suffit d'estimer les dérivées de la fonction implicite en notant que $\forall\, I_0 \subset\subset \mathbb{R}$, $\exists\, C' > 0$ tel que

$$t \in I_0 , \quad \xi \in E \Longrightarrow |P_\lambda'(\lambda_j(t , \xi) , t , \xi)| \geqslant C' \|\xi\|^{m-1} , \quad 1 \leqslant j \leqslant m .$$

On va définir des classes de symboles qui nous seront utiles.

Définitions.

1° Soit $m \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. On définit $S^{m,\alpha}(\mathbb{R} \times E) = \{C(t , \xi , y)$; fonction $\mathbb{R} \times E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$, C^∞ en t , ξ , entière analytique en y avec

$$\forall\, I_0 \subset\subset \mathbb{R} , \quad \forall\, q , j , \ell \in \mathbb{N} ,$$
$$\sup_{t\in I_0} \|\partial_t^q D_y^j D_\xi^\ell C(t , y , \xi)\| \leqslant C(1 + \|\xi\|)^{m-\ell} \exp(\alpha\|y\|) , \quad y \in E^C , \quad \xi \in E\}$$

($\| \ \|$ désigne ici la norme de l'application (j , ℓ)-linéaire sur $E \times E$) .

2° On désignera par $S_k^{m,\alpha}(\mathbb{R} \times E) = \{C(t , y , \xi)$; $\mathbb{R} \times E \times E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, C^∞ en t et $\xi \in E \setminus \{0\}$, analytiques entières en y , positivement homogènes de degré m , avec $\forall\, I_0 \subset\subset \mathbb{R}$, $\forall\, q , j , \ell \in \mathbb{N}$, $\exists\, C$ tel que

$$\sup_{t\in I_0} \|\partial_t^q D_y^j D_\xi^\ell C(t , y , \xi)\| \leqslant C \|\xi\|^{m-\ell} \exp(\alpha \|y\|) , \ \forall\, \xi \in E \setminus \{0\} , \ y \in E^C\} .$$

3° On définit, pour $m \in \underset{\sim}{R}$, $\epsilon \in \underset{\sim}{R}^+$, $\hat{S}^{m,\epsilon}(\underset{\sim}{R} \times E)$ les fonctions $C(t, y, \xi)$, C^∞ en t, ξ, analytiques entières en y, avec, $\forall\ I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, $\forall\ q, j, \ell \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\ \xi \in E$, $\forall\ y \in E^c$,

$$\sup_{t \in I_0} \|\partial_t^q D_y^j D_\xi^\ell C(t, y, \xi)\| \leq C(1 + \|\xi\|)^{m-\ell} \exp(\tfrac{\epsilon}{2} \|y\|^2) .$$

4° Une fonction $\varphi(t, \xi) : \underset{\sim}{R} \times E \setminus \{0\} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ est une phase si φ est C^∞ sur $\underset{\sim}{R} \times E \setminus \{0\}$ homogène de degré 1 en ξ et si $\forall\ I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, $\forall\ q, j \in \underset{\sim}{N}$,

$$\sup_{t \in I_0} \|\partial_t^q D_\xi^j \varphi(t, \xi)\| \leq C \|\xi\|^{1-\ell} .$$

On va rechercher une paramétrixe sous la forme

$$(E\Phi)(z', t) = \int \exp(i\varphi(t, \xi))\ C(t, y, \xi)\ \exp(z\bar{z})\ \Phi(z)\ d\nu_c(z) ,$$

où $z' = \xi + iy$ dans l'intégrale, $\varphi(t, \xi)$ étant une fonction phase, $C(t, y, \xi)$ un symbole de $S^{m,\alpha}$ ou de $\hat{S}^{m,\epsilon}$. Il faut d'abord rechercher une classe de fonctions Φ ou u sur lesquelles un opérateur comme E pourra agir.

PROPOSITION 2. - <u>Posant</u> $\mathcal{E}_b^s = \bigcup_{R>0} \mathcal{E}_R^s$, <u>où</u> $\mathcal{E}_R^s = \{u \in \mathcal{E}^s ,\ \ \operatorname{supp} u \subset B(0, R)\}$ <u>et</u> $\Lambda_R^s = \theta(\mathcal{E}_R^s)$.

<u>Soit</u> $0 \leq \epsilon < 1$, $s \in \underset{\sim}{N}$, $R > 0$. <u>Alors</u> $u \in \mathcal{E}_R^s$ <u>entraîne</u>

$$\Phi = \theta(u) \in L^2_{\nu(1+\|z\|^2)^s \exp(\epsilon\|y\|^2)}$$

<u>et</u> $\exists\ C_R > 0$ <u>telle que</u>

$$\int |\Phi|^2 (1 + \|z\|^2)^s\ d\nu(z)$$
$$\leq \int |\Phi(z)|^2 (1 + \|z\|^2)^s \exp(\epsilon\ \|y\|^2)\ d\nu(z) \leq C_R \int |\Phi(z)|^2 (1 + \|z\|^2)^s\ d\nu(z) .$$

$\forall\ u \in \mathcal{E}_R^s$, $y = \operatorname{Im} z$.

