Philippe Paclet

Espaces de Dirichlet et capacités fonctionnelles sur des triplets de Hilbert Schmidt

Séminaire Paul Krée, tome 4 (1977-1978), exp. nº 5, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1977-1978__4__A6_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
4e année, 1977-1978, n° 5, 36 p.

ESPACES DE DIRICHLET ET CAPACITÉS FONCTIONNELLES SUR DES TRIPLETS DE HILBERT SCHMIDT

par Philippe PACLET (*)

Introduction.

La théorie quantique des champs motive (cf. [2], [12], [26]) l'étude d'intégrales du type $\int_X |\text{grad } f|^2 \, d\mu$, où μ est une probabilité de Radon sur un espace X de dimension infinie et où grad f , tout en coïncidant avec la notion usuelle quand f dépend régulièrement d'un nombre fini de coordonnées, reste encore à définir pour une large classe de fonctions. L'idée d'utiliser systématiquement les techniques d'espaces de Dirichlet, de Beurling Deny revient à ALBEVERIO, HØEGH-KROHN qui abordent cette étude dans le cadre des triplets nucléaires de GEL'FAND-VILENKIN (rigged Hilbert spaces, cf. [9]) (cf. [1], [2]).

En particulier, ils définissent le gradient par une technique de fermeture d'opérateurs symétriques sur $L^2_\mu(X)$.

On se place ici dans un cadre différent puisqu'on travaille sur des triplets de Hilbert Schmidt (cf. définition (I.1.1) ; ce choix est principalement dicté par une raison technique. On veut par exemple avoir à sa disposition les fonctions tests du type $HC^1_b(X)$ ou $HC^1_0(X)$ (cf. (II.2.5 (b))) étudiées dans [10], [11], et [19].

Dans le chapitre I, on fait une série d'hypothèses sur la mesure μ avec laquelle on travaille (cf. (I.1.4)) ; puis on fait apparaître une correspondance biunivoque entre de telles mesures et les systèmes de Weyl de représentations unitaires des relations de commutation canoniques (cf. [2], théorème I.2). Dans un sens, ce théorème constitue une adaptation du théorème de Gelfand (cf. [9]) au cadre Hilbert Schmidt. Dans l'autre, il s'agit d'un résultat original d'extension des représentations unitaires.

Dans le chapitre II, après quelques préliminaires de dimension finie, on donne une définition du grad au moyen d'un système cohérent d'équations en dimension finie (voir définition (II.2.1)). Cette méthode constitue une généralisation de celle employée par M. et P. KRÉE quand μ est la mesure gaussienne (cf. [15], [17]). On obtient ainsi un espace de Dirichlet N , au sens de [6], (voir proposition (II.2.11)) assez riche (proposition (II.2.6)) dans lequel les fonctions cylindriques régulières sont denses (proposition (II.2.10)). Certains éléments peuvent même être pris à support compact (proposition (II.2.14)).

(*) Texte reçu en Janvier 1979.
Thèse de troisième cycle de l'Université P. et M. Curie, Paris 1979.
Philippe PACLET, 40 rue Lacépède, 75005 PARIS.

Dans le chapitre III, on développe une théorie du potentiel associée à l'espace de Dirichlet N , en analogie avec la théorie de Beurling Deny (cf. [6]) quand X est localement compact. Certains résultats (ceux qui n'utilisent que la structure hilbertienne de N et la propriété de Dirichlet) se transcrivent de façon immédiate (voir (III.1.7)).

D'autres nécessitent une adaptation, ainsi le théorème de synthèse spectrale (théorème (III.1.13)). On fait ensuite une étude détaillée de la théorie de la capacité associée (cf. [6]). Le résultat de base est que la capacité d'une partie faiblement compacte peut être approchée autant qu'on le veut par la capacité d'un ouvert cylindrique la contenant (lemme (III.2.9)). Comme corollaire (théorème (III.2.8)), en utilisant uniquement le théorème de Choquet sur la capacitabilité des parties analytiques dans sa forme originale (cf. [4], [5]), valable pour celles incluses dans un K_σ , on obtient la capacitabilité de toutes parties analytiques. Enfin, on établit une formule de calcul commode de la capacité d'un faiblement compact qui ne fait intervenir que des opérations "en dimension finie" (théorème (III.2.15)). Les méthodes employées s'appuient sur des résultats de théorie de la mesure sur un espace complètement régulier (on fait, en début de chapitre, quelques rappels et compléments (proposition (III.0.8)) sur la notion de topologie stricte introduite par GARLING (cf. [7], [8])).

Dans l'appendice B, on généralise, au cas où X est un Hilbert séparable, le théorème d'équivalence entre la propriété de Dirichlet pour un sous-espace hilbertien de $L^2_\mu(X)$ et le caractère sous-markovien du semi-groupe associé (cf. [6]).

Comme dans le cas classique, on s'appuie sur un théorème pour la représentation des opérateurs sous-markoviens par un noyau mesure. Le principe de la démonstration est ici différente.

Je voudrais remercier le Professeur P. KRÉE qui a attiré mon attention sur ces problèmes et qui m'a assisté avec patience tout au long du travail. D'ailleurs les méthodes employées ici s'inspirent directement d'idées du séminaire. Je remercie aussi B. LASCAR pour les discussions très profitables que nous avons eues (en particulier pour m'avoir signalé une erreur dans une première démonstration du théorème (III.1.4)).

Que le Professeur G. CHOQUET, Président, et les autres membres du jury Mr P. LELONG et Mr J. VAILLANT trouvent ici toute ma gratitude pour avoir accepté de s'intéresser à mon travail et de participer à la commission.

Enfin j'aimerais dédier cette thèse à la mémoire du regretté Professeur G. STAMPACCHIA sous la direction bienveillante duquel, à Pise, j'ai pu me familiariser avec la théorie classique des espaces de Dirichlet.

I. Mesures quasi-invariantes et triplets de Hilbert Schmidt.

I.1 Les données.

(I.1.1) DÉFINITION. - On appelle triplet de Hilbert Schmidt un schéma du type suivant $X' \overset{i'}{\hookrightarrow} H \overset{i}{\hookrightarrow} X$, où X et H sont des espaces de Hilbert séparables réels. X' est le dual X ; i est une injection, à image dense de type Hilbert Schmidt dont i' est la transposée après identification de H à son dual. Les points de X' sont donc identifiés à des points de H ou de X.

On notera $|\ |_H$ et $\|\ \|_X$ les normes de H et X ; $(\ ,\ )$ indifféremment le produit scalaire sur H ou son extension à la dualité $X - X'$ (cela revient à ne pas écrire les injections i et i'); enfin $\langle\ ,\ \rangle_X$ désignera le produit scalaire sur X.

En choisissant une base orthonormée $(e_n)_{n\in N}$ qui diagonalise i et telle que $e_n \in X'$, pour tout n, on peut identifier H avec $\ell^2(\underset{\sim}{N})$, et X avec $\ell^2_\lambda(\underset{\sim}{N})$, où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots) \in \ell^2(\underset{\sim}{N})$, et $\ell^2_\lambda(\underset{\sim}{N}) = \{(a_n) : \sum_{n\in N} \lambda_n^2 a_n^{2\lambda} < +\infty\}$. La b. o. n. de H se trouve alors identifiée à la base canonique de $\ell^2(\underset{\sim}{N})$.

On désigne par X_i le sous-espace de X' engendré par $\{e_1, \dots, e_i\}$ et par f_i l'application de X dans X_i qui à $x \in X$ associe $f_i(x) = \sum_{k=1}^{i} (x, e_k)e_k$. Notons que restreinte à H, f_i coïncide avec la projection orthogonale sur X_i dans H mais que f_i peut être vue également comme projection orthogonale sur X_i par rapport au produit scalaire de X. Enfin, si $i \geqslant j$, $f_j = f_{i,j} \circ f_i$, où $f_{i,j}$ désigne la projection de X_i sur X_j.

(I.1.2) DÉFINITION. - Une probabilité de Radon μ sur X est dite quasi-invariante par les translations de X' si, pour tout $\xi \in X'$, la translatée μ_ξ de μ par le vecteur ξ est absolument continue par rapport à μ. La densité $\alpha(\xi, .)$ de μ_ξ par rapport à μ est appelée module de quasi-invariance de μ. Pour tout $\xi \in X'$, on sait que $\alpha(\xi, .) > 0$, μ p. p., que $\alpha(\xi, .) \in L^1_\mu(X)$. Enfin $\alpha(., .)$ vérifie l'équation fonctionnelle

(I.1.3) $\forall\ \xi, \xi' \in X'$, $\alpha(\xi + \xi', .) = \alpha(\xi', . + \xi)\ \alpha(\xi, .)$, μ p. p.

(I.1.4) Soit μ une probabilité de Radon sur X : On appelle (H) le système d'axiomes suivants :

(H)

(H_1) μ est quasi-invariante par les translations de X'. Pour $\xi \in X'$, soit $\alpha(\xi, .)$ son module de quasi-invariance.

(H_2) $\forall\ \xi \in X'$, $t \longmapsto \alpha^{1/2}(t\xi, .)$ de $\underset{\sim}{R}$ dans $L^2_\mu(X)$ admet une dérivée en 0 notée $R(\xi)$ (cf. [1]).

(H_3) L'application $\xi \longmapsto R(\xi)$ de X' dans $L^2_\mu(X)$ qui est linéaire, d'après (I.1.3) et (H_2), est décomposable, au sens suivant : Il existe une application $\tilde\beta \in L^2_\mu(X, X)$ telle que, pour tout $\xi \in X'$, on ait $R(\xi)(\ .\ ) = {}_X(\tilde\beta(\ .\ ), \xi)_{X'}$, μ p. p. (cf. [18]).

(I.1.5) Remarque.

(H_2) entraîne que, pour tout $\xi \in X'$, $\frac{1}{t}\{\alpha(t\xi, .) - 1\} \longrightarrow 2R(\xi)$ dans $L^1_\mu(X)$, si $t \longrightarrow 0$. On pose $\beta = 2\tilde{\beta}$.

(I.1.6) Pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, on note μ_i l'image de μ sur X_i par l'application f_i. On utilisera la notion d'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire Φ définie sur X par rapport à la tribu engendrée par f_i et à la mesure μ. On notera simplement par $E_i[\Phi]$ cette espérance conditionnelle. On rappelle que, pour tout p, $1 \leq p \leq +\infty$, E_i définit une contraction (et même un opérateur sous-markovien) de $L^p_\mu(X)$ dans $L^p_{\mu_i}(X_i)$ et que $Id - E_i \longrightarrow 0$ fortement dans $L^p_\mu(X)$ (cf. [26]).

Une variable Φ définie sur X sera dite cylindrique s'il existe $i \in \underset{\sim}{N}$ tel que Φ soit f_i-mesurable, autrement dit s'il existe une variable φ, définie sur X_i, telle que $\Phi = \varphi \circ f_i$. Pour simplifier les notations, il nous arrivera d'identifier Φ et φ. De même, un borélien est cylindrique s'il écrit $f_i^{-1}(B_i)$ pour un certain $i \in \underset{\sim}{N}$ et un certain borélien B_i de X_i.

(I.1.7) PROPOSITION. - Soit μ une probabilité de Radon sur X vérifiant les hypothèses (H), alors, pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, μ_i est quasi-invariante par les translations de X_i et son module de quasi-invariance, $\alpha_i(\cdot, .)$, est donné par

(I.1.8) $\forall y \in X_i$, $\forall \xi \in X'$ tels que $f_i(\xi) = y$,

$$\alpha_i(y, .) = E_i[\alpha(\xi, .)], \quad \mu_i \text{ p. p.}$$

De plus, $\forall y \in X_i$, $\frac{1}{t}\{\alpha_i(ty, .) - 1\}$ tend dans $L^1_{\mu_i}(X_i)$ vers un élément $2R_i(y) \in L^2_{\mu_i}(X_i)$, quand $t \longrightarrow 0$.

Enfin R et R_i sont liés par la relation

(I.1.9) $$\forall \xi \in X', \quad E_i R(\xi) = R_i(f_i(\xi)).$$

Preuve. - On a, en effet, les relations

$$\mu^i_y = \{f_i(\mu)\}_y = \{f_i(\mu_\xi)\} = f_i\{\alpha(\xi, .)\mu\} = E_i[\alpha(\xi, .)]\mu_i,$$

en utilisant la quasi-invariance de μ et la définition de l'espérance conditionnelle. Ceci prouve la quasi-invariance de μ_i et la relation (I.1.8). (I.1.9) résulte alors de la remarque (I.1.5) et de la continuité de E_i de $L^2_\mu(X)$ dans $L^2_{\mu_i}(X_i)$.

(I.1.10) Remarques.

1° Puisque $\dim X_i < +\infty$, pour tout $i \in N$, l'application linéaire $y \longrightarrow 2R_i(y)$ de X_i dans $L^2_{\mu_i}(X_i)$ est décomposée (cf. [18]) par $\forall \beta_i \in L^2_{\mu_i}(X_i, X_i)$:

(I.1.11) $$\forall y \in X_i, \quad 2R_i(y)(\cdot) = (\beta_i(.), y).$$

D'où

(I.1.11 bis) $$\beta_i = f_i(E_i[\beta]) = E_i[f_i(\beta)].$$

2° Il est bien connu (cf. [9]) que μ_i est alors équivalente à la mesure de Lebesgue sur X_i :

(I.1.12) $$d\mu_i = \rho_i \, d^i x \text{ , avec } \rho_i > 0 \text{ Lebesgue-p. p.}$$
$$\forall\, y \in X_i \text{ , } \alpha_i(y \text{ , } .) = \frac{\rho_i(. + y)}{\rho_i} \text{ .}$$

Enfin, $\beta_i = (D\rho_i/\rho_i) \in L^2_{\mu_i}(X_i)$ où $D\rho_i$ désigne le gradient au sens des distributions de ρ.

I.2. Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure μ sur X vérifiant (H).

(I.2.1) Considérons le système d'hypothèses suivant :

(R) Il existe un quadruplet (Y , U , V , K) où

(R_1) Y est un espace de Hilbert réel séparable tel que $X' \overset{j}{\hookrightarrow} Y \overset{k}{\hookrightarrow} H$, où j, k sont des injections continues à image dense ; j est de type Hilbert Schmidt.

(R_2) $K\langle\, ,\, \rangle$ est un espace de Hilbert complexe.

(R_3) U est une représentation unitaire, fortement continue du groupe additif de Y, à valeurs dans K.

(R_4) Il existe $\Omega \in K$ tel que $\{U(y)\Omega \text{ ; } y \in Y\}$ soit total dans K.

(R_5) V est une représentation unitaire du groupe additif de Y à valeurs dans K.

(R_6) Pour tout y de Y, Ω appartient au domaine du générateur infinitésimal du semi-groupe $V(ty)$.

(R_7) U et V vérifient les relations de commutation, $\forall\, x , y \in Y$,
$$V(y)\, U(x) = \exp(i(x , y))\, U(x)\, V(y) \text{ .}$$

(I.2.2) Remarque.

Sous les hypothèses (R_1), (R_2), (R_3) et (R_4), on sait que V est obligatoirement fortement continue (cf. [14]).