La preuve est analogue à celle de la proposition de [12].

COROLLAIRES.

1° <u>Un opérateur de la forme</u>

$$(E\Phi)(z', t) = \int \exp(i\varphi(t, \xi))\ C(t, y, \xi)\ \exp(z'\bar{z})\ \Phi\ d\nu = \pi(C \exp(i\varphi)\ \Phi)(z') ,$$

<u>où</u> $C(t, y, \xi) \in \hat{S}^{m',\epsilon}$ <u>est nul, pour</u> $\|\xi\| < 1/2$, <u>et où</u> $\varphi(t, \xi)$ <u>est une phase, opère pour</u> t <u>fixé dans</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>de</u> $\Lambda_R^s \longrightarrow \Lambda^{s-m'}$, $\forall\ s \in \underset{\sim}{N}$, $\forall\ R > 0$, <u>car</u>

$$C(t, y, \xi)\ \Phi(z)\ \exp(i\varphi) \in L^2_{\nu(1+\|z\|^2)^{s-m'}} ,$$

<u>d'après la proposition 2.</u>

2° <u>La fonction</u> $C(t, y, \xi)\ \exp(i\varphi(t, \xi)) = B(t, \bar{z}, z)$ <u>vérifie (dans les conditions précédentes) des inégalités comme</u>

$$\|D_z^p D_{\bar z}^q B(t, \bar z, z)\| \leqslant C_{p,q}(1+\|z\|^2)^{m'/2} \exp(\tfrac{\varepsilon}{2}\|y\|^2), \quad \forall p, q$$

(augmenter ε si nécessaire). Si A est un opérateur associé à un symbole d'Anti-Wick A^o qui est un polynôme de degré m en z, $\bar z$, la formule obtenue dans [12] (proposition 36) pour la composition de A et de B est encore valable. En effet, choisissant d'abord Φ cylindrique dans $\Lambda^s \cap L^2_{\nu\exp(\varepsilon\|y\|^2)(1+\|z\|^2)^s}$, $s \in \underset{\sim}{R}$, et prenant pour A un polynôme cylindrique, on montre la formule de composition en reprenant la méthode de [12]. Le résultat général, pour

$$\Phi \in \Lambda^s \cap L^2_{\nu\exp(\varepsilon\|y\|^2)(1+\|z\|^2)^s}$$

et A un polynôme quelconque, s'obtient par des passages à la limite adéquats.

Il faut maintenant étudier de plus près les termes qui apparaissent dans cette formule de composition.

On désigne maintenant par $\chi(\|\xi\|)$ une fonction C^∞ égale à 1, pour $\|\xi\| > 1$, et nulle, pour $\|\xi\| < 1/2$.

PROPOSITION 3. - Soit $A(t ; \bar z, z, D_t)$ le symbole d'Anti-Wick de l'opérateur A associé à $P(x, t, D_x, D_t)$ par la tranformation θ. Soit

$$(E\Phi)(z', t) = \int \exp(z'\bar z + i\varphi(t, \xi)\,\chi(\xi)\, C(t, y, \xi)\,\Phi(z)\, d\nu(z),$$

où $C(t, \xi, y) \in S_h^{m',\alpha}$, φ est une phase. L'opérateur $A \circ E$ s'écrit

$$(A \circ E)\,\Phi(z', t) = \int \exp(z'\bar z + i\varphi(t, \xi))\, D(t, \xi, y)\,\Phi(z)\, d\nu(z),$$

avec

$$D(t,\xi,y) = \chi(\xi)\big(C(t,y,\xi)\textstyle\sum_{j=0}^{m} A_j^o(t,\xi,\xi)\,(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^{m-j}) + \mathcal{L}(C) + R(t,\xi,y)\big) + R'(t,\xi,y),$$

où $\mathcal{L}(C) \in S_h^{m+m'-1,\alpha'}$, R s'exprime comme une somme finie de termes de $S_h^{m+m'-j,\alpha'}$, $j \geqslant 2$, $R' \in \bigcap_\ell S^{-\ell,\alpha'} = S^{-\infty,\alpha'}$, où $\alpha' > \alpha$ arbitraire.

$\mathcal{L}(C)$ est un opérateur différentiel du 1er ordre qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(C) = (&\textstyle\sum_{j=0}^{m-1} (m-j)(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^{m-j-1} A_j^o(t, \xi))\,\frac{1}{i}\frac{\partial c}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2i}\textstyle\sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=1}^{\infty} (\frac{\partial\varphi}{\partial t})^{m-j}\,\frac{\partial c}{\partial y_\ell}\frac{\partial}{\partial z_\ell} A_j^o(t, \xi, \xi) \\
&+ C(t, y, \xi)(-i\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\textstyle\sum_{j=0}^{m-2}\frac{(m-j)(m-1-j)}{2}\,(\frac{\partial\varphi}{\partial t})^{m-j-2} A_j^o(t, \xi) \\
&+ \textstyle\sum_{j=0}^{m}\lambda^{m-j}[(A_j^1(t, \xi) + D_j A_j^o(t, \xi)y - \frac{i}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty}\partial_{z_\ell} A_j^o(t, \xi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\ell}]).
\end{aligned}$$

Démonstration. - On précise que $A_j^o(t, \bar z, z)$ et $A_j^1(t, \bar z, z)$ sont les termes d'homogénéité respectivement j et $j-1$ de $A_j(t, \bar z, z)$. Nous noterons souvent $A_j^0(t, \xi)$ pour $A_j^0(t, \xi, \xi)$, par exemple.