(I.2.3) THÉORÈME.

(a) A toute probabilité de Radon μ sur X vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) correspond un quadruplet (Y , U , V , K) vérifiant les hypothèses (R_1)-(R_7).

(b) Réciproquement, à tout quadruplet (Y , U , V , K) vérifiant (R_1)-(R_7) correspond une probabilité de Radon μ sur X vérifiant (H_1'), (H_2), (H_3), où (H_1') signifie

(H_1') La mesure μ est quasi-invariante par les translations de Y.

Les relations liant la mesure et son module de quasi-invariance d'une part et les représentations unitaires U et V d'autre part seront explicitées au cours de la démonstration.

(I.2.4) COROLLAIRE. - <u>Une probabilité de Radon μ sur X vérifiant (H_1)-(H_3) est obligatoirement quasi-invariante par les translations d'un espace de Hilbert Y, contenant X' et tel que l'injection $X' \longrightarrow Y$ soit à image dense et de type Hilbert Schmidt.</u>

(I.2.5) <u>Démonstration du théorème.</u>

(b) En remplaçant le théorème de Minlos par le théorème de Sazanov (cf. [25]), on adapte l'idée du théorème de Gelfand (cf. [9]). La probabilité μ sur X est donnée par sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$:

(I.2.6) $$\forall\ \xi \in X'\ ,\quad \hat{\mu}(\xi) = \langle U(\xi)\Omega\ ,\ \Omega\rangle_K$$

qui est continue sur X' pour la topologie de Hilbert Schmidt (comme restriction à X' d'une fonctionnelle continue sur Y).

Grâce à (R_4), on montre que K est isométrique à $L^2_\mu(X)$ et que, dans cette isométrie, $U(\xi)\Omega$ ($\xi \in X'$) correspond à la fonction $\exp(i(\xi\ ,\ .))$. Pour alléger les notations, on n'écrit pas cette isométrie. On pose alors $\alpha^{1/2}(y\ ,\ .) = V(y)\Omega$, pour $y \in Y$, et l'on montre à l'aide de (R_7) et (I.2.6) que, pour tout $y \in Y$, les mesures μ_y et $\alpha(y\ ,\ .)\mu$ ont même transformée de Fourier, et donc que μ est quasi-invariante par les translations de Y. (R_6) se traduit alors directement en (H_3) étendue à tous les éléments de Y ; l'application $y \longrightarrow R(y)$ de Y dans $L^2_\mu(X)$ est continue. En effet, pour tout $y \in Y$, $R(y) = \lim_{i\to+\infty} E_i\, R(y)$ dans $L^2_\mu(X)$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de prouver la continuité de chaque $E_i\, R$. Mais, d'après (I.1.9), $E_i\, R(y) = R_i(f_i y))$; R_i est continue puisque définie sur un espace de dimension finie, et f_i l'est aussi par construction. La restriction à X' de R est donc de type Hilbert Schmidt.

$$R \in H.S(X'\ ,\ L^2_\mu(X) \simeq X \widehat{\otimes}^{H.S} L^2_\mu(X) \simeq L^2_\mu(X\ ,\ X)\ ;$$

ce qui signifie bien que R vérifie (H_3).

(Fin de la démonstration de (b))

(a) On prendra pour espace de représentation $L^2_\mu(X)$ et on commense par définir de façon naturelle $U(\xi)$ et $V(\zeta)$, pour $\xi\ ,\ \zeta \in X'$, en posant, pour $\Phi \in L^2_\mu(X)$:

(I.2.7) (i) $U(\xi)\ \Phi(.) = \exp(i(\xi\ ,\ .))\ \Phi(.)$;

(ii) $V(\zeta)\ \Phi(.) = \alpha^{1/2}\ (\xi\ ,\ .)\ \Phi(. + \zeta)$.

On vérifie sans problème que $U(\xi)$ et $V(\zeta)$ sont unitaires, et qu'ils vérifient les relations de commutation. Comme μ est une probabilité de Radon, la réciproque du théorème de Sazanov fournit un opérateur de Hilbert Schmidt A sur X' tel que la transformée de Fourier de μ, définie sur X', soit continue par rapport à la semi-norme $\|A(\xi)\|_{X'}$.

Pour $\xi \in X'$, posons $|||\xi|||^2 = |\xi|_H^2 + \|R(\xi)\|_{L^2_\mu}^2 + \|A\xi\|_{X'}^2$. Alors $|||\ |||$ est une norme hilbertienne sur X'. Si $\tilde{Y}$ désigne le complété de X' par rapport à cette norme, i' se prolonge en opérateur continu p de Y dans H tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{Y} & \\ {}^{j}\nearrow & & \searrow^{p} \\ X' & \xrightarrow{\ i\ } & H \end{array}$$

où $\tilde{j}$ est de type hilbert Schmidt.

En projetant $\tilde{Y}$ sur $\tilde{Y}/\ker p = Y$, on obtient un espace de Hilbert qui s'injecte continûment dans H. Enfin, $j = \pi \circ \tilde{j}$ est injective puisque $k \circ \pi \circ \tilde{j} = i'$ l'est, et de type Hilbert-Schmidt puisque $\tilde{j}$ l'est.

(I.2.8) LEMME. - <u>Soit</u> $\Phi \in L^2_\mu(X)$ <u>fixée. Pour tout</u> $\xi \in X'$, <u>posons</u>

$$\theta(\xi) = \int_X U(\xi)1\ d\mu \quad \underline{\text{et}} \quad \eta(\xi) = \int_X V(\xi)\Phi\ d\mu\ .$$

<u>Alors les fonctionnelles</u> θ <u>et</u> η <u>sont continues en</u> 0 <u>pour la norme</u> $|||\ |||$.

<u>Démonstration</u>. - La continuité de θ résulte de la définition de la semi-norme $\|A(\cdot)\|_{X'}$ et de la norme $|||\ |||$.

<u>Continuité de</u> η : Fixons $\xi \in X'$ et considérons l'application

$$t \longrightarrow \eta(t\xi) = \tilde{\eta}(t)$$

de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{R}$. Alors $\tilde{\eta}(t)$ est dérivable en tout t et de dérivée

$$\tilde{\eta}'(t) = -\int_X V(t\xi)\ \Phi R(\xi)\ d\mu\ .$$

On a en effet

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{\tilde{\eta}(t+h) - \tilde{\eta}(t)\} = \lim_{h\to 0} \int_X \frac{1}{h}(V(-h\xi)1 - 1)\ V(t\xi)\Phi\ d\mu$$
$$= -\int_X R(\xi)\ V(t\xi)\Phi\ ,$$

d'après (H_3).

D'où la majoration $\eta'(t) \leq \|R(\xi)\|_{L^2_\mu} \|\Phi\|_{L^2_\mu}$. Enfin, par le théorème des accroissements finis, on obtient

(I.2.9) $$|\eta(\xi) - \eta(1)| \leq \|R(\xi)\|_{L^2_\mu} \|\Phi\|_{L^2_\mu} \leq |||\Phi|||\ \|\xi\|_{L^2_\mu}\ .$$

(Fin de la démonstration du lemme)

<u>Extension de</u> U : Posons, pour $\xi \in X'$, $\gamma(\xi) = U(\xi)1$. Alors γ est uniformément continue par rapport à $|||\ |||$ sur X', puisque

(I.1.10) $$\|U(\xi)1 - U(\xi')1\|_{L^2_\mu} \leq 2(1 - \theta(\xi - \xi'))\ .$$

On peut donc l'étendre à Y tout entier. Pour $y \in Y$, on définit alors $U(y)$ par son action sur $\Phi \in L^2_\mu(X)$:

$$U(y)\ \Phi = \gamma(y) \times \Phi\ .$$

C'est un opérateur unitaire car $|\gamma(y)| = 1$, μ p. p. (c'est une limite μ p. p. d'exponentielles). La dépendance en y est fortement continue : Il suffit de le voir sur le sous-espace dense des fonctions bornées de $L^2_\mu(X)$ en utilisant (I.2.10).

Extension de V : De même, en faisant $\Phi = 1$ dans le lemme (I.2.8), on voit que $\xi \longrightarrow V(\xi)1 = \alpha^{1/2}(\ ,\ .)$ de X' dans $L^2_\mu(X)$ est uniformément continue sur X' pour la norme $|||\ |||$. On note encore $\alpha^{\frac{1}{2}}(y\ ,\ .)$ son extension à Y . Pour $y \in Y$, on définit alors $V(y)$ comme l'unique extension unitaire de l'opérateur défini sur le sous-espace dense des fonctions bornées par

$$\Phi \longrightarrow V(y)\ \Phi = \alpha^{1/2}(y\ ,\ .)\ \Phi(. + y)\ .$$

On a, en effet, pour $\Phi \in L^\infty_\mu(X)$, $y \in Y$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de X' tendant vers y dans Y

$$\|\alpha^{1/2}(y\ ,\ .)\ \Phi(. + y)\|_{L^2_\mu} = \lim_{n\to+\infty} \|\alpha^{1/2}(\xi_n\ ,\ .)\ \Phi(. + \xi_n)\|_{L^2_\mu} = \|\Phi\|_{L^2_\mu}\ ,$$

d'après l'inégalité triangulaire, le théorème de Lebesgue, et le lemme (I.2.8) appliqué à $\Phi = 1$.

On vérifie alors les relations de commutation entre $U(y_1)$ et $V(y_2)$ $(y_1\ , y_2 \in Y)$. Il reste à vérifier (R_6). On garde la notation $R(y)$ pour désigner l'extension de R à tout $y \in Y$. On va prouver que $\frac{1}{t}\{V(ty)1 - 1\}$ tend faiblement vers $R(y)$, pour tout $y \in Y$. Cela suffit d'après l'appendice A.

Soit donc $\Phi \in L^2_\mu(X)$, $y \in Y$ et $\epsilon > 0$ donnés. On choisit $\xi \in X'$ tel que $\|R(\xi) - R(y)\|_{L^2_\mu} \leq \delta/3\|\Phi\|_{L^2_\mu}$, puis $t_0 > 0$ tel que, si $0 < t \leq t_0$,

$$\left|\int_X \left[\tfrac{1}{t}\{V(t\xi)1 - 1\} - R(\xi)\right]\ \Phi\ d\mu\right| \leq \epsilon/3\ ,$$

ce qui est possible d'après (H_2) .

On a alors, pour $0 < t \leq t_0$,

$$\left|\int_X \left[\tfrac{1}{t}\{V(ty)1 - 1\} - R(y)\right]\ \Phi\ d\mu\right|$$

$$\leq \left|\int_X \tfrac{1}{t}\{V(t(y-\xi))1-1\}V(-t\xi)\Phi d\mu\right| + \left|\int_X R(\xi-y)\Phi d\mu\right| + \left|\int_X \left[\tfrac{1}{t}\{V(t\xi)1-1\} - R(\xi)\right]\Phi\ d\mu\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{t}\|R(t(y-\xi))\|_{L^2_\mu}\ \|V(-t\xi)\Phi\|_{L^2} + \|R(\xi-y)\|_{L^2_\mu} + \epsilon/3 \leq \epsilon\ ,$$

où l'on a utilisé, pour le premier terme, l'inégalité (I.2.9) appliquée au vecteur $t(y - \xi)$, et à la fonction $V(-t\xi)\ \Phi$. Le théorème (I.2.3) est ainsi démontré.

II. Les espaces du type Dirichlet sur un triplet de Hilbert Schmidt.

II.0. Rappels et remarques.

(II.0.1) Dans tout ce qui suit, on suppose donnés un triplet de Hilbert Schmidt $X' \hookrightarrow X \hookrightarrow X$ et une probabilité de Radon μ sur X vérifiant les hypothèses (H).

On conserve les notations du chapitre I. On fait, en outre, une hypothèse supplémentaire sur les densités ρ_i de μ_i par rapport à la mesure de Lebesgue sur X_i $(i \in \underset{\sim}{N})$ (voir remarque (I.1.10)).

(C) $\qquad \forall\, i \in \underset{\sim}{N} \quad \rho_i \in C^0(X_i) \quad$ et $\quad \rho_i > 0 \quad$ sur $\quad X_i$.

Enfin, on ne travaille qu'avec des fonctions réelles.

(II.0.2) Remarques.

1° Il existe une injection continue de $C_b^0(X)$ dans $L_\mu^2(X)$ (où $C_b^0(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues bornées sur X). En effet, si $B_X(0\,,\,\varepsilon)$ désigne une boule, dans X , de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, $\mu(B_X(0\,,\,\varepsilon) > 0$; car sinon, en choisissant une suite $(\xi_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ de X' dense dans X et en utilisant la quasi-invariance de μ , on aurait

$$\mu(X) = \mu(\cup_n B_X(\xi_n\,,\,\varepsilon)) \leqslant \textstyle\sum_n \mu(B_X(\xi_n\,,\,\varepsilon)) = 0 \;.$$

2° L'hypothèse (C) entraîne que, pour tout i , il existe une injection continue de $[L^1_{\mu_i}(X_i)\,,\,\sigma(L^1_{\mu_i}\,,\,L^\infty_{\mu_i})]$ dans $[L^1_{loc}(X_i\,,\,dx)\,,\,\sigma(1^1_{loc}(dx)\,,\,C_0^\infty(X_i))]$. On peut donc dériver au sens des distributions les éléments de $L^1_{\mu_i}(X_i)$.

(II.0.3) Définitions.

(a) On appelle contraction normale (c. n.) toute application $T : \underset{\sim}{R} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ telle que $T(0) = 0$ et $|T(x) - T(y)| \leqslant |x - y|$, $\forall\, x\,,\, y \in \underset{\sim}{R}$.

(b) Soit N un espace de Hilbert s'injectant continûment dans $L^2(X\,,\,\mathcal{B}\,,\,m)$, où $(X\,,\,\mathcal{B}\,,\,m)$ est un espace mesuré quelconque, et T une c. n. ; on dira que T opère sur N si, et seulement si, $\forall\, u \in N$, $T \circ u \in N$ et $\|T \circ u\|_N \leqslant \|u\|_N$.

(II.0.4) Exemples de c. n.

Soient $-\infty \leqslant a \leqslant 0 \leqslant b \leqslant +\infty$, on définit $T_a^b : \underset{\sim}{R} \longrightarrow \underset{\sim}{R}$,

$$T_a^b(x) = \sup(a\,,\,\inf(x\,,\,b)) \;.$$

Citons, en particulier, T_0^1 (contraction unité) , $T_0^{+\infty} = T^+$ (contraction partie positive), $T_{-\infty}^0 = T^-$ (contraction partie négative), $\bar{T} = T^+ - T^-$ (contraction valeur absolue).

(II.0.5) Exemples d'espaces de Dirichlet.

L'exemple fondamental est fourni par $H_0^1(\Omega)$ (Ω ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$)), l'espace de

Sobolev d'ordre 1 (cf. [6]). Par simple adaptation du raisonnement valable pour $H_0^1(\Omega)$, on peut trouver de nouveaux exemples d'espaces de Dirichlet en dimension finie (cf. proposition (II.1.5)).

(II.0.6) Rappels.