On écrit ainsi $A = \sum_{j=0}^{m} \mathrm{Op}(A_j(t, \bar z, z))\, D_t^{m-j}$.

$$\exp(-i\varphi)\, D_t^{m-j}\,(C \exp i\varphi)$$
$$= C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{m-j} + (m-j) D_t C \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{m-j-i} - iC(m-j)\,\frac{(m-j-i)}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{m-j-2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \sum_{\substack{\text{finie}\\ \ell\geq 2}} S_h^{m'+m-j-\ell_1\alpha} .$$

Le composé d'un opérateur comme $\int \exp(z\bar{z} + i\varphi)\, \chi C\Phi\, d\nu$, avec l'opérateur $Op(A_j(t\,,\,\bar{z}\,,\,z))$, a un symbole d'Anti-Wick donné par $\exp(i\varphi)\,\tilde{C}$, avec

$$\tilde{C} = \exp(i\varphi) \sum_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\, \partial_z^\lambda(A_j(t\,,\,\bar{z}\,,\,z))\; \partial_{\bar{z}}^\lambda(\chi C \exp(i\varphi)) .$$

Or

$$\exp(-i\varphi)\; \partial_{\bar{z}}^\lambda(C \exp(i\varphi))$$
$$= \sum_{\mu\leq\lambda} \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_q=\mu,\,\mu_i\neq 0} \frac{\lambda!}{(\lambda-\mu)!\,\mu!}\, \partial_{\bar{z}}^{\lambda-\mu} C\, \frac{\mu!}{\mu_1!\cdots\mu_q!\,q!}\,(i)^q\, \partial_{\bar{z}}^{\mu_1}\varphi \times\cdots\times \partial_{\bar{z}}^{\mu_q}\varphi$$

avec $\partial_{\bar{z}}^{\mu_1}\varphi \times\cdots\times \partial_{\bar{z}}^{\mu_q} \in S_h^{q-|\mu|,0}$.

Comme $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\xi + i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}}^\lambda C = (\frac{i}{2})^\lambda\, \partial_y^\lambda C$ + termes dans $S_h^{m'-\ell,\alpha}$, $\bar{\ell} > 0$.

A_j étant un polynôme en $\bar{z}$, z de degré j , $\partial_z^\lambda A_j$ est de degré $j - |\lambda|$ en ξ , y . Donc, si on s'intéresse seulement aux deux premiers termes du développement selon les puissances de ξ , seuls interviennent les termes pour $|\lambda| \leq 1$ et les termes de degré j et $j-1$ dans $A_j(t\,,\,\bar{z}\,,\,z)$.

Il faut cependant prouver la convergence des séries qui interviennent dans les différents termes, mais cela ne représente pas de difficultés et les arguments sont analogues à ceux de [12]. Au total, nous avons

$$\tilde{C} = \chi(C(t\,,\,y\,,\,\xi)\, A_j^0(t\,,\,\xi) + C(t\,,\,y\,,\,\xi)(A_j^1(t\,,\,\xi) + D_y\, A_j^0(t\,,\,\xi)y)$$
$$- \frac{i}{2}\sum_{\ell=1}^\infty \partial_{z\ell}\, A_j^0(t\,,\,\xi)\left(\frac{\partial c}{\partial y_\ell} \pm C\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\ell}\right)] + \sum_{\ell\geq 0,\ \text{finie}} S_h^{m'+j-2-\ell,\alpha'} + S^{-\infty,\alpha'},$$

avec $\alpha' > \alpha$.

En résumé, posant $\lambda = (\partial\varphi/\partial t)$, on a obtenu

$$D(t\,,\,\xi\,,\,y) = \chi(C(t\,,\,y\,,\,\xi) \sum_{j=0}^m A_j^0\, \lambda^{m-j}$$
$$+ C(t\,,\,y\,,\,\xi) \sum_{j=0}^m [(A_j^1 + D_y\, A_j^0(\xi)y) - \frac{i}{2}\sum_{\ell=1}^\infty \partial_{z\ell}\, A_j^0(t\,,\,\xi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\ell}]$$
$$- \frac{i}{2}\sum_{j=0}^m \lambda^{m-j} \sum_{\ell=1}^\infty \frac{\partial c}{\partial y_\ell}\, \partial_{z\ell}\, A_j^0(t\,,\,\xi) + D_t\, C \sum_{j=0}^{m-1} (m-j)\lambda^{m-j-1}\, A_j^0(t\,,\,\xi)$$
$$- i\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(m-j)(m-j-1)}{2}\, \lambda^{m-j-2}\, A_j^0(t\,,\,\xi) + \sum_{\text{finie}} S_h^{m+m'-2-\ell,\alpha'}\right) + S^{-\infty,\alpha'} ,$$

avec $\alpha' > \alpha$.

Ce qui est le résultat cherché.

Le résultat de la proposition 3 nous conduit à écrire classiquement l'équation de phase $\sum_{j=0}^m A_j^0(t\,,\,\xi\,,\,\xi)(\partial\varphi/\partial t)^{m-j} = 0$ et l'équation de transport $\mathcal{L}(C) = 0$.

Pour solution de l'équation de phase, on prendra évidemment

$$\varphi(t , \xi) = \int_0^t \lambda_q(\tau , \xi) \, d\tau ,$$

où $\lambda_q(\tau , \xi)$ est une racine du polynôme $\sum_{j=0}^m A_j^0(t , \xi) \lambda^{m-j} = 0$ (voir proposition 1) et φ est bien une phase. Dans ces conditions,

$$\sum_{j=0}^{m-1} (m - j)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^{m-j-1} A_j^0(t , \xi , \xi) = \frac{\partial P}{\partial\lambda} (t , \xi , \lambda_q(t , \xi)) ,$$

et on a, d'après la proposition 1, $\forall\ I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, $\exists\ C > 0$ tel que

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\lambda} (t , \xi , \lambda_q(t , \xi))\right| \geqslant C \|\xi\|^{m-1} , \quad \xi \in E \setminus \{0\} , \quad t \in I_0 .$$

Ceci montre que l'équation de transport est non dégénérée et que l'on peut diviser par ce terme. On va écrire l'équation de transport sous la forme

$$\frac{\partial C}{\partial t} (t , \xi , y) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \theta_\ell(t , \xi) \frac{\partial C}{\partial y_\ell} + C(\lambda(t , \xi) + \mu(t , \xi)y) ,$$

avec les notations

$$\theta_\ell(t , \xi) = \frac{1}{2P'_\lambda(t , \xi , \lambda_q(t , \xi))} \sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial}{\partial z_\ell} A_j^0\right)(t , \xi , \xi) \lambda_q^{m-j}(t , \xi) ,$$

$$\begin{aligned} \lambda(t , \xi) = {} & (P'_\lambda(t , \xi , \lambda_q(t , \xi)))^{-1} \\ & \times \Big(\sum_{j=0}^m \lambda_q^{m-j}\big(A_j^1(t , \xi) - \frac{i}{2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \partial z_\ell A_j^0(t , \xi) \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\ell}\big) \\ & \qquad - i \frac{\partial\lambda_q}{\partial t} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{(m - j)(m - j - 1)}{2} \lambda_q^{m-j-2} A_j^0(t , \xi) , \end{aligned}$$

$$\mu(t , \xi) = (P'_\lambda(t , \xi , \lambda_q))^{-1} D_y A_j^0(t , \xi , \xi) .$$

On constate, alors, que $P'_\lambda(t , \xi , \lambda_q(t , \xi))^{-1} \in S_h^{1-m,0}$, puis, que $\theta(t , \xi) \in S_h^{0,0}(\underset{\sim}{R} \times E , E')$, enfin que $\lambda(t , \xi) \in S_h^{0,0}(\underset{\sim}{R} \times E)$ et que $\mu(t , \xi) \in S_h^{0,0}(\underset{\sim}{R} \times E , E')$. Nous allons prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 4. - <u>Soit</u> φ <u>une solution de l'équation de phase. L'équation</u>

$$\begin{cases} \mathcal{L}(C) = R(t , \xi , y) \\ C_{|t=0} = C_0(\xi , y) \end{cases} ,$$

<u>où</u> $R \in S_h^{m-1+m',\alpha}$ <u>et</u> $C_0(\xi , y) \in S_h^{m',\alpha}$ <u>a une solution</u> $C(t , \xi , y)$ <u>dans tout intervalle</u> $I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, <u>et de plus</u> $C(t , \xi , y) \in S_h^{m',\alpha+\beta}$, <u>où</u> β <u>ne dépend pas de</u> C_0 <u>et de</u> R .

<u>Démonstration</u>. - Posons $R'(t , \xi , y) = R(t , \xi , y)P'^{-1}_\lambda(t , \xi , \lambda_q(t, \xi)) \in S_h^{m',\alpha}$
On note que l'équation de transport n'est pas nécessairement à coefficients réels !
Mais l'hypothèse d'analyticité en y va alors servir. Posons en effet

$$\tilde{C}(t , \xi , y) = C(t , \xi , y + \int_0^t \theta(s , \xi) \, ds .$$

L'équation devient

$$\frac{\partial\tilde{C}}{\partial t}(t\,,\,\xi\,,\,y) + \tilde{C}(t\,,\,\xi\,,\,y)(\lambda(t\,,\,\xi) + \mu(t\,,\,\xi)(y + \int_0^t \theta(s\,,\,\xi)\,ds)) = R'(t\,,\,\xi\,,\,y + \int_0^t \theta(s\,,\,\xi)\,ds\,.$$