1° Soit N un sous-espace hilbertien de $L^2(X , \mathcal{B} , m)$; soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite dans N telle que $u_n \longrightarrow v$, m p. p. , et $\sup_n \|u_n\|_N < +\infty$. Alors $v \in N$ et $u_n \longrightarrow v$ faiblement dans N (cf. [1]).

2° Si N est un espace de Dirichlet, alors, pour toute c. n. T , l'application $u \longrightarrow T \circ u$ est continue de N fort dans N fort (cf. [1]).

3° Si a désigne une forme bilinéaire, symétrique, positive, de domaine N , dense dans $L^2(X , \mathcal{B} , m)$, on dit que a est fermée si, et seulement si, N est un espace de Hilbert pour la norme $\|u\|_N^2 = \|u\|_{L^2}^2 + a(u , u)$. On rappelle qu'à une telle forme a , il correspond alors de manière biunivoque :

- un opérateur auto-adjoint positif H , de domaine $\mathcal{D}(H) \subset N$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(H) , \quad \forall \psi \in N , \quad \langle H\varphi , \psi\rangle = a(\Phi , \psi) ;$$

- un semi-groupe auto-adjoint de contractions $P_t = \exp(-tH)$, $t > 0$;
- une résolvante auto-adjointe $R_\lambda = (\lambda + H)^{-1}$, $\lambda > 0$.

On rappelle enfin que les formes a_t , définies sur $L^2(X , \mathcal{B} , m)$ tout entier par $a_t(\varphi , \psi) = \langle((1 - P_t)/t)\varphi , \psi\rangle_{L^2}$ sont dites formes approchées et que $\varphi \in \mathcal{D}(a) = N$ si, et seulement si, $\lim_{t\to 0} a_t(\varphi , \psi) < +\infty$, et, si c'est le cas, $a(\varphi , \psi) = \lim_{t\to 0} a_t(\varphi , \varphi)$ (cf. [6], chapitre III).

II.1. Préliminaires de dimension finie.

On fixe $i \in \underset{\sim}{N}$.

(II.1.1) DÉFINITION. - <u>On appelle N_i le sous-espace de $L^2_{\mu_i}(X_i)$ formé des φ telles qu'il existe $\psi \in L^2_{\mu_i}(X_i , X_i)$ vérifiant $D(\varphi\, dx) = \psi\, dx$, où D désigne le gradient au sens des distributions sur X_i</u> (voir remarque (II.0.2 2°)).

Pour simplifier l'écriture, on note ψ par le symbole $D\varphi$.

(II.1.2) D'ailleurs $C_b^1(X_i) \subset N_i$ et, pour de tels éléments, on retrouve le gradient usuel.

(II.1.3) PROPOSITION.

(a) N_i <u>est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire suivant</u> :

$$\forall \varphi , \quad \varphi \in N_i , \quad \langle\varphi , \psi\rangle_1^i = \int_{X_i} \varphi\psi \, d\mu_i + \int_{X_i} \langle D\varphi , D\psi\rangle \, d\mu_i .$$

(b) $N_i \xrightarrow{Id} L^2_{\mu_i}(X_i)$ <u>est une injection continue à image dense</u>.

Démonstration.

(a) Standard.

(b) En effet, $C_b^1(X_i) \subset N_i$.

(II.1.4) PROPOSITION. - $C_0^\infty(X_i)$ est dense dans N_i .

Démonstration. - Soit $\varphi \in N_i$. Si $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions-plateaux dans $C_0^\infty(X_i)$ vérifiant les hypothèses habituelles, on montre, de façon standard, que $\zeta_n \varphi \longrightarrow \varphi$ dans N_i . On peut donc supposer que φ a un support compact inclus, par exemple, dans une boule de rayon M . On remarquera alors que, puisque $\sup_{x\in B(0,M)} \rho_i(x) = a < +\infty$ et $\inf_{x\in B(0,M)} 1/\rho_i(x) = b > 0$, d'après (C), l'identité est un homéomorphisme de $N_i \cap \{\varphi \ ; \ \operatorname{supp} \varphi \subset B(0 , M)\}$ dans $H^1(X_i) \cap \{\varphi \ ; \ \operatorname{supp} \varphi \subset B(0 , M)\}$, où $H^1(X_i)$ désigne l'espace de Sobolev usuel sur X_i . Il suffit alors d'appliquer le résultat connu de la densité de $C_0^\infty(B(0 , M))$ dans $H^1(X_i) \cap \{\varphi \ ; \ \operatorname{supp} \varphi \subset B(0 , M)\}$.

(II.1.5) PROPOSITION. - N_i est un espace de Dirichlet.

Démonstration. - La démonstration est, là aussi, standard. Donnons-en les grandes lignes. On considère d'abord le cas où $\varphi \in C_0^\infty(X_i)$ et où $T \in C^1(\mathbb{R})$, au quel cas la propriété (II.0.3 (b)) est évidente. Si T est quelconque, on l'approche (simplement suffit) par une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C^1(\mathbb{R})$, et l'on applique (II.0.6 1°)) à la suite $(T_n \circ u)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend μ . p. p. vers $T \circ u$. Si φ est quelconque, on l'approche par une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(X_i)$, et l'on applique cette fois-ci (II . 0 . 6 1°) à $(T \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(II.1.6) D'après la proposition (II.1.3), le point (II.0.6 3°) est applicable à la forme linéaire, symétrique, positive qui à $\varphi , \psi \in N_i$ associe $\int_{X_i} \langle D\varphi , D\psi\rangle \, d\mu_i$. On note H_i , P_t^i , R_λ^i , l'opérateur auto-adjoint, le semi-groupe, et la résoltante correspondants. On appelle H_i l'opérateur de Dirichlet, associé à μ_i . On voit alors, à l'aide de (I.1.9) que $C_b^2(X_i) \subset \mathcal{D}(H_i)$ et que, pour tout $\varphi \in C_b^2(X_i)$,

(II.1.7) $$H_i \varphi = - \tilde{\Delta}\varphi - \langle \beta_i , D\varphi\rangle ,$$

où $\tilde{\Delta}\varphi = \sum_{k=1}^i \lambda_k^2 (\partial^2/\partial^2 e_k)(\varphi)$ et (λ_k) est la suite définissant le produit scalaire de X (cf. (I.1.1)).

II.2. L'espace N .

(II.2.1) DÉFINITION.

(a) Etant donné un élément Φ de $L_\mu^2(X)$, on dit qu'il admet un gradient de carré intégrable s'il existe $\psi \in L_\mu^2(X , X)$ vérifiant

(II.2.2) $$\forall \ i \in \mathbb{N} , \quad E_i[f_i \circ \{\psi + \Phi\beta\}] = D\varphi_i + \varphi_i \ \beta_i$$

au sens des distributions où $\varphi_i = E_i \Phi$ et $D\varphi_i$ désigne le gradient au sens des distributions sur X_i , β et β_i ont été définis en (I.1.5) et (I.1.11).

(b) On note $\tilde{N}$ l'ensemble des $\Phi \in L^2_\mu(X)$ admettant un gradient de carré intégrable.

(II.2.3) Remarques.

1° L'égalité (II.2.2) signifie en particulier que $D\varphi_i \in L^1_{\mu_i}(X_i , X_i)$.

2° Il existe au plus un $\psi \in L^2_\mu(X , X)$ vérifiant les relations (II.2.2), pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$; En effet $E_i \circ f_i \longrightarrow \mathrm{id}$ fortement dans $L^1_\mu(X , X)$.

On appellera ψ le gradient de Φ et on le notera $D\Phi$.

3° Cette définition généralise celle de l'espace $\mathcal{E}^1(X)$ donnée dans [20] par B. LASCAR dans le cas où μ est une mesure gaussienne. En effet, si μ est la mesure normale, l'application β est donnée par $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Id}$; $f_i \circ \beta$ est donc f_i-mesurable et les relations (II.2.2) se lisent alors, en utilisant une propriété bien connue du conditionnement ,

$$\forall\ i \in \underset{\sim}{N} ,\quad E_i[f_i \circ \Phi] = D\varphi_i$$

et

$$D\Phi \in L^2_\mu(X , X) \Longleftrightarrow \sup_i \int_{X_i} \|D\varphi_i\|^2_X \, d\mu_i < +\infty$$

par le théorème de convergence L^2 des martingales vectorielles.

(II.2.4) PROPOSITION. - $\tilde{N}$ est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire

$$\forall\ \Phi , \psi \in N ,\quad \langle \Phi , \psi \rangle_1 = \int_X \Phi\psi \, d\mu + \int_X \langle D\Phi , D\psi \rangle \, d\mu .$$

Démonstration. - Si $(\Phi^n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $\tilde{N}$, ceci entraîne que $\Phi^n \longrightarrow \Phi$ et $D\Phi^n \longrightarrow \psi$ dans $L^2_\mu(X)$ et $L^2_\mu(X , X)$ respectivement. Il suffit de prouver que $\psi = D\Phi$ au sens de (II.2.1), (II.2.2). Fixons $i \in I$; pour tout n , on a

$$E_i[f_i \circ \{D\Phi^n + \Phi^n \beta\}] - \varphi_i^n \beta_i = D(\varphi_i^n) .$$

Quand $n \longrightarrow +\infty$, le terme de gauche tend dans $L^1_{\mu_i}(X_i , X_i)$ (et donc au sens des distributions (cf. (II.0.2 1°))) vers

$$E_i[f_i \circ \{\psi + \Phi\beta\}] - \varphi_i \beta_i ,$$

et le terme de droite, au sens des distributions, vers $D\varphi_i$ (puisque $\varphi_i^n \longrightarrow \varphi_i$ dans $L^2_{\mu_i}(X_i)$).

D'où le résultat suivant.

(II.2.5) Exemples d'éléments de $\tilde{N}$.

(a) Soit $\Phi \in L^2_\mu(X)$ telle que

- $\sup_i \int_{X_i} \|D\varphi_i\|^2_X \, d\mu_i = M < +\infty$,

- $\forall\, i, j \in \underset{\sim}{N}$, $i \geq j$,

$$E_{ij}[f_{ij} \circ \{D\varphi_i + \varphi_i\, \beta_i\}] = D\varphi_j + \varphi_j\, \beta_j \, .$$

Alors $\Phi \in \tilde{N}$ et $\|\Phi\|_1^2 \leq \|\Phi\|_{L^2_\mu}^2 + M$.

La démonstration est standard et utilise le théorème de convergence L^1 des martingales (les variables $D\varphi_i + \varphi_i\, \beta_i$ ($i \in \underset{\sim}{N}$) sont équi-intégrales) (cf. [22]).

(b) On rappelle la définition de la classe $HC_b^1(X)$ (cf. [19], [11]) : Elle est formée des fonctions g définies sur X , universellement Lusin-mesurables (cf. [25]), bornées, telles que, pour tout $x \in X$, l'application $h \longrightarrow g_x(h) = g(x+h)$ de H dans $\underset{\sim}{R}$ soit de classe C^1 , au sens de Fréchet sur H , et que l'application $x \longmapsto D_H\, g(x) = Dg_x(0)$ de X dans H soit universellement Lusin-mesurable et bornée.

<u>Note</u>. - Il existe des $g \in HC_b^1(X)$ non nulles, mais nulles μ. p. p. comme le montre un exemple de B. LASCAR (cf. [21]).

(II.2.6) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $g \in HC_b^1(X)$. <u>Alors les relations</u> (II.2.2) <u>sont vraies avec</u> $\psi = D_H\, g$. <u>En particulier, si</u> $g = 0$, μ. <u>p. p.,</u> $D_H\, g = 0$, μ. <u>p. p., ce qui permet de définir une injection de</u> $HC_b^1(X)$ <u>dans</u> $\tilde{N}$ ([1]).

<u>Démonstration</u>. - On a, par exemple, dans une direction e_k , pour i fixé tel que $e_k \in X_i$ et φ cylindrique de base X_i , et de classe $C_0^\infty(X_i)$ (en notant p_k la projection sur $\underset{\sim}{R}e_k$)

$$\begin{aligned} A &= \int_X p_k(D_H\, g(x))\, \varphi(x)\, d\mu(x) \\ &= \lim_{t\to 0} \int_X \tfrac{1}{t}\{g(x + te_k) - g(x)\}\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \lim_t A(t)\, , \end{aligned}$$

grâce au théorème des accroissements finis qui permet de majorer $\frac{1}{t}\{g(x+te_k) - g(x)\}$ indépendamment de x , et au théorème de Lebesgue.

Mais

$$\int_X g(x + te_k)\, \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_X g(x)\, \varphi(x - te_k)\, \alpha(-\, te_k\, , x)\, d\mu(x)\, .$$

D'où

$$A(t) = \int_X g(x)\, \tfrac{1}{t}\{\varphi(x - te_k)\, \alpha(-\, te_k\, , x) - \varphi(x)\}\, d\mu(x)\, .$$

Le terme entre crochets tend, dans $L^1_\mu(X)$, vers $-\, p_k(D\varphi) - p_k(\varphi\beta)$, quand $t \longrightarrow 0$.

D'où

$$\begin{aligned} A = \lim_{t\to 0} A(t) &= -\int_{X_i} g\{p_k(D\varphi) + p_k(\varphi\beta)\}\, d\mu_i \\ &= -\int_{X_i} E_i(g)\, \frac{\partial}{\partial e_k}\varphi\, d\mu_i - \int_{X_i} E_i[p_k(g\beta)]\, d\mu_i\, , \end{aligned}$$

([1]) Autrement dit l'opérateur D passe au quotient $HC_b^1(X)/\{g = 0\, , \ \mu.\ p.\ p.\}$.

puisque φ et $D\varphi$ sont f_i-mesurables, par hypothèse, où $\partial/\partial e_k$ désigne la dérivée au sens usuel dans la direction e_k. La première intégrale se réécrit

$$- \int_{X_i} g_i(x_i) \frac{\partial}{\partial e_k} \varphi(x_i) \; \rho_i(x_i) \; dx_i \; ,$$

et peut être considérée comme l'accouplement entre la distribution $g_i \; \rho_i \; dx$ et la fonction test $(\partial/\partial e_k)\varphi$.

Par transposition de $(\partial/\partial e_k)$, elle est égale à

$$\int_{X_i} \frac{\partial}{\partial e_k} g_i(x_i)\varphi(x_i)\rho_i(x_i) \; dx_i + \int_{X_i} g_i(x_i)\varphi(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial e_k} \rho_i(x_i)/\rho_i(x_i)\right)\rho_i(x_i) \; dx_i$$
$$= \int_{X_i} p_k(Dg_i) \; \varphi \; d\mu_i + \int_{X_i} p_k(g_i \; \beta_i) \; \varphi \; d\mu_i \; ,$$

d'après (I.1.12).

On vient donc de prouver que

$$E_i[p_k(D_H \; g + g\beta)] = p_k(Dg_i + g_i \; \beta_i) \; .$$

D'où le résultat puisque $\sum_{k=1}^{i} p_k = f_i$ et $\sum_{k=1}^{i} p_k|_{X_i} = id_{X_i}$.