Soit

$$C(t,\xi,y) = C_0(\xi,y - \int_0^t \theta(s,\xi)\,ds)\,\exp(-\int_0^t \lambda(\tau,\xi)(y - \int_\tau^t \theta(s,\xi)\,ds)\,d\tau$$
$$+ \int_0^t R'(\tau,\xi,y - \int_\tau^t \theta(s,\xi)\,d\tau)\,\exp(-\int_\tau^t \lambda(s,\xi) + \mu(s,\xi)(y - \int_s^t \theta(\sigma,\xi)\,d\sigma)ds)d\tau.$$

On constate que $C_0(\xi\,,\,y - \int_0^t \theta(s\,,\,\xi)\,ds) \in S_h^{m',\sigma}$, lorsque $t \in I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, le terme

$$\exp(-\int_0^t \lambda(\tau\,,\,\xi) + \mu(\tau\,,\,\xi)(y - \int_\tau^t \theta(s\,,\,\xi)\,ds)\,d\tau) \in S_h^{0,\beta}\,,$$

$\beta \geqslant C_{I_0}\,\sup_{t\in I_0,\xi\in E\setminus\{0\}} \|\mu(t\,,\,\xi)\|$, de même pour les autres termes et on a bien la proposition.

Pour résoudre le problème de Cauchy avec les conditions de traces voulues, il faut superposer les solutions relatives aux différentes phases. On cherchera ainsi un opérateur

$$E_j\,\Phi(z'\,,\,t) = \sum_{\ell=1}^m \int \chi(\xi)\,C_{j\ell}(t\,,\,\xi\,,\,y)\,\exp(i\varphi_\ell(t\,,\,\xi) + z\bar{z})\,\Phi(z)\,d\nu(z)\,,$$

où $\varphi_\ell(t\,,\,\xi) = \int_0^t \lambda_\ell(\tau\,,\,\xi)\,d\tau$, on notera $\mathcal{L}_1$ l'équation de transport correspondante. L'opérateur $(D_t^k\,E_j)_{|t=0}$ est un opérateur pseudo-différentiel dont la partie principale homogène est $\sum_{\ell=1}^m C_{j\ell}(0\,,\,\xi\,,\,y)\,\lambda_\ell^k(0\,,\,\xi)$.

Utilisant les propositions 3 et 4, on va construire une suite de symboles $C_{j\ell}^n(t\,,\,\xi\,,\,y)$ par

$$\mathcal{L}_\ell(C_{j\ell}^n(t\,,\,\xi\,,\,y) = -R_{j\ell}^n(t\,,\,\xi\,,\,y) \in S_n^{m-1-j-n,\alpha_n}\,,\quad 1 \leqslant \ell < m \quad \text{(donnés)}\,,$$
$$\sum_{\ell=1}^m C_{j\ell}^n(0\,,\,\xi\,,\,y)\,\lambda_\ell^k = -\rho_{jk}^n(\xi\,,\,y) \in S_n^{-n+k-j,\alpha_{n-1}}\,,\quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \quad \text{(donnés)}.$$

En effet, les racines $\lambda_1(0\,,\,\xi)$ étant distinctes, la deuxième équation détermine les $C_{j\ell}^n(0\,,\,\xi\,,\,y)$ dans $S_h^{-n-j,\alpha_{n-1}}$, la proposition 4 donne

$$C_{j\ell}^n(t\,,\,\xi\,,\,y) \in S_h^{-n-j,\alpha_n}$$

(on suppose $I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$ fixé). Les symboles $R_{j\ell}^n$ et ρ_{jk}^n sont déterminés par

$$R_{j\ell}^0(t\,,\,\xi\,,\,y) = 0\,,\quad \rho_{jk}^0(\xi\,,\,y) = \delta_{jk}$$

et par la récurrence suivante

$$AE_j^n = \sum_{\ell=1}^m \int \exp(i\varphi_\ell)\,D_{j\ell}^n\,,$$

avec

$$D^m_{j\ell} = \chi(\mathcal{L}_\ell(\sigma^n_{j\ell}) + \tilde{R}^n_{j\ell}) + R'^n_{j\ell} \ ; \quad R'^n_{j\ell} \in S^{-\infty,\alpha_n} \ ,$$

$$\tilde{R}^n_{j\ell} = \sum_{\text{finie}} \tilde{R}^{n,p}_{j\ell}$$

avec $\tilde{R}^{n,p}_{j\ell} \in S_h^{m-2-p-j-n,\alpha_n}$ (on augmentera α_n si nécessaire). On définira ainsi $R^{n+1}_{j\ell} = \sum_{p+q=n} \tilde{R}^{qp}_{j\ell}$. Egalement

$$D^k_t \, E^n_{j|t=0} = \chi(\textstyle\sum^m_{\ell=1} \lambda^k_\ell \, C^n_{j\ell}(0 \ , \xi \ y) + \sum_{\text{finie}} \tilde{\rho}^{np}_{jk} \ , \quad \tilde{\rho}^{np}_{jk} \in S_n^{-n-j+k-1,\alpha_n} \ ,$$

et on posera

$$\rho^{n+1}_{jk} = \sum_{p+q=n} \tilde{\rho}^{qp}_{jk} \in S_h^{-(n+1)-j+k,\alpha_n} \ .$$

De sorte que, pour $t \in I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$,

$$A(\textstyle\sum^N_{n=0} E^n_j) = \sum^m_{\ell=1} \int D'^N_{j\ell} \exp(i\varphi_\ell) \quad \text{avec} \quad D'^N_{j\ell} \in S^{m-2-j-N,\alpha_N} \ ,$$

$$D^k_t(\textstyle\sum^N_{n=0} E^n_j)_{|t=0} = \delta_{jk} + \rho'^N_{jk} \quad \text{avec} \quad \rho'^N_{jk} \in S^{-j+k-1,\alpha_N} \ .$$

Pour sommer, on utilise la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> $C_j \in \hat{S}^{m_j,\epsilon}$, $m_j \longrightarrow -\infty$, <u>il existe</u> $C \in \hat{S}^{m_0,\epsilon}$ <u>tel que</u> $C - \sum_{j<N} C_j \in \hat{S}^{m_N,\epsilon}$.

La preuve est classique. On a donc obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME II.1. - <u>Soit</u> $I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$, <u>on construit une paramétrixe pour le problème de Cauchy sous la forme</u>

$$\begin{cases} PE_j = R_j \\ D^k_t \, E_{j|t=0} = \delta_{jk} + \rho_{jk} \end{cases} , \ \underline{\text{pour}} \quad t \in I_0 \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1 \ , \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \ .$$

$E_j = \sum^m_{\ell=1} \int C_{j\ell} \exp(i\varphi_\ell)$, <u>où</u> $C_{j\ell} \in \hat{S}^{-j,\epsilon}$, $R_j = \int R_j(t \ , \xi \ , y)$ <u>et</u> $\rho_{jk} = \int \rho_{jk}(\xi \ , y)$ <u>sont des pseudo-différentiels avec</u> $R_j \in \hat{S}^{-\infty,\epsilon}$, $\rho_{jk} \in \hat{S}^{-\infty,\epsilon}$.

Posant $\tilde{E}_j = E_j - \sum^{m-1}_{k=0} (t^k/k!)\rho_{jk}$, on obtient

$$\begin{cases} P\tilde{E}_j = R'_j \\ D^k_t \, \tilde{E}_{j|t=0} = \delta_{jk} \end{cases} , \ R'_j(t \ , \xi \ , y) \in \hat{S}^{-\infty,\epsilon} \ .$$

On s'inspire maintenant de [3] pour construire une solution élémentaire à l'aide de la paramétrixe obtenue.

PROPOSITION 6. - <u>Soit</u> $I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$ <u>et</u> $s \in I_0$, $R > 0$, <u>il existe un intervalle</u> $I_1 \ni s$, $I_1 \subset I_0$, <u>et un opérateur</u>

$$E'^{(s)} : C_b^0(I_1 , L_\nu^2) \longrightarrow C_b^{m-1}(I_1 , L_\nu^2)$$

<u>tel que</u>

$$\begin{cases} PE'^{(s)} f = f \\ D_t^k E'^{(s)} f_{|t=0} = 0 \end{cases} , \quad 0 \leq k \leq m-1 ,$$

<u>pour</u> $f \in C_b^0(I_1 , L_\nu^2)$, $t \in I_1$ <u>sur</u> $B(0 , R)$.

<u>Démonstration</u>. - La construction faite plus haut avec pous surface $t = 0$ est valable encore pour $s \in I_0$ avec pour surface initiale $t = s$. Les opérateurs $E_j^{(s)}$ ainsi construits dépendent d'une manière régulière de s . On pose ainsi

$$(E^{(s)} \Phi)(z , t) = \int_s^t \tilde{E}_{m-1}^{(\tau)}(\Phi(\cdot , \tau))(z, , t)\, d\tau ,$$

pour $\Phi \in C^0(I_0 , \Lambda_b^\sigma)$, $\sigma \in \underset{\sim}{N}$.

On a $E^{(s)} \Phi \in C^{m-1}(I_0 , \Lambda^\sigma)$ et

$$PE^{(s)} \Phi = \Phi(z , t) + \int_s^t P\tilde{E}_{m-1}^{(\tau)}(\Phi(\cdot , \tau))(z , t)\, d\tau .$$

Or

$$(P\tilde{E}_{m-1}^{(\tau)})(\Phi(\cdot , \tau)(z' , t) = \int r(t , \tau , \xi , y)\, \Phi(\xi + iy , \tau)\, \exp(z\bar{z})\, d\nu(z) ,$$

où r vérifie

$$\sup_{t\in I_0, \tau\in I_0} \|\partial_t^p \partial_\tau^q D_\xi^j D_y^k r(t , \tau , \xi , y)\| \leq C(1 + \|\xi\|)^{-N} \exp(\tfrac{\varepsilon}{2} \|y\|^2) , \quad \forall N \in \underset{\sim}{N} .$$

On écrit ainsi $PE^{(s)} \Phi = \Phi + R^{(s)} \Phi$, avec

$$(R^{(s)} \Phi)(z , t) = \int_s^t \pi(\Phi(\cdot , \tau)\, r(t , \tau , \cdot , \cdot))(z)\, d\tau .$$

Et on note que $\tau \longrightarrow \pi(\Phi(\tau , \cdot)\, r(t , \tau\, \cdot))$ est continue sur I_0 , pour $t \in I_0$ à valeurs dans $\Lambda^{+\infty}$, pour $\Phi \in C^0(I_0 , \Lambda_b^\sigma)$, $\sigma \in \underset{\sim}{N}$.