(II.2.7) PROPOSITION. - <u>Pour tout</u> $i \in \underset{\sim}{N}$, N_i <u>s'injecte isométriquement dans</u> $\tilde{N}$.

<u>Démonstration</u>. - Cette injection s'écrit précisément $\varphi \longrightarrow \varphi \circ f_i$. Si $\varphi \in C_0^\infty(X_i)$, $\varphi \circ f_i$ appartient clairement à $HC_b^1(X)$ et l'on a $D_H(\varphi \circ f_i) = D\varphi \circ f_i$. On conclut en appliquant la proposition (II.2.6) et la proposition (II.1.4).

(II.2.8) COROLLAIRE. - <u>L'injection continue de</u> $\tilde{N}$ <u>dans</u> $L_\mu^2(X)$ <u>est à image dense.</u>

<u>Démonstration</u>. - L'image de $\tilde{N}$ contient $\cup_{i \in \underset{\sim}{N}} N_i$ qui est dense à cause de (II.1.3 (b)) et de [18].

(II.2.9) DÉFINITION. - <u>On appelle</u> N <u>l'adhérence dans</u> $\tilde{N}$ <u>de</u> $HC_b^1(X)$. <u>Si</u> μ <u>est la mesure gaussienne,</u> $N = \tilde{N}$ (cf. [15]).

(II.2.10) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $C_{b\;cyl}^\infty(X)$ <u>l'espace des fonctions cylindriques de classe</u> C_b^∞ <u>sur leur base.</u>

<u>Alors</u> $C_{b\;cyl}^\infty(X)$ <u>est dense dans</u> N.

<u>Démonstration</u>. - Soit $g \in HC_b^1(X)$, alors $E_i \; g = g_i \in N_i$ et $E_i \; g \longrightarrow g$ dans N. Il est clair, en effet, que $g_i \in N_i$ à cause des relations (II.2.2) et du fait que g est bornée. Pour ce qui est de la convergence, la seule difficulté provient de l'intégrale $\{\int_X \|Dg - Dg_i\|_X^2 \; d\mu\}^{1/2}$ que l'on majore par

$$\{\int_X \|Dg - E_i[Dg]\|_X^2 \; d\mu\}^{1/2} + \{\int_X \|E_i[Dg - f_i(Dg)]\|_X^2 \; d\mu\}^{1/2}$$
$$+ \{\int_X \|E_i[f_i(Dg)] - Dg_i\|_X^2 \; d\mu\}^{1/2} \; .$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 quand $i \longrightarrow +\infty$ puisque

$$E_i \longrightarrow \mathrm{Id} \text{ fortement } L_\mu^2(X \, , \, X) \; ,$$
$$f_i \longrightarrow \mathrm{Id} \text{ fortement dans } X$$

Le troisième terme est égal, grâce à (II.2.2), à

$$\{\int_{X_i} \|E_i[f_i(g\beta)] - g_i\ \beta_i\|_X^2\ d\mu_i\}^{1/2}$$
$$= \{\int_{X_i} \|E_i\ |gf_i(\beta)| - E_i[g]\ f_i(E_i[\beta])\|_X^2\ d\mu_i\}\ ,\ \text{d'après (I.1.11)}$$
$$= \{\int_{X_i} \|E_i[g\{f_i(\beta) - f_i(E_i[\beta])\}]\|_X^2\ d\mu_i\}^{1/2}$$
$$\leqslant \{\int_X \|g\{f_i|\beta - E_i[\beta]\}\|_X^2\ d\mu\}^{1/2}$$
$$\leqslant \sup_X |g| \{\int_X \|\beta - E_i[\beta]\|_X^2\ d\mu\}^{1/2}$$

qui tend vers 0 quand $i \longrightarrow +\infty$.

Pour conclure, on applique la proposition (II.1.4).

(II.2.11) PROPOSITION. - N est un espace de Dirichlet.

Démonstration. - Si $\Phi \in N$ est cylindrique et si T est une c. n. quelconque, cela résulte des propositions (II.2.7) et (I.1.5). Si Φ est quelconque, on l'approche par des fonctions cylindriques φ_n ; on considère ensuite $(T \circ \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en utilisant la remarque (II.0.6 1°).

(II.2.12) COROLLAIRE. - $C_b^{\infty}\,{}^{+}_{cyl}$ est dense dans $N^+ = \{\Phi\ \ N$ tel que $\Phi > 0$, μ. p. p.$\}$.

Démonstration. - L'argument est ici aussi classique. Nous ne le répétons pas.

(II.2.13) Les éléments de $HC_b^1(X)$ ne sont pas forcément continus sur X. Certains peuvent être donc pris à support compact ; leur ensemble forme la classe $HC_0^1(X)$ (cf. [19]).

(II.2.14) PROPOSITION. - L'espace $HC_0^1(X)$, ou plus précisément son quotient par le sous-espace formé par les éléments nuls μ. p. p., est dense dans N.

Démonstration. - On commence par adapter un résultat de B. LASCAR [2] (cf. [19]) pour construire une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $HC_0^1(X)$ telle que

$$g_n \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad \sup_n |g_n| \leqslant 1\ ,\quad \mu.\ p.\ p.$$
$$Dg_n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \sup_n |Dg_n|_H \leqslant N\ ,\quad \mu.\ p.\ p.$$

La proposition en résultera alors, grâce au théorème de Lebesgue, puisque $g\zeta \in HC_0^1(X)$ si $g \in HC_0^1(X)$ et $\zeta \in HC_b^1(X)$.

Construction de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. - Une inspection de la démonstration de la proposition (2.11) de la référence [19] montre que le seul problème est de construire une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X vérifiant les propriétés suivantes :

$\forall\ n$, S_n est borélienne ;

$\mu(X \setminus S_n) \longrightarrow 0$ et $\nu(X \setminus S_n) \longrightarrow 0$, où ν désigne la mesure normale sur X ;

---

[2] Je remercie vivement B. LASCAR pour m'avoir indiqué la possibilité d'une telle adaptation.

$\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, S_n est relativement compact, convexe, disqué dans X ;

$\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $S_n \cap H$ est ouvert pour la topologie de H ;

$\forall\, n , m , p \in \underset{\sim}{N}$, $S_n + S_m \subset S_p$ si $m + n \leq p$.

Pour ce faire, on utilise un résultat de théorie de la mesure, qui résulte en fait du théorème de Sazanov (cf. [25], proposition 6, p. 217 et théorème 2, p. 215). Il existe un espace de Hilbert séparable Y et une probabilité de Radon $\tilde{\mu}$ sur Y tels que :

- l'injection de H dans X se factorise à travers Y , $H \xrightarrow{\gamma} Y \xrightarrow{\delta} X$, où γ est de type Hilbert Schmidt, δ est compacte ;

- $\delta(\tilde{\mu}) = \mu$.

D'autre part, la mesure cylindrique $\tilde{\nu}$ sur Y de transformée de Fourier donnée par $\hat{\tilde{\nu}}(\zeta) = \exp(-\frac{1}{2}\,|\zeta|_H^2)$ ($\zeta \in Y' \longrightarrow H$) est une vraie probabilité de Radon et son image par δ est la mesure gaussienne normale sur X : ν (cf. [18]).

Si K_r désigne la boule, dans Y , de centre 0 et de rayon r , la suite $(\delta(K_n))_n = (S_n)$ convient. En effet, puisque δ est compacte, $S_n = \bigcup_k \delta(\overline{K_{n-\frac{1}{k}}})$ est un borélien, $\mu(X \setminus S_n) = \tilde{\mu}(Y \setminus K_n) \longrightarrow 0$, quand $r \longrightarrow +\infty$, et $\nu(X \setminus S_n) = \tilde{\nu}(Y \setminus K_n) \longrightarrow 0$, quand $r \longrightarrow +\infty$.

D'autre part, S_r est relativement compact dans X puisque δ est une application compacte, et $S_n \cap H = K_n \cap H = \gamma^{-1}(K_n)$ est ouvert dans H puisque γ est continue.

(II.2.15) On note H , P_t ($t > 0$) , R_λ ($\lambda > 0$) , l'opérateur, le semi-groupe et la résolvante correspondants à la forme fermée, de domaine N , définie par

$$\Phi\ ,\ \psi \in N \longmapsto \int_X \langle D\Phi\ ,\ D\psi\rangle\, d\mu \quad (\text{cf. (II.0.6 } 3^o))\ .$$

(II.2.16) PROPOSITION. - <u>Si</u> $\varphi \in C^2_{b\ cyl}(X)$, <u>alors</u> $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ <u>et</u>

$$H\varphi = \tilde{\Delta}\varphi - \langle\beta\ ,\ D\varphi\rangle\ ,\ \text{où}\ \tilde{\Delta}\varphi = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \dfrac{\partial^2}{\partial^2 e_k}\varphi\ .$$

On notera que cette somme est finie puisque φ est cylindrique.

<u>Démonstration</u>. - Si φ est de base X_i , de classe C^2_b sur sa base et si $\psi \in N$, on a

$$\int_X \langle D\varphi\ ,\ D\psi\rangle\, d\mu = \int_X \langle D\varphi\ ,\ f_i(D\psi)\rangle\, d\mu\ ,\ \text{puisque}\ D\varphi \in X_i$$

$$= \int_{X_i} \langle D\varphi, D\psi_i\rangle\, d\mu_i + \int_{X_i} \psi_i\langle D\varphi,\beta_i\rangle\, d\mu_i - \int_{X_i} \langle D\varphi, E_i[f_i(\psi\beta)]\rangle\, d\mu_i$$

(puisque $D\varphi$ est f_i-mesurable, on peut appliquer la relation (II.2.2))

$$= \int_{X_i} -\{\tilde{\Delta}\varphi + \langle D\varphi,\beta_i\rangle\psi_i\, d\mu_i + \int_{X_i} \langle D\varphi,\beta_i\rangle\psi_i\, d\mu_i - \int_X \langle D\varphi,\beta\rangle\psi\, d\mu$$

$$= \int_X -\{\tilde{\Delta}\varphi + \langle\beta\ ,\ D\varphi\rangle\}\ \psi\, d\mu\ .$$

III. Théorie énergétique du potentiel associé à N.

III.0. Rappels sur la notion de topologie stricte (cf. [7], [8] et [16]).

(III.0.1) Soit (E, T) un espace vectoriel localement convexe séparé (e. L. c. s.) et soit $(S_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite de parties de E vérifiant les propriétés suivantes :

$\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = E$;

Pour tout n, S_n est convexe équilibrée ;

Pour tout m, n, il existe p tel que $S_n + S_m \subset S_p$.

On note j_n la restriction de l'identité de E à S_n, et t_n la trace de t sur S_n.

Sur E, la topologie stricte (relative à T et à (S_n)) est la topologie d'e. l. c. s. τ la plus fine que rende continue toutes les applications $j_n(S_n, t_n) \longrightarrow (E, \tau)$. Cette définition a effectivement un sens puisqu'il existe de telles topologies : t elle-même, par exemple. En particulier, τ est plus fine que t ; mais comme d'autre part t_n est plus fine que τ_n (trace de τ sur S_n), $\forall n$, $\tau_n = t_n$. Cette notion de topologie stricte est un cas particulier de celle de limite inductive généralisée introduite par GARLING (cf. [7]) et l'on peut caractériser τ par la propriété universelle suivante.

(III.0.2) Une application linéaire g de E à valeurs dans un e. l. c. s. (F, θ) est continue pour la topologie τ si, et seulement si, pour tout n, $g \circ j_n$ est continue de (S_n, t_n) dans (F, θ).

De plus, puisque les S_n sont convexes équilibrées, un lemme de GROTHENDIECK (cf. [13]) affirme que $g \circ j_n$ est continue sur S_n si, et seulement si, elle est continue à l'origine. Ainsi, par exemple, nous avons la propriété suivante.

(III.0.2 bis) Une forme linéaire T sur E est continue pour τ si, et seulement si, $\forall n \in \underset{\sim}{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists v$ voisinage de 0 pour t tel que

$$x \in S_n \cap v \Longrightarrow |T(x)| \leqslant \varepsilon .$$

(III.0.3) Enfin rappelons qu'il existe une description complète d'une base de voisinages de 0 pour τ. Il suffit de prendre les parties du type suivant : $\Gamma(\bigcup_n (S_n \cap V_n))$, où $(V_n)_{n\in N}$ décrit l'ensemble de toutes les suites formées avec les éléments d'une base de voisinages convexes équilibrés de 0 pour t ($\Gamma(A)$ désigne l'enveloppe convexe équilibrée d'une partie A) (cf. [7], proposition 1).

(III.0.4) L'exemple fondamental de topologie stricte est donné par le cas particulier suivant : $E = C_b^0(X)$, où X est un espace topologique complètement régulier et $C_b^0(X)$ désigne l'espace des fonctions continues bornées sur X ; t_u est la topologie de convergence uniforme sur les compacts de X et $S_n = \{\varphi \in C_b^0(X) \, ; \, \sup_X |\varphi| \leqslant n\}$. La topologie stricte τ_0 relative à $C_b^0(X)$, t_n, S_n a fait l'objet d'une étude détaillée dans [8] où sont prouvés les deux théorèmes suivants.

THEOREME A (cf. théorème 1, p. 118). - Le dual de $(C_b^0(X), \tau_0)$ est exactement l'espace des mesures de Radon bornées sur X.

THEOREME B (cf. théorème 11, p. 134). - Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $C_b^0(X)$ séparant les points de x, et telle que, $\forall x \in X$, $\exists a \in \mathfrak{a}$ tel que $a(x) \neq 0$, alors $\mathfrak{a}$ est dense dans $C_b^0(X)$ pour τ.

(III.0.5) Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de $C_b^0(X)$ ayant les propriétés du théorème B. Comme τ_0 est plus fine que t_u, par définition, le théorème B entraîne que τ est dense dans $C_b^0(X)$ pour t_u, si $\mathfrak{a}$ vérifie de plus la propriété suivante.

(III.0.6) Pour tout $T \in C^\infty(\underset{\sim}{R})$ tel que $\sup |T'(x)| \leq 1$ et $T(0) = 0$, alors

$$\forall f \in \mathfrak{a}, \quad T \circ f \in \mathfrak{a}.$$

On a même mieux puisque, pour tout $g \in C_b^0(X)$, pour tout compact K de X, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in \mathfrak{a}$ tel que

$$\sup_X |f| \leq \sup_X |g| \quad \text{et} \quad \sup_K |f - g| \leq \epsilon .$$

(III.0.7) On peut considérer sur $\mathfrak{a}$ la topologie stricte $\tilde{\tau}$ relative à la topologie trace de t_u sur $\mathfrak{a}$ et à la suite $(\tilde{S}_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ avec $\tilde{S}_n = S_n \cap \mathfrak{a}$.

(III.0.8) PROPOSITION. - Si $\mathfrak{a}$ vérifie les hypothèses du théorème B et la propriété (III.0.6), alors $\tilde{\tau}$ coïncide avec la trace de τ_0 sur $\mathfrak{a}$.