Soient ψ et $\varphi \in C_b^\infty(E)$, $\mathrm{supp}\, \psi$ et $\mathrm{supp}\, \varphi \subset B(0 , R)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ au voisinage du support de ψ . Soit $u \in C^0(I_0 , \mathcal{E}^\sigma)$, $\sigma \in \underset{\sim}{N}$, on note $R'^{(s)} u = R^{(s)}(\varphi u)(x , t)$ (on donne encore le nom $R^{(s)}$ à l'opérateur sur $C^0(I_0 , \mathcal{E}_b^\sigma)$ déduit de l'opérateur $R^{(s)}$, défini ci-dessus, par l'isomorphisme θ). $R'^{(s)} u \in C^0(I_0 , \mathcal{E}^n)$, $\forall n \in \underset{\sim}{N}$. On a

$$\|R'^{(s)} u(t)\|_0 \leq C_R(t - s)(\sup_{(\tau,t)\in I_0} |r(\tau , t , \xi , y)|\, \exp(-\tfrac{\varepsilon}{2} \|y\|^2))\, \sup_{s\leq\tau\leq t} \|u(\tau)\|_0 ,$$

avec $u \in C^0(I_0, L^2_\nu)$. Donc $\forall\ s \in I_0$, $\exists\ I_1$ intervalle contenant s tel que

$$\sup_{t\in I_1} \|R'^{(s)}\ u(t)\|_0 \leq \frac{1}{2} \sup_{t\in I_1} \|u(t)\|_0 .$$

On peut donc inverser $1 + R'^{(s)}$ dans $\mathcal{L}(C^0_b(I_1, L^2_\nu))$, et on définit

$$E'^{(s)} = E^{(s)}(\varphi(1 + R'^{(s)}) .$$

$E'^{(s)}$ applique donc $C^0_b(I_1, L^2_\nu) \longrightarrow C^{m-1}_b(I_1, L^2_\nu)$, et on a

$$\text{pour } f \in C^0_b(I_1, L^2_\nu) , \quad \psi PE'^{(s)} f = \psi f .$$

On a bien prouvé la proposition.

Ceci permet d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME II.2. - Soit $(t_0, x_0) \in \underset{\sim}{R} \times E$, soit $I_0 \subset\subset \underset{\sim}{R}$ tel que $t_0 \in I_0$. Il existe un voisinage $I_1 \times \mathcal{U}$ de (t_0, x_0) sur lequel $\forall\ \sigma \in \underset{\sim}{R}$, $\forall\ \sigma_j \in \underset{\sim}{R}$, $\forall\ k \in \underset{\sim}{N}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Pu = f \\ D^j_t\ u_{|t=t_0} = g_j \end{cases},$$

à une unique solution $u \in \mathcal{K}_{\tau,\tau'}$, pour $f \in C^0(I_0, \mathcal{L}^\sigma) \cap \mathcal{K}_{k,\sigma}(I \times E)$ et $g_j \in \mathcal{L}^{\sigma_j}$ donnée par

$$u = E(\varphi f) + \textstyle\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{E}_j(\varphi g_j) - E'(\psi\ R(\varphi f) + \sum_{j=0}^{m-1} \psi\ R'_j(\varphi g_j))$$

sur $I_1 \times \mathcal{U}$.

$\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^\infty_b(E)$ ont leurs supports au voisinage de x_0 . Les opérateurs suivants sont continus.

$$\psi\tilde{E}_j\ \varphi : \ \mathcal{L}^{\sigma_j} \longrightarrow \mathcal{K}_{m,\sigma_{j-m+j}}(I \times E) \cap C^m(I_1, \mathcal{L}^{\sigma_{j-m+j}}) ,$$

$$\psi E\varphi : \ C^0(I_1, \mathcal{L}^\sigma) \cap \mathcal{K}_{k,\sigma}(I \times E) \longrightarrow C^m(I_1, \mathcal{L}^{\sigma-1}) \cap \mathcal{K}_{k+m,\sigma-1}(I_1 \times E) .$$

$E'(\psi R\varphi f) \in C^m(I_1, \mathcal{L}^{+\infty})$ sur $I_1 \times \mathcal{U}$ et $E'(\psi R'_j\ \varphi g_j) \in C^m(I, \mathcal{L}^{+\infty})$ sur $I_1 \times \mathcal{U}$.