Démonstration. - Par définition de $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}$ est plus fine que τ_0. Réciproquement, étant donné un voisinage V de 0 pour $\tilde{\tau}$, il faut trouver un voisinage ω de 0 pour τ_0 tel que $\omega \cap \mathfrak{a} \subset V$. D'après (III.0.3), V est de la forme $\Gamma(\bigcup_n(\tilde{S}_n \cap V_n)) = \Gamma(\bigcup_n(S_n \cap \mathfrak{a} \cap V_n)$, où $(V_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ est une suite de voisinages de 0 pour tout t_u. Autrement dit, pour tout n, $\tilde{V}_n$ est donné par un couple (K_n, ϵ_n), où K_n est un compact de X et $\epsilon_n > 0$.

On ne perd aucune généralité à supposer que (K_n) est une suite croissante de compacts et (ϵ_n) une suite décroissante de nombres. On cherche ω sous la forme $\Gamma(\bigcup_n(S_n \cap W_n))$, où (W_n) est une suite de voisinages de 0, pour t_u, c'est-à-dire, à nouveau, des couples (K'_n, ϵ'_n). On prendra, pour tout n, $K'_n = K_n$ et $\epsilon'_n = \epsilon_n/2$ et l'on montre que, si $f \in \omega \cap \mathfrak{a}$, alors $\frac{1}{2} f \in V$. En effet, par hypothèse, $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i g_{n_i}$, avec $\sum |\lambda_i| \leq 1$; $g_{n_i} \in C_b^0(X)$, pour $i = 1, \dots, k$; $\sup_X |g_{n_i}| \leq n_i$ et $\sup_{K_{n_i}} |g_{n_i}| \leq \epsilon_{n_i}/2$.

Posons $N = \sup\{n_i ; i = 1, \dots, k\}$; alors, d'après (II.0.6), pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe $\tilde{g}_{n_i} \in \mathfrak{a}$ tel que $\sup_X |\tilde{g}_{n_i}| \leq n_i$ et

$$\sup_{K_{2N}} |g_{n_i} - \tilde{g}_{n_i}| \leq \epsilon_{2N}/2 .$$

On peut alors écrire

$$\frac{1}{2} f = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{2} g_{n_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{2}(g_{n_i} - \tilde{g}_{n_i}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{2} \tilde{g}_{n_i} + \frac{1}{2} \psi .$$

Il est clair que $\sup_{K_{n_i}} |\tilde{g}_{n_i}| \leqslant \sup_{K_{n_i}} |g_{n_i}| + \sup_{K_{n_i}} |g_{n_i} - \tilde{g}_{n_i}|$, et comme $n_i \leqslant 2N$, $K_{n_i} \subset K_{2N}$ et $\epsilon_{n_i} \geqslant \epsilon_{2N}$. D'où

$$\sup_{K_{n_i}} |\tilde{g}_{n_i}| \leqslant \epsilon_{n_i}/2 + \sup_{K_{2N}} |g_{n_i} - \tilde{g}_{n_i}| \leqslant \epsilon_{n_i}/2 + \epsilon_{2N}/2 \leqslant \epsilon_{n_i} .$$

D'où $\tilde{g}_{n_i} \in S_{n_i} \cap \mathfrak{A} \cap V_{n_i}$, pour $i = 1 , \dots , k$.

Pour ce qui est de ψ , on peut affirmer que :

$\psi \in \mathfrak{A}$;

$\sup_X |\psi| \leqslant \sum |\lambda_i| \sup_i 2n_i \leqslant 2N$;

$\sup_{K_{2N}} |\psi| \leqslant \sum |\lambda_i| \sup_{K_{2N}} |g_{n_i} - \tilde{g}_{n_i}| \leqslant \epsilon_{2N}/2 \leqslant \epsilon_{2N}$.

On a prouvé que $\psi \in S_{2N} \cap \mathfrak{A} \cap V_{2N}$.

D'où $f \in 2V$, ce qui conclut la preuve.

(III.0.9) COROLLAIRE. - <u>Soit</u> T <u>une forme linéaire sur</u> $C^1_{b\ cyl}(X)$ <u>telle que, pour tout</u> $\epsilon > 0$, <u>il existe</u> $\eta > 0$ <u>et un compact</u> K <u>de</u> X <u>tels que, pour tout</u> $\varphi \in C^1_{b\ cyl}(X)$ <u>vérifiant</u> $\sup_X |\varphi| \leqslant 1$ <u>et</u> $\sup_K |\varphi| \leqslant \eta$, <u>on ait</u> $|T(\varphi)| \leqslant \epsilon$. <u>Alors, il existe une mesure de Radon</u> α , <u>unique, telle que</u>

$$\forall \varphi \in C^1_{b\ cyl}(X) , \quad T(\varphi) = \int_X \varphi \, d\alpha .$$

<u>Démonstration</u>. - Remarquons que l'hypothèse sur T entraîne que $\forall n \in \underset{\sim}{N}$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists K$ compact de X , $\exists \eta > 0$ tels que, pour tout $\varphi \in C^1_{b\ cyl}(X)$, $\sup_X |\varphi| \leqslant n$ et $\sup_K |\varphi| \leqslant \eta$, on ait $|T(\varphi)| \leqslant \epsilon$.

Ceci exprime, d'après (II.0.2 bis), la continuité de T par rapport à la topologie stricte, sur $C^1_{b\ cyl}(X)$, relative à t_u et à la suite $(S_n \cap C^1_{b\ cyl}(X))_{n \in \underset{\sim}{N}}$.

D'après la proposition précédente, puisque $C^1_{b\ cyl}(X)$ est une sous-algèbre de $C^0_b(X)$ vérifiant les bonnes propriétés, cette topologie coïncide avec la trace de τ_0 sur $C^1_{b\ cyl}(X)$. Il ne reste plus qu'à appliquer les théorèmes A et B.

III.1. <u>Théorie du potentiel</u>.

(III.1.1) Par transposition de l'injection continue à image dense de N dans $L^2_\mu(X)$, on obtient, après identification de N et $L^2_\mu(X)$ à leurs duaux, une injection continue à image dense G ; G est donc définie par la relation

$$\forall \Phi \in N , \quad \forall f \in L^2_\mu(X) , \quad \langle \Phi , Gf \rangle_1 = \int_X \Phi f \, d\mu .$$

(III.1.2) <u>Définition</u>. - L'adhérence, dans N , de l'image par G de $L^{2+}_\mu(X)$ (éléments positifs μ. p. p. de $L^2_\mu(X)$) forme un cône convexe fermé : <u>le cône</u> $\mathcal{P}$ <u>des</u>

potentiels purs.

(III.1.3) On rappelle la description suivante de $\mathcal{P}$ (cf. [6])

$$\mathcal{P} = \{\Phi \in N \; ; \; \forall \, \psi \in N^+ \quad \langle \Phi \, , \, \psi \rangle_1 \geq 0\} \, , \text{ où } N^+ = \{\psi \in N \; ; \; \psi \geq 0 \;\; \mu.\, p.\, p.\} \, .$$

(III.1.4) THÉORÈME. – Il existe une correspondance bijective entre $\mathcal{P}$, d'une part, et les mesures de Radon positives bornées sur X qui sont dans le dual de N , d'autre part. Un potentiel pur Φ et la mesure qui lui est associée α sont liés par les relations

(III.1.5) $$\forall \, \psi \in C_b^0(X) \cap N \quad \langle \Phi \, , \, \psi \rangle_1 = \int_X \psi \, d\alpha \, .$$

Démonstration. – Fixons $\Phi \in \mathcal{P}$ et considérons la forme linéaire T définie sur $C^1_{b\ cyl}(X)$ par $T(Y) = \langle \Phi \, , \, \psi \rangle_1$. On va appliquer le corollaire (III.0.9). Pour cela fixons $\epsilon > 0$ et choisissons n_0 tel que $\|g_{n_0} - 1\|_N \leq \epsilon/2 \, \|\Phi\|_N$ (où g_{n_0} est un des éléments de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la démonstration de la proposition (II.2.14). On a $\operatorname{supp} g_{n_0} \subset \tilde{K}_{n_0}$ compact de X . Choisissons d'autre part $\eta > 0$ tel que $\langle \Phi \, , \, \eta \rangle_1 \leq \epsilon/2$. Alors, pour toute $\psi \in C^1_{b\ cyl}(X)$,

$$\sup_X |\psi| \leq 1 \quad \text{et} \quad \sup_{K_{n_0}} |\psi| \leq \eta \, ,$$

on a, puisque $\pm \, \psi + g_{n_0} \leq 1 + \eta$ et que Φ est un potentiel pur,

$$\langle \Phi \, , \, \psi + g_{n_0} \rangle_1 \leq \langle \Phi \, , \, 1 + \eta \rangle_1 \quad \text{et} \quad \langle \Phi \, , \, - \psi + g_{n_0} \rangle_1 \leq \langle \Phi \, , \, 1 + \eta \rangle_1 \, .$$

D'où

$$|T(\psi)| = |\langle \Phi \, , \, \psi \rangle_1| \leq \langle \Phi \, , \, 1 - g_{n_0} \rangle_1 + \langle \Phi \, , \, \eta \rangle_1 \leq \epsilon \, .$$

Il existe donc une mesure de Radon bornée, et bien sûr aussi positive, telle que

$$\forall \, \psi \in C^1_{b\ cyl}(X) \, , \quad T(\psi) = \langle \Phi \, , \, \psi \rangle = \int \psi \, d\alpha \, .$$

Cette mesure est unique grâce à (II.2.10). On étend cette relation à toute $\psi \in C_b^0(X) \cap N$.

Réciproquement, si α est une mesure de Radon bornée, positive sur X vérifiant $\int_X \psi \, d\alpha \leq C\|\psi\|_N$, pour toute $\psi \in C_b^0(X) \cap N$, le théorème de Riesz fournit un élément $\Phi \in N$ tel que

$$\int_X \psi \, d\alpha = \langle \Phi \, , \, \psi \rangle_1 \, , \quad \forall \, \psi \in C_b^0(X) \cap H \, ,$$

Φ est clairement un potentiel pur d'après la caractérisation (III.1.2).

(III.1.6) DÉFINITION. – On appelle mesures d'énergie finie les mesures sur X introduites par le théorème précédent.

Si α est une mesure d'énergie finie, il nous arrivera de noter U_α le potentiel pur qui lui est associé.

(III.1.7) Bon nombre de théorèmes de la théorie énergétique du potentiel de Beurling-Deny, dans le cas où X est localement compact se transcrivent directement à notre situation, puisque leurs démonstrations n'utilisent que la structure hilbertienne de N et la propriété de Dirichlet. Enonçons, par exemple, en renvoyant à [6] pour les démonstrations, les principes suivants.

<u>Principe complet du maximum</u>. - Pour tout couple f , h d'éléments de $L^2_\mu(X)$ tels que $Gf \leq Gh + 1$ μ. p. p. sur $\{f > 0\}$, on a

$$Gf \leq Gh + 1 \quad \mu.\ p.\ p.\ \text{sur } X .$$

<u>Principe de l'enveloppe inférieure forte</u>. - Quels que soient Φ et $\psi \in \mathcal{P}$, on a $\inf(\Phi , \psi + 1) \in \mathcal{P}$.

<u>Principe du balayage sur un ouvert</u>. - Soit U_α un potentiel pur et ω un ouvert de X . Il existe au moins un potentiel pur U_β vérifiant :

$\operatorname{supp} \beta \subset \bar{\omega}$;

$U_\beta \leq U_\alpha$ μ. p. p. ;

$U_\beta = U_\alpha$ μ. p. p. sur ω .

Parmi tous les potentiels purs vérifiant ces propriétés celui de norme minimum est appelé <u>potentiel balayé sur</u> ω . C'est aussi la projection orthogonale dans N de U_α sur le sous-espace fermé $N^\perp_\omega$, orthogonal de l'ensemble des $\Phi \in N$ nulles sur ω .

(III.1.8) D'autres notions ont besoin d'une légère adaptation : ainsi, par exemple, le <u>spectre</u> d'un élément de N .

<u>Définition</u>. - Soit $\Phi \in N$ et ω ouvert de X ; ω sera dit régulier pour Φ si, et seulement si,

$$\forall\ \psi \in HC^1_0(X) \quad \text{avec} \quad \operatorname{supp} \psi \subset \omega \ , \quad \langle \Phi , \psi \rangle_1 = 0 .$$

(III.1.9) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\Phi \in N$; <u>soient</u> ω_1 , ω_2 <u>deux ouverts réguliers pour</u> Φ . <u>Alors</u> $\omega_1 \cup \omega_2$ <u>est un ouvert régulier pour</u> Φ .

<u>Démonstration</u>. - Soit $\psi \in HC^1_0(X)$ avec $\operatorname{supp} \psi \subset \omega_1 \cup \omega_2$.

Le problème est de décomposer ψ en une somme $\psi_1 + \psi_2$ avec $\operatorname{supp} \psi_i \subset \omega_i$ ($i = 1$, 2). Mais ceci résulte directement de l'existence d'une partition de l'unité $HC^1_0(X)$ subordonnée au recouvrement ouvert de X formé par ω_1 , ω_2 , et $X \setminus \operatorname{supp} \psi$ (cf. [19], proposition 2.10 et [10]).

(III.1.10) DÉFINITION. - <u>Soit</u> $\Phi \in N$; <u>on appelle spectre de</u> Φ <u>le complémentaire du plus grand ouvert régulier pour</u> Φ <u>(qui existe d'après la proposition précédente)</u>.

(III.1.11) PROPOSITION. - <u>Si</u> $\Phi = U_\alpha$ <u>est un potentiel pur, le spectre de</u> Φ <u>coïncide avec le support de</u> α .

Démonstration. - On prouve que, si ω est un ouvert de X, alors ω est un ouvert régulier pour Φ si, et seulement si, ω est un ouvert de nullité pour la mesure α. En effet, si $\psi \in C_b^0(X) \cap N$, avec $\operatorname{supp} \psi \subset \omega$, alors $g_n \psi \in HC_0^1(X)$, avec $\operatorname{supp} g_n \psi \subset \omega$, pour tout n, et $g_n \psi \longrightarrow \omega$ dans N (où $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie en (II.2.14)). Réciproquement, si $\psi \in HC_0^1(X)$, avec $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset \omega$, on trouve, grâce à (II.2.10), une suite $\psi_n \in C_b^0(X) \cap N$ tendant vers φ dans N. Puis, on choisit $\chi \in HC_b^1(X) \cap C_b^0(X)$ telle que $0 \leqslant \chi \leqslant 1$. $\chi = 1$ sur $\operatorname{supp} \psi$. $\operatorname{supp} \chi \subset \omega$ (une telle fonction existe d'après [19], proposition 2.10). Alors $\chi\psi_n \longrightarrow \chi\psi = \psi$ dans N, ce qui conclut la preuve.

(III.1.12) PROPOSITION. - Soit ω un ouvert de X ;

$$N_\omega = \{\Phi \in N\,,\ \Phi = 0\ \ \mu.\text{ p. p. sur } \omega\}\,,\quad W_\omega = \{\Phi \in N\,;\ \operatorname{sp} \Phi \subset \omega\}\,.$$

Alors $N_\omega = W_\omega^\perp$.

Démonstration.

(a) $W_\omega^\perp \subset N_\omega$: Si $f \in L_\mu^{2+}(X)$, $f\,d\mu$ est une mesure d'énergie finie. si $\psi \in W_\omega^\perp$ et $\operatorname{supp}(f\,d\mu) \subset \omega$ ceci entraîne que $\int \psi f\,d\mu = \langle \psi\,,\ Gf\rangle_1 = 0$ puisque, d'après la proposition précédente, $\operatorname{sp}(Gf) = \operatorname{supp} f\,d\mu$.

Faisant varier f, on obtient que $\psi = 0$ μ. p. p. sur ω.

(b) $N_\omega \subset W_\omega^\perp$: Prenons $\psi \in N$, avec $\psi = 0$ μ. p. p. sur ω, et $\Phi \in W_\omega$. Il existe une suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $HC_0^1(X)$ qui tendent vers ψ dans N. D'autre part, il existe une fonction $\zeta \in HC_b^1(X)$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \zeta \subset X \setminus \operatorname{sp} \Phi$ et $\zeta = 1$ sur $X \setminus \omega$. Alors $\zeta\psi_n \longrightarrow \zeta\psi = \psi$ dans N, $\zeta\psi_n \in HC_0^1(X)$, pour tout n, et $\operatorname{supp} \zeta\,\psi_n \subset X \setminus \operatorname{sp} \Phi$, pour tout n. D'où, $\forall\, n$, $\langle \Phi\,,\ \zeta\psi_n\rangle_1 = 0$. D'où $\langle \Phi\,,\ \zeta\rangle_1 = 0$.

(III.1.13) On peut alors énoncer le théorème de synthèse spectrale dont la démonstration sera rigoureusement identique à celle de [6], p. 168.

THÉORÈME. - Soit F une partie fermée de X ; soit $M_F = \{\Phi = U_\alpha \in \mathcal{P}\,;\ \operatorname{supp} \alpha \subset F\}$ et $W_F = \{\Phi \in N\,;\ \operatorname{sp} \Phi \subset F\}$. Alors M_F est total dans W_F.

III.2. Capacités fonctionnelles.

(III.2.1) Rappels (cf. [4], [5]).

Soit E un espace topologique séparé, $\mathcal{K}(E)$ la famille des parties compactes de E, $\mathcal{P}(E)$ la famille de toutes les parties de E, $\mathcal{O}(E)$ la famille des ouverts de E.

DÉFINITION. - On appelle capacité forte sur E toute application γ de $\mathcal{K}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant

1° γ est croissante ;

2° γ est fortement sous-additive

$$\forall A , B \in \mathcal{K}(E) , \quad \gamma(A \cap B) + \gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B) ;$$

3° γ est continue à droite

$\forall A \in \mathcal{K}(E)$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \omega \in \mathcal{O}(E)$ contenant A tel que

$$\forall B \in \mathcal{K}(E) , \quad A \subset B \subset \omega , \quad \gamma(B) \leqslant \gamma(A) + \epsilon .$$

On construit alors une capacité extérieure γ^* définie sur $\mathcal{P}(E)$ en posant

$\gamma^*(\omega) = \sup\{\gamma^*(K) ; K \in \mathcal{K}(E) , K \subset \omega\}$ si $\omega \in \mathcal{O}(E)$;

$\gamma^*(A) = \inf\{\gamma^*(\omega) ; \omega \in \mathcal{O}(E) , \omega \supset A\}$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.

Et on a le théorème de Choquet.

THEOREME. - γ^* est une vraie capacité de Choquet. En particulier, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ qui soit $\mathcal{K}$-analytique et incluse dans un K_σ (union dénombrable de compacts), on a

$$\gamma^*(A) = \sup\{\gamma^*(K) ; K \in \mathcal{K}(E) , K \subset A\} = \sup\{\gamma(K) ; K \in \mathcal{K}(E) , K \subset A\} .$$

(III.2.2) Quand X est un espace de Hilbert de dimension infinie, la classe des parties incluses dans un K_σ est très restreinte. Par contre, X_σ est dénombrable à l'infini ce qui permet de tourner le problème.

(III.2.3) Soit ω un ouvert de X ; soit $C_\omega = \{\Phi \in N , \Phi \geqslant 1 \ \mu\text{. p. p. sur } \omega\}$. C_ω est un convexe fermé de N . Il n'est jamais vide puisque $1 \in C_\omega$, pour tout ω . On note e_ω la projection de 0 sur C_ω et $\text{cap}\,\omega$ la norme de e_ω au carré.

PROPOSITION et DÉFINITION.

1° e_ω est un potentiel pur ; $0 \leqslant e_\omega \leqslant 1$, $e_\omega = 1$ μ. p. p. sur ω . On l'appelle le potentiel d'équilibre de ω . La mesure associée est la mesure d'équilibre.

2° $\text{cap}\,\omega = \|e_\omega\|_N^2 = \inf\{\|\Phi\|_N^2 , \Phi \in C_\omega\} \in [0 , 1]$.

Démonstration. - e_ω peut être vu comme le potentiel balayé par le potentiel pur $1 = U_\mu$.

(III.2.4) On définit alors deux fonctions d'ensembles γ_1 et γ_2 sur $\mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{K}(X_\sigma)$ respectivement en posant

$$\forall K \in \mathcal{K}(X) , \quad \gamma_1(K) = \inf\{\text{cap}\,\omega ; \omega , \omega \supset A\} ,$$

$$\forall S \in \mathcal{K}(X_\sigma) , \quad \gamma_2(S) = \inf\{\text{cap}\,\omega_\sigma ; \omega_\sigma \in \mathcal{O}(X_\sigma) , \omega_\sigma \supset A\} .$$

(III.2.5) PROPOSITION.

(a) γ_1 [respectivement γ_2] est une capacité forte sur X [respectivement X_σ].

(b) $\forall K \in \mathcal{K}(X)$, $\gamma_1(K) \leqslant \gamma_2(K)$.

Démonstration.

(a) La croissance et la continuité à droite de γ_i ($i = 1$, 2) sont évidentes. la forte sous-additivité se démontre comme dans le cas habituel et utilise l'inégalité suivante, qui est valable dans tout espace de Dirichlet

$$\|\inf(\Phi\ ,\ \psi)\|_N^2 + \|\sup(\Phi\ ,\ \psi)\|_N^2 \leqslant \|\Phi\|_N^2 + \|\psi\|_N^2 \ .$$

(b) Evident.

(III.2.6) On considère ensuite les capacités extérieures γ_1^* et γ_2^* correspondantes.

PROPOSITION.

(a) Pour tout $\omega \in \mathcal{O}(X)$ [respectivement $\omega_\sigma \in \mathcal{O}(X_\sigma)$], on a $\gamma_1^*(\omega) = \text{cap}\ \omega$ [respectivement $\gamma_2^*(\omega_\sigma) = \text{cap}\ \omega_\sigma$].

(b) Plus généralement, pour toute $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $\gamma_i^*(A) = \{\inf\|\Phi\|_N^2\ ;\ \Phi \in C_A^i\}$, où $C_A^i = \{\Phi \in N\ ;\ \exists\ (\Phi_n)_{n\in N}$ suite de N et $(\omega_n)_{n\in N}$ suite de $\mathcal{O}(X_i)$ tel que $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ dans N et $\Phi_n \geqslant 1$ μ. p. p. sur $\omega_n\}$ ($i = 1$, 2).

$$\mathcal{O}(X_i) = \begin{cases} \mathcal{O}(X) & \text{si } i = 1 \\ \mathcal{O}(X_\sigma) & \text{si } i = 2 \end{cases} .$$

(c) Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $\gamma_1^*(A) \leqslant \gamma_2^*(A)$.

Démonstration. - On ne fait la démonstration que pour γ_1 . On remarque que, pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $C_A^1 = \bigcup_{\omega\in\mathcal{O}(X),\omega\supset A} C_\omega$, et que, si A est borélienne, et si Φ C_A^1 , alors $\mu[A \in \{\Phi < 1\}] = 0$. Donc, si $K \in \mathcal{K}(X)$, grâce à un théorème bien connu de géométrie dans les espaces de Hilbert sur les projections sur une famille filtrante croissante de convexes fermés, on a

$$\begin{aligned} \inf\{\|\Phi\|_N^2\ ;\ \Phi \in C_K^1\} &= \inf\{\|e_\omega\|_N^2\ ;\ \omega \in \mathcal{O}(X)\ ,\ \omega \supset K\} \\ &= \inf\{\text{cap}\ \omega\ ;\ \omega \in \mathcal{O}(X)\ ,\ \omega \supset K\} = \gamma^1(K) \ . \end{aligned}$$

(a) Prouvons que $C_\omega = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(X),K\subset\omega} C_K^1$. Cela prouvera (a) puisque, en utilisant un théorème sur la convergence des projections de 0 sur une famille filtrante décroissante de convexes fermés, on obtient

$$\text{cap}\ \omega = \sup_{K\in\mathcal{K}(X),K\subset\omega} (\inf\{\Phi_N^2\ ;\ \Phi \in C_K^1\}) = \sup_{K\in\mathcal{K}(X),K\subset\omega} \gamma_1(K) = \gamma_1^*(\omega) \ .$$

Mais il est clair que $C_\omega \subset C_K^1$, pour tout $K \in \mathcal{K}(X)$, $K \subset \omega$.

Dans l'autre sens, si $\psi \notin C_\omega$, cela veut dire que $\mu\{\omega \cap \{\psi < 1\}\} > 0$. Comme μ est de Radon, il existe un compact fort K_0 tel que $K \subset \omega \cap \{\psi < 1\}$, avec $\mu(K_0) > 0$. Alors ψ ne peut pas appartenir à $C_{K_0}^1$.

(b) est alors évident puisque, pour $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned} \gamma_1^*(A) = \inf\{\gamma_1^*(\omega)\ ;\ \omega \in \mathcal{O}(X)\ \ \omega \supset A\} &= \inf\{\text{cap}\ \omega\ ;\ \omega \in \mathcal{O}(X)\ \ \omega \supset A\} \\ &= \inf\{\|\Phi\|_N^2\ ;\ \Phi \in \textstyle\bigcup_{\omega\in\mathcal{O}(X),\omega\supset A}\} = \inf\{\|\Phi\|_N^2\ ;\ \Phi \in C_A^1\} \ . \end{aligned}$$

(c) est évident.

(III.2.7) On peut appliquer le théorème de Choquet à γ_2^*. Et puisque X_σ est dénombrable à l'infini, pour toute partie A faiblement K-analytique (et, en particulier, pour toute partie fortement K-analytique ou borélienne), on a

$$\gamma_2^*(A) = \sup\{\gamma_2(S) \ ; \ S \in K(X_\sigma) \ , \ S \subset A\} \ .$$

(III.2.8) THÉORÈME. - <u>Pour toute partie</u> A <u>fortement</u> K-<u>analytique</u>

$$\gamma_1^*(A) = \gamma_2^*(A) = \sup\{\gamma_1(K) \ ; \ K \in \mathcal{K}(X) \ , \ K \subset A\}$$
$$= \sup\{\gamma_2(K) \ ; \ K \in \mathcal{K}(X) \ , \ K \subset A\} \ .$$

La démonstration utilise deux lemmes.

(III.2.9) LEMME. - <u>Si</u> $A \in K(X_\sigma)$,

$$\gamma_1^*(A) = \gamma_2^*(A) = \gamma_2(A) = \inf\{\mathrm{cap}\ O \ ; \ O \ \underline{\text{ouvert cyl}} \ O \supset A\} \ .$$

(III.2.10) LEMME [3]. - <u>Si</u> $A \in K(X_\sigma)$,

$$\gamma_1^*(A) = \sup\{\gamma_1^*(K) \ , \ K \in \mathcal{K}(X) \ , \ K \subset A\} \ .$$

(III.2.11) Montrons d'abord comment les deux lemmes entraînent le théorème. Si A est fortement K-analytique, on a

$$\gamma_1^*(A) \leq \gamma_2^*(A) = \sup\{\gamma_2(S) \ , \ S \in K(X_\sigma) \ S \subset A\} \ , \text{ d'après (III.2.7)}$$
$$= \sup\{\gamma_1^*(S) \ ; \ S \in \mathcal{K}(X_\sigma) \ S \subset A\} \ , \text{ d'après le lemme (III.2.9)}$$
$$= \sup\{\gamma_1(K) \ ; \ K \in \mathcal{K}(X) \ K \subset A\} \ , \text{ d'après le lemme (III.2.10)}$$
$$\leq \gamma_1^*(A) \text{ par la croissance de } \gamma_1^* \ .$$

(Fin de la démonstration du théorème (III.2.8))

(III.2.12) <u>Démonstration du lemme</u> (III.2.9). - Grâce à la proposition (III.2.6), il suffit de montrer que $C_A^1 = C_A^2$, pour tout A faiblement compact, ceci résultera de la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $A \in \mathcal{K}(X_\sigma)$. <u>On pose</u> :

$C_A^3 = \{\Phi \in N \ ; \ (\varphi_n)_{n\in N}$ <u>suite dans</u> N <u>et</u> $(\Omega_n)_{n\in N}$ <u>suite d'ouverts cylindriques tels que</u> $\varphi_n \longrightarrow \Phi$ <u>dans</u> N <u>et</u> $\varphi_n \geq 1$ μ. <u>p. p. sur</u> $\Omega_n\}$;

$C_A'^1 = \{\Phi \in N \ ; \ (\varphi_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>suite dans</u> $C_b^0(X) \cap N$ <u>telle que</u> $\varphi_n \longrightarrow \Phi$ <u>dans</u> N <u>et</u> $\varphi_n \geq 1$ <u>sur</u> $A\}$;

$C_A'^2 = \{\Phi \in N \ ; \ \exists \ (\varphi_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>suite dans</u> $C_b^0(X_\sigma) \cap N$ <u>telle que</u> $\varphi_n \longrightarrow \Phi$ <u>dans</u> N <u>et</u> $\varphi_n \geq 1$ <u>sur</u> $A\}$;

---

[3] Le lemme n'est pas indispensable pour la suite si l'on utilise le résultat de SION [cf. [27]] qui ne fait pas l'hypothèse d'inclusion dans un K_σ .

$C'^{3}_{A} = \{\Phi \in N ; \exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>suite dans</u> $C^{0}_{b\,cyl}(X) \cap N$ <u>telle que</u> $\varphi_n \longrightarrow \Phi$ <u>dans</u> N <u>et</u> $\varphi_n \geqslant 1$ <u>sur</u> $A\}$.

<u>Alors</u> $C^1_A = C^2_A = C^3_A = C'^{1}_{A} = C'^{2}_{A} = C'^{3}_{A}$.

<u>Démonstration</u>. - On a la suite d'inclusion suivante entre ces six convexes fermés

$$\begin{array}{ccccc} C^1_A & \supset & C^2_A & \supset & C^3_A \\ \cup & & \cup & & \cup \\ C'^{1}_{A} & \supset & C'^{2}_{A} & \supset & C'^{3}_{A} \end{array} .$$

Justifions par exemple $C'^{1}_{A} \subset C^1_A$. En effet, si $\Phi \in C'^{1}_{A}$, et si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de la définition, alors $\tilde{\varphi}_n = \varphi_n + 1/n \longrightarrow \Phi$ dans N et $\tilde{\varphi}_n \geqslant 1$ sur $\omega_n \in \mathcal{O}(X)$ $\omega_n \supset A$.

Il suffit donc de prouver l'inclusion $C^1_A \subset C'^{3}_{A}$. En les translatant de -1 dans N, on obtient deux cônes convexes et fermés $\tilde{C}^1_A$ et $\tilde{C}'^{3}_{A}$, qui admettent une description analogue à celle de C^1_A et C'^{3}_{A}, à condition de remplacer 1 par 0 dans les inégalités (1 est une fonction continue cylindrique de N !). On est donc ramené à prouver que $\tilde{C}^1_A \subset \tilde{C}'^{3}_{A}$ et, par le théorème du bipolaire, que $(\tilde{C}^1_A)^0 \supset (\tilde{C}^3_A)^0$.

Soit donc $\psi \in (\tilde{C}'^{3}_{A})^0$. C'est un potentiel pur d'après (III.1.2) et (II.2.12). Soit α la mesure d'énergie finie qui lui correspond grâce au théorème (III.1.3). On remarque que, si $\Phi = \varphi \circ f_i$, avec $\varphi \in C^\infty_b(X_i)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset X_i \setminus f_i(A)$. Alors $\Phi \in \tilde{C}'^{3}_{A}$ de même que $-\Phi$. D'où

$$\int_X \Phi \, d\alpha = \langle \Phi , \psi \rangle = 0 .$$

On montre maintenant que $\operatorname{supp} \alpha \subset A$. Pour ce faire, on considère α_A, restriction à $X \setminus A$ de la mesure α. C'est encore une mesure de Radon positive bornée sur l'espace complétement régulier $X \setminus A$. Il suffit de prouver que $\alpha_A = 0$.

Soit $\mathfrak{a}_A = \{\Phi \in N ; \exists\, i \in N$ et $\varphi \in C^\infty_b(X_i)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset X_i \setminus f_i(A)$ et $\Phi = \varphi \circ f_i\}$ et soit $\tilde{\mathfrak{a}}_A = \{\Phi_{|X\setminus A} ; \Phi \in \mathfrak{a}_A\}$.

Alors $\tilde{\mathfrak{a}}_A$ est une algèbre. En effet, si $\Phi = \varphi \circ f_i \in \mathfrak{a}_A$ et $\Psi = \psi \circ f_j \in \mathfrak{a}_A$, en supposant que, par exemple $i \geqslant j$, on a $\Psi = \psi \circ f_{ij} \circ f_i$ et

$$\Phi + \Psi = (\varphi + \psi \circ f_{ij}) \circ f_i , \quad \Phi\Psi = [\varphi(\psi \circ f_{ij})] \circ f_i$$

appartiennent à $\mathfrak{a}_A$.

D'autre part $\tilde{\mathfrak{a}}_A$ sépare les points de $X \setminus A$. On sait en effet (cf. [25], proposition 2.9) que, si A est faiblement compact,

$$A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}(f_i(A)) .$$

Si donc $x , y \in X \setminus A$, $\exists\, i_0 \in N$ tel que $f_{i_0}(x) \notin f_{i_0}(A)$ et $f_{i_0}(y) \notin f_{i_0}(A)$. Mais si $i \geqslant i_0$, ceci est encore vrai. Clairement, si $x \neq y$, $f_i(x)$ ne peut pas être égal à $f_i(y)$, pour tout $i \geqslant i_0$. On a donc trouvé i_1 tel que $f_{i_1}(x) \notin f_{i_1}(A)$, $f_{i_1}(y) \notin f_{i_1}(A)$ et $f_{i_1}(x) \neq f_{i_1}(y)$.

Il existe $\varphi \in C_b^\infty(X_{i_1})$, avec $\operatorname{supp} \varphi \subset X \setminus f_{i_1}(A)$ et $\varphi(f_{i_1}(x)) \neq \varphi(f_{i_1}(y))$. Alors $\Phi = \varphi \circ f_{i_1}$ restreinte à $X \setminus A$ appartient à $\tilde{\mathfrak{a}}_A$ et sépare x de y . On procède de même pour prouver que, si $x \in X \setminus A$, il existe $\Phi \in \mathfrak{a}_A$ tel que $\Phi(x) \neq 0$.

On peut donc appliquer le théorème (II.0.4 B) avec X remplacé par $X \setminus A$. $\tilde{\mathfrak{a}}_A$ est dense dans $C_b^0(X \setminus A)$ pour la topologie stricte τ_0^A . α_A , forme linéaire continue pour τ_0^A sur $C_b^0(X \setminus A)$, est nulle sur le sous-espace dense $\tilde{\mathfrak{a}}_A$ puisque, si $\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathfrak{a}}_A$ ($\tilde{\Phi} = \Phi_{X\setminus A}$ avec $\Phi \in \mathfrak{a}_A$) ,

$$\int_{X\setminus A} \tilde{\Phi}\, d\alpha_A = \int_X \Phi\, d\alpha = 0 .$$

Elle est donc nulle.

D'où $\operatorname{supp} \alpha \subset A$.

Il reste à prouver que $\Psi = U_\alpha \in (C_A^1)^0$. Il suffit de voir que $\langle \Phi , \Psi\rangle_1 \geq 0$, pour tout $\Phi \in N$ qui est positif μ. p. p. sur $\omega \in \mathcal{O}(X)$ contenant A , ou même que $\langle \Phi , \Psi\rangle_1 = 0$, pour toute $\Phi \in N$, $\Phi = 0$ μ. p. p. sur $\omega \supset A$ (après avoir décomposé Φ en $\Phi^+ - \Phi^-$ et utilisé le fait que Ψ est un potentiel pur). mais on peut approcher Φ par une suite $(\Phi_n)_{n\in N}$ de fonctions continues dans N et, si $\zeta \in HC^1(X) \cap C_b^0(X)$, $\zeta = 1$ sur A , $0 \lessapprox \zeta \leq 1$, et

$$\operatorname{supp} \zeta \subset \omega (1-\zeta)\Phi_n = \Phi_n \xrightarrow{N} (1-\zeta)\Phi = \Phi .$$

On peut alors conclure, parce que

$$\langle \Phi , \Psi\rangle_1 = \lim \langle \tilde{\Phi}_n , \Psi\rangle = \int_X \tilde{\Phi}_n\, d\alpha \quad \text{puisque} \quad \Phi_n \in C_b^0(X) \cap N$$
$$= \int_A \Phi_n\, d\alpha \quad \text{puisque} \quad \operatorname{supp} \alpha \subset A = 0 \quad \text{puisque} \quad \Phi_n = 0 \text{ sur } A .$$

(Fin de la démonstration de la proposition (III.2.12))

(III.2.13) Démonstration du lemme (III.2.10). – Là encore il suffit de montrer que, si A est faiblement compact,

$$C_A^1 = \{\cap C_K^1 \ ; \ K \in \mathcal{K}(X) , \ K \subset A\} ,$$

ou, d'après la proposition (III.2.12),

$$C_A'^1 = \{\cap C_K'^1 \ ; \ K \in \mathcal{K}(X) , \ K \subset A\} .$$

L'inclusion de gauche à droite est claire. Dans l'autre sens, après une translation de -1 , on a à comparer deux cônes convexes fermés et on s'intéresse à leurs polaires ; soit donc $\Phi \in (C_A'^1)^0$; c'est un potentiel pur U_α avec $\operatorname{supp} \alpha \subset A$, comme le montre la démonstration de la proposition (III.2.12). Si $\Psi \in \cap_K C_K'^1$, il faut montrer que $\langle \Phi , \Psi\rangle_1 \geq 0$. On peut supposer Ψ bornée car $T_{-n}^n \circ \Psi \longrightarrow \Psi$ fortement dans N et $T_{-n}^n \circ \Psi \in \cap_K C_K'^1$. Soit $\sup_X |\Psi| = M$. Comme α est de Radon et $\operatorname{supp} \alpha \subset A$, si $\epsilon > 0$ est fixé, il existe $K_0 \in \mathcal{K}(X)$, $K_0 \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_0) = \mu(X \setminus K_0) \leq \epsilon/2M$. Comme $\Psi \in \cap_K C_K'^1$, il existe $\Psi \in C_b^0(X) \cap N$ tel que $\tilde{\Psi} \geq 0$ sur K_0 et $\|\Psi - \Psi\|_N \leq \epsilon/2\|\Phi\|_N$.

On peut même supposer $\sup |\tilde{\Psi}| \leqslant M$ (cf. (II.0.6 2°)).

On a alors

$$\langle \Phi , \Psi \rangle_1 \geqslant \langle \Phi , \Psi \rangle_1 - |\langle \Phi , \Psi - \Psi \rangle_1| \geqslant \int_A \tilde{\Psi}\, d\alpha - \varepsilon/2 \geqslant - M\mu(A \setminus K_0) - \varepsilon/2 = - \varepsilon .$$

Puis on fait tendre ε vers 0 .

(Fin de la démonstration du lemme (III.2.10))

(III.2.14) On note $\mathrm{cap}(A)$ le nombre $\gamma_1^*(A) = \gamma_2^*(A)$ pour A fortement K-analytique.

L'analyse faite ci-dessus est aussi valable, en particulier, pour les espaces de Dirichlet N_i , et l'on a, pour tout i , une capacité, que l'on note cap_i , sur $\mathcal{P}(X_i)$.

(III.2.15) PROPOSITION. - Pour tout A faiblement compact, on a

$$\mathrm{cap}\ A = \inf_{i \in N} \mathrm{cap}_i(f_i(A)) .$$

Démonstration. - Soit $\Omega = f_{i_0}^{-1}(\omega_{i_0})$ un ouvert cylindrique et e_Ω son potentiel capacitaire. Rappelons (cf. (III.2.3)) que $0 \leqslant e_\Omega \leqslant 1$ et que $e_\Omega \geqslant 1$ μ. p. p. sur Ω . Autrement dit, $e_\omega - \underset{\sim}{1}_{\omega_{i_0}} \circ f_{i_0} \geqslant 0$ μ. p. p. ($\underset{\sim}{1}_{\omega_{i_0}}$ est la fonction indicatrice de ω_{i_0} dans X_{i_0}). En conditionnant, pour $i \geqslant i_0$, il vient

$$E_i[e_\Omega - \underset{\sim}{1}_{\omega_{i_0}} \circ f_{i_0}] \geqslant 0 \quad \mu_i \text{ . p. p.}$$

ou bien

$$E_i(e_\Omega) \in C^i_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})} = \{\varphi \in N_i ,\ \varphi \geqslant 1 \quad \mu_i \text{ . p. p. sur } f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})\} .$$

D'où si $e_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})}$ désigne le potentiel d'équilibre de l'ouvert $f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})$ de X_i , relativement à l'espace de Dirichlet N_i , on a

$$\|E_i\, e_\Omega\|_{N_i} \geqslant \|e_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})}\|_{N_i} = \|e_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})} \circ f_i\|_N \quad \text{d'après (II.3.7)}$$

$$\geqslant \|e_\Omega\|_N \quad \text{puisque } e_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})} \circ f_i \in C_\Omega .$$

Faisons tendre $i \longrightarrow + \infty$. Comme e est borné, $E_i\, e_\Omega \longrightarrow e_\Omega$ dans N (démonstration analogue à celle de la proposition (II.2.10)).

D'où, puisque $\mathrm{cap}_i(f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})) = \mathrm{cap}_i(f_i(\Omega)) = \|e_{f_{ii_0}^{-1}(\omega_{i_0})}\|_{N_i}^2$, il vient que

$$\mathrm{cap}\ \Omega = \|e_\Omega\|^2 = \inf\ \mathrm{cap}_i(f_i(\Omega)) .$$

Maintenant si A est faiblement compact, la proposition (III.2.12) montre que $\mathrm{cap}\ A = \inf\{\mathrm{cap}\ \Omega ,\ \Omega \text{ ouvert cylindrique } \supset A\}$.

D'où si $\epsilon > 0$ est fixé, il existe un ouvert cylindrique $\Omega \supset A$ tel que $\mathrm{cap}(A) + \epsilon/2 \geq \mathrm{cap}\,\Omega$. D'après le début de la démonstration, il existe un i tel que

$$\mathrm{cap}(\Omega) + \epsilon/2 \geq \mathrm{cap}_i(f_i(\Omega)) \geq \mathrm{cap}_i(f_i(A))$$

car $\Omega \supset A$. D'où le résultat.

(III.2.16) Remarque.

Si μ est la mesure gaussienne sur X, on sait que, pour $\Phi \in N$, pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, $E_i(\Phi) \in N_i$ et $\|E_i(\Phi)\|_{N_i} \leq \|\Phi\|$. On en tire que, si $\Omega = f_{i_0}^{-1}(\omega_{i_0})$ est un ouvert cylindrique, son potentiel e est une fonction cylindrique. D'où

$$\mathrm{cap}(\Omega) = \mathrm{cap}_{i_0}(\omega_{i_0}) .$$

(III.2.17) PROPOSITION. - Soit A une partie borélienne de X. Alors $\mathrm{cap}(A) = 0$ si, et seulement si, A est α-négligeable pour toute mesure d'énergie finie α.

Démonstration. - Il suffit de le prouver pour les compacts $K \in \mathcal{K}(\mathbf{E})$. Si donc $\mathrm{cap}(K) = 0$, il existe une suite de fonctions (Φ_n) de $C_b^0(X) \cap N^+$ telles que $\|\Phi_n\| \longrightarrow 0$ et $\varphi_n \geq 1$ sur K.

D'où, si α est une mesure d'énergie finie,

$$\alpha(K) \leq \inf_n \int \Phi_n \, d\alpha = \inf_n \langle \Phi_n , U_\alpha \rangle = 0 .$$

Réciproquement, soit e_K le potentiel d'équilibre de K et α la mesure d'équilibre. Il est facile de voir que $\mathrm{supp}\,\alpha \subset K$. Donc, pour $\epsilon > 0$, il existe $\Phi \in C_b^0(X) \cap N$, $\Phi \geq 1$ sur K tel que

$$\int_K \Phi \, d\alpha \leq \alpha(K) + \epsilon \leq \epsilon .$$

D'où

$$\|e_K\|_N \leq \langle e_K , \Phi \rangle_N = \int_K \Phi \, d\alpha \leq \epsilon .$$

(III.2.18) COROLLAIRE. - Soit $\Phi \in N$, alors

$$\Phi = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{cap}(\mathrm{sp}\,\Phi) = 0 .$$

Démonstration. - Une conséquence directe de la proposition précédente et du théorème de synthèse spectrale.

(III.2.19) Représentants quasi-continus.

DÉFINITION. - Soit $\Phi \in N$. Une telle fonction Φ^* définie sur X sera appelée un représentant quasi-continu de Φ si

1° $\Phi^* = \Phi$ μ.p.p. .

2° $\exists$ une suite d'ouverts de X $(\omega_n)_{n \in N}$ telle que $\mathrm{cap}(\omega_n) \downarrow 0$ et $\Phi^*|_{X \setminus \omega_n}$ est continue, pour tout n.

(III.2.20) THÉORÈME. - Toute $\varphi \in N$ admet un représentant quasi-continu φ^*. Deux représentants quasi-continus d'un même élément φ coïncident en tout point de X sauf peut-être sur un ensemble de capacité nulle. Enfin, si U_α est un potentiel pur, on a

$$\langle U_\alpha , \Psi \rangle_1 = \int_X \Psi^* \, d\alpha ,$$

pour tout $\Psi \in N$ et tout représentant quasi-continu Ψ^* de Ψ.

Démonstration. - Recopier celle du cas classique. Notons que cette dernière formule a un sens grâce à la proposition (III.2.17).

Appendice A [4]

PROPOSITION. - Soit $K = L^2(\Omega , \mathcal{B} , m)$, où $(\Omega , \mathcal{B} , m)$ est un espace probabilité quelconque. Soit $V(t)$ un semi-groupe unitaire fortement continu sur K [5], et soit $R \in L^2(\Omega , \mathcal{B} , m)$ tel que R soit limite faible, quand $t \longrightarrow 0$, de $\frac{1}{t}\{V(t)1 - 1\}$, alors R est limite forte de $\frac{1}{t}\{V(t)1 - 1\}$.

Démonstration. - Posons $A_t = 1 - V(t)1$. Il suffit de prouver que

$$\|R\|_{L^2} \geqslant \overline{\lim} \, \|A_t/t\|_{L^2} .$$

Pour ce faire, on pose $\eta(t) = \int_\Omega A_t \, d\mu$. On a

$$\|A_t\|^2 = 2 \int A_t \, d\mu = 2\eta(t) .$$

Il est facile de vérifier en utilisant l'hypothèse que $\eta(t)$ est dérivable en tout t et que $\eta'(t) = - \int_\Omega RV(- t)1 \, dm$.

D'où, comme $\eta(0) = 0$,

$$\eta(t) = - \int_0^t \eta'(s) \, ds = \int_0^t ds \, RV(- s)1 \, dm .$$

Mais $\int_\Omega R \, dm = 0$ puisque R est limite dans $L^1(\Omega , m)$ de $\frac{1}{2}[\frac{1}{t}\{(V(t)1)^2 - 1\}] = B_t$ et $\int_\Omega B_t \, dm = 0$.

D'où

$$\eta(t) = \int_0^t ds \, \{\int_\Omega R\{V(- s)1 - 1\} \, dm\} .$$

En appliquant un nouvelle fois l'hypothèse,

$$\int_\Omega R\{V(- s)1 - 1\} \, dm = - s \int_\Omega R^2 \, dm + 0(s) .$$

---

[4] Cette proposition est citée sans démonstration ni référence dans [2] (remarque p. 24).

[5] tel que $V(t)1 \geqslant 0$ m. p. p., pour tout $t \in \underset{\sim}{R}^*$.

D'où

$$\eta(t) = \int_0^t + s\|R\|^2_{L^2} + 0(s)\ ds = \frac{t^2}{2}\|R\|^2_{L^2} + 0(t^2)\ .$$

et

$$\|\Lambda_{t}/t\|^2_{L^2} = 2\eta(t)/t^2 = \|R\|^2_{L^2} + 0(1)\ .$$

Appendice B

Espaces de Dirichlet et caractère sous-markovien du semi-groupe P_t .

THÉORÈME 1. - Soit $N \hookrightarrow L^2(\Omega\ ,\ \mathcal{B}\ ,\ m)$ un sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega\ ,\ \mathcal{B}\ ,\ m)$, où Ω est un espace de Hilbert, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de Ω et m une probabilité de Radon sur Ω . Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) Toute contraction normale opère sur N ;

(ii) T_0^1 opère sur N ;

(iii) λR_λ est un opérateur sous-markovien, pour tout $\lambda > 0$;

(iv) P_t est un opérateur sous-markovien, pour tout $t > 0$.

On rappelle qu'un opérateur borné Λ sur $L^2(\Omega\ ,\ \mathcal{B}\ ,\ m)$ est dit sous-markovien si, et seulement si, pour tout $f \in L^2(\Omega\ ,\quad ,\ m)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ m . p. p., $0 \leq \Lambda f \leq 1$ m . p. p.

Démonstration. - Ce théorème est bien connu dans le cas où l'espace de base Ω est localement compact (cf. [6]). Une inspection de la preuve dans ce cas montre que la seule difficulté pour le généraliser au cas Ω , espace de Hilbert, provient de l'implication (iv) $\Longrightarrow$ (i). On voit alors qu'il suffit de démontrer le théorème suivant, dont l'énoncé est analogue à celui utilisé dans le cas localement compact, mais que nous démontrons en dimension infinie par une voie tout-à-fait différente.

On rappelle le théorème de Bochner Sazarov (cf. [25]).

THÉORÈME. - Soit $(\Omega\ ,\ \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert séparable réel. Une fonctionnelle Φ définie sur Ω à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$ est la transformée de Fourier d'une mesure de Radon positive mormée P sur Ω si, et seulement si, elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1° $\Phi(0) = C > 0$;

2° Positivité de type Bochner ;

3° Continuité en 0 pour la topologie Hilbert Schmidt sur Ω .

THÉORÈME 2.

(a) Soit $(\Omega , \mathcal{B} , m)$ comme dans le théorème 1, et Λ un opérateur continu de $L^2(\Omega , m)$ tel que, $\forall f \in L^2(\Omega , m) , f \geq 0$ m . p. p. $\Longrightarrow \Lambda f \geq 0$

$$\forall f \in L^2(\Omega , m) , \quad f \geqslant 0 \quad m . p. p. \Longrightarrow \Lambda f \geqslant 0 \quad m . p. p.$$

Alors, il existe P , mesure de Radon bornée, positive, sur $\Omega \times \Omega$ telle que $\forall f , g \in C_b^0(\Omega)$

$$(*) \qquad \int_\Omega \Lambda f(\omega) \; g(\omega) \; dm(\omega) = \iint_{\Omega\times\Omega} f(\omega_1) \; g(\omega_2) \; dP(\omega_1 , \omega_2) .$$

(b) Si de plus Λ est auto-adjoint, la mesure P est symétrique par rapport à la diagonale.

(c) Si de plus Λ est sous-markovien, alors $pr_1 \, P = pr_2 \, P$ est absolument continue par rapport à m et sa densité est $\Lambda(1)$ (pr_1 désigne la projection de $\Omega \times \Omega$ sur le premier facteur).

Démonstration. - Dans toute la démonstration, $L^2(\Omega , m)$ et Λ seront "complexifiés". Ainsi, par exemple, $\Lambda^c(f + ig) = \Lambda(f) + i\Lambda(g)$. On conserve cependant la notation Λ . On rappelle (cf. [26], p. 30) que, si $f \in L^2_{\underset{\sim}{C}}(\Omega , m)$, on a

$$|\Lambda(f)(\omega)| \leqslant \Lambda(|f|)(\omega) \quad m . p. p.$$

Pour $\xi \in \Omega$, on note e_ξ la fonction continue bornée définie sur Ω $e^{i\langle \xi , \cdot \rangle}$. On va prouver, en premier lieu, que la fonction Φ suivante, définie sur $\Omega \times \Omega$ par $\xi , \zeta \longmapsto \int_\Omega \Lambda(e_\xi) e_\zeta \, dm$ vérifie les hypothèses du théorème de Bochner Sazanov. On a d'abord

- $\Phi(0 , 0) = \int_\Omega \Lambda(1) \; dm = C > 0$ (si Λ n'est pas nul) ;
- Positivité de type Bochner : Soit $n \in \underset{\sim}{N}$, $(\xi_i , \zeta_i) \in \Omega \times \Omega$ ($i = 1 , \dots , n$), $c_i \in \underset{\sim}{C}$ ($i = 1 , \dots , n$) . On a à démontrer que $\sum_{i,j} \Phi(\xi_i - \xi_j , \zeta_i - \zeta_j) c_i \, \bar{c}_j \geqslant 0$.

LEMME 3. - $\epsilon > 0$ fixé. Il existe une suite $(B_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ de boréliens de Ω et une suite $(\omega_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ de points dans Ω telle que :

- $(B_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ soit une partition de Ω ;
- $\forall k \in \underset{\sim}{N}$, $\omega_k \in B_k$;
- $\forall k \in \underset{\sim}{N}$, $\forall \omega \in B_k$, $\forall i , j = 1 , \dots , n$,

$$|e_{\zeta_i - \zeta_j}(\omega) - e_{\zeta_i - \zeta_j}(\omega_k)| \leqslant \epsilon .$$

Démonstration du lemme. - Pour tout $\zeta \in \Omega$, on a

$$|e_\zeta(\omega) - e_\zeta(\omega')| = |e_\zeta(\omega)| \, |1 - e_\zeta(\omega - \omega')| \leqslant 1\langle \zeta , \omega - \omega' \rangle| \leqslant \|\zeta\|_\Omega \, \|\omega - \omega'\|_\Omega .$$

On en tire que les $e_{\zeta_i - \zeta_j}$ ($i , j = 1 , \dots , n$) sont uniformément lipschitziennes de rapport $M = \sup_{i,j} \|\zeta_i - \zeta_j\|_\Omega$.

Si $(A_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ désigne un recouvrement de Ω par des boules de rayon $\epsilon/2M$, on définira

$$B_1 = \Lambda_1 \ , \quad B_2 = \Lambda_2 \setminus B_1 \ , \ \dots \ , \quad B_{k+1} = \Lambda_{k+1} \setminus \bigcup_{m=1}^{k} B_m \ .$$

En modifiant au besoin les indices, on peut supposer que tous les B_k sont non vides et l'on choisit dans chacun un point ω_k. Les suites (B_k) et (ω_k) conviennent.

(Fin de la démonstration du lemme)

On a alors

$$\sum_{i,j} \Phi(\xi_i-\xi_j \ , \ \zeta_i-\zeta_j) c_i \bar{c}_j = \int_\Omega \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \Lambda(e_{\xi_i-\xi_j})(\omega) \ e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega) \ dm(\omega)$$
$$= \sum_k \int_{B_k} \sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \Lambda(e_{\xi_i-\xi_j})(\omega)\{e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega_k) + (e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega) - e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega_k))\} \ dm(\omega)$$
$$= \sum_k \int_{B_k} \Lambda[\{\sum_i c_i \ e_{\xi_i}(\omega_k) e_{\xi_i}\}^2](\omega) \ dm(\omega) + \sum_k R_k \geqslant \sum_k R_k$$

d'après l'hypothèse faite sur Λ,

$$\sum_{i,j} \Phi(\xi_i - \xi_j \ , \ \zeta_i - \zeta_j) c_i \bar{c}_j \geqslant - \sum |R_k| \ ,$$

avec, pour tout $k \in \underset{\sim}{N}$,

$$|R_k| \leqslant \int_{B_k} \sum_{i,j} |c_i||c_j||\Lambda(e_{\xi_i-e_\xi})(\omega)||e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega) - e_{\zeta_i-\zeta_j}(\omega_k)| \ dm(\omega)$$
$$\leqslant \epsilon \int_{B_k} \{\sum_{i,j} |c_i||c_j|\}\Lambda(1)(\omega) \ dm(\omega)$$

et donc

$$\sum_k |R_k| \leqslant \epsilon(\sum_{i,j} |c_i|)^2 \int \Lambda(1) \ dm \ .$$

On fait tendre alors ϵ vers 0.

Montrons maintenant la continuité de Φ pour la topologie Hilbert Schmidt sur Ω.

$$Q = |\Phi(0 \ , \ 0) - \Phi(\xi \ , \ \zeta)| \leqslant \int_\Omega |\Lambda(e_\xi - 1)| \ dm + \int_\Omega |\Lambda e_\zeta||e_\zeta - 1| \ dm$$
$$\leqslant \{\int_\Omega |\Lambda(e_\xi - 1)|^2 \ dm\}^{1/2} + \{\int_\Omega |\Lambda(1)|^2 \ dm\}^{1/2} \{\int_\Omega |e_\zeta - 1|^2 \ dm\}^{1/2}$$
$$\leqslant \|\Lambda\|[\{\int |e_\xi - 1|^2 \ dm\}^{1/2} + \{\int |e_\zeta - 1|^2 \ dm\}^{1/2}] \ .$$

Or, puisque m est une mesure de Radon, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $4m(\Omega \setminus B_r) \leqslant \epsilon/3\|\Lambda\|$ (où B_r désigne la boule de centre 0 et de rayon r dans Ω).

Alors l'opérateur borné S défini sur Ω par la forme bilinéaire

$$(\xi_1 \ , \ \xi_2) \longrightarrow \langle S\xi_1 \ , \ S\xi_2\rangle = \int_{B_r} \langle \xi_1 \ , \ \omega\rangle\langle \xi_2 \ , \ \omega\rangle \ dm(\omega)$$

est de type Hilbert Schmidt.

En utilisant les majorations $|(e_\xi - 1)(\omega)|^2 \leqslant |\langle \xi \ , \ \omega\rangle|^2$, il vient donc

$$Q \leqslant \|\Lambda\|[\|S\xi\|^2 + \|S\zeta\|^2 + 4m(\Omega \setminus B_r)] \leqslant \epsilon \ ,$$

si $\|S\xi\|^2 \leqslant \epsilon/3$ et $\|S\xi\|^2 \leqslant \epsilon/3$.

Ceci prouve la continuité.

On peut donc appliquer le théorème de Bochner Sazanov et l'on trouve une mesure de Radon P , sur $\Omega \times \Omega$, positive et de masse finie, telle que, pour tout $(\xi , \zeta) \in \Omega \times \Omega$,

$$\int_\Omega A(e_\xi)\, e_\xi\, dP = \Phi(\xi , \zeta) \equiv \hat{P}(\xi , \zeta)$$
$$= \iint_{\Omega\times\Omega} e^{i[\langle \xi,\omega_1\rangle+\langle \zeta,\omega_2\rangle]}\, dP(\omega_1 , \omega_2) = \iint_{\Omega\times\Omega} e_\xi(\omega_1)\, e_\zeta(\omega_2)\, dP(\omega_1 , \omega_2) .$$

On étend par bilinéarité cette relation aux combinaisons linéaires d'exponentielles, qui forment une sous-algèbre, séparant les points de Ω , de $C^0_b(\Omega)$. D'après (III.0.4 B), elles sont donc partout denses dans $C^0_b(\Omega)$ pour la topologie stricte τ_0 (cf. (II.0.4)) et l'on étend sans problèmes la relation (*) à tout couple $(f , g) \in C^0_b(\Omega) \times C^0_b(\Omega)$.

(b) C'est évident.

(c) Il suffit de remarquer que, dans ces conditions, la forme bilinéaire $(f , g) \longrightarrow \iint_{\Omega\times\Omega} f(\omega_1)\, g(\omega_2)\, dP(\omega_1 , \omega_2)$ de $C^0_b(\Omega) \times C^0_b(\Omega)$ dans $\underset{\sim}{R}$ est continue pour la norme de $L^2(\Omega , m)$ puisque

$$\left|\iint_{\Omega\times\Omega