Démonstration. - L'unicité a été prouvé au théorème II.1. On a noté E (respectivement E') pour $E^{(t_0)}$ (respectivement $E'^{(t_0)}$). $\tilde{E}_j$ sont les opérateurs construits à l'issue du théorème II.1. Il est clair que u est une solution du problème de Cauchy au voisinage de (t_0, x_0) . Il reste à vérifier les continuités. Il est clair que $(\psi E_j\ \varphi)(t)$ applique $\mathcal{L}^{\sigma_j}(E) \longrightarrow \mathcal{L}^{\sigma_j+j}(E)$, $\forall\ t \in I_0$, $\sigma_j \in \underset{\sim}{R}$ (on applique la proposition 2 pour $\sigma_j \in \underset{\sim}{N}$ et on procède ensuite par interpolation et transposition) . On voit ensuite que

$$_{\psi}\tilde{E}_j\ \varphi \in C^m(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{\sigma_j - m + j}) \cap \mathcal{K}_{m,\sigma_j - m+j}(I_0 \times E)\ .$$

De même, l'opérateur $(_{\psi}E\varphi)u = \int_{t_0}^{t} (_{\psi}\tilde{E}^{\tau}_{m-1}\ \varphi)(u(\cdot\ ,\ \tau))\ d\tau$ applique

$$C^0(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{\sigma}) \cap \mathcal{K}_{k,\sigma}(I \times E) \longrightarrow C^m(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{\sigma-1}) \cap \mathcal{K}_{k+m,\sigma-1}(I \times E)\ .$$

Par ailleurs $(_{\psi}R\varphi)(f) \in C^0(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$ et $_{\psi}R'_j\ \varphi g_j \in C^{\infty}(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$. Si $\tilde{f} \in C^0(I_0\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$, $g = (1 + R')^{-1}\ f$ vérifie $\varphi g = \varphi\tilde{f} - \varphi R\varphi g \in C^0(I_1\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$, et donc $_{\psi}E'\ \tilde{f} = {}_{\psi}E(\varphi g) \in C^m(I_1\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$.

Donc $E'(_{\psi}R\varphi)f) \in C^m(I_1\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$ sur $I_1 \times \mathcal{U}$ et $E'(_{\psi}R'_j(\varphi g_j)) \in C^m(I_1\ ,\ \mathcal{E}^{+\infty})$ sur $I_1 \times \mathcal{U}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, II : A family of related function spaces application to distribution theory, Comm. on pure and applied Math., t. 20, 1967, p. 1-101.

[2] BEREZIN (F. A.). - Wick and Anti-Wick operators symbols, [en Russe] Mat. Sbornik, t. 86(128), 1971, p. 578-610 ; [en Anglais] Math. USSR-Sbornik, t. 17, 1971, p. 577-606.

[3] DUISTERMATT (J. J.). - Fourier integral operators. - New York, Courant Institute of mathematical Sciences, 1973.

[4] DUISTERMAAT (J. J.) and HÖRMANDER (L.). - Fourier intégral operators, II, Acta Math., Uppsala, t. 128, 1972, p. 183-269.

[5] GROSS (L.). - Potential theory on Hilbert space, J. of funct. Analysis, t. 1, 1967, p. 123-181.

[6] HÖRMANDER (L.). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[7] HÖRMANDER (L.). - Fourier integral operators, I, Acta Math., Uppsala, t. 127, 1971, p. 79-183.

[8] KRÉE (P.). - Calcul d'intégrales et de dérivées en dimension infinie, J. of funct. Analysis, t. 31, 1979 (à paraître).

[9] KRÉE (P.) and RACZKA (R.). - Kernels and symbols of operators in quantum field theory, Ann. Inst. H. Poincaré, Section A, t. 28, 1978, p. 41-73.

[10] LASCAR (B.). - Théorème de Cauchy-Kovalewsky et théorème d'unicité d'Holmgren pour des fonctions d'une infinité de variables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 691-694.

[11] LASCAR (B.). - Propriétés locales d'espaces de Sobolev en dimension infinie, Comm. in partial diff. Equations, t. 1, 1976, p. 561-584.

[12] LASCAR (B.). - Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité en dimension infinie, Comm. in partial diff. Equations, t. 2, 1977, p. 31-57.

[13] LASCAR (B.). - Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, Thèse Doctorat d'Etat, Université P. et M. Curie, 1978.

[14] SCHWARTZ (L.). - Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. - Bombay, Oxford University Press, 1973 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 6).

[15] TRÈVES (F.). - Linear partial differential operators with constant coefficients. - New York, Gordon and Breach, 1966 (Mathematics and its Applications, 6).

[16] TRÈVES (F.). - Topological vector spaces, distributions and kernels. - New York, Academic Press, 1967 (Pure and applied Mathematics. Academic Press, 25).

[17] VIŠIK(M. I.) and BLEHER (P.). - Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels d'une infinité de variables, [en Russe] Mat. Sbornik, t. 86(128), 1971, p. 446-494 ; [en Anglais] Math. USSR-Sbornik, t. 15, 1971, p. 443-491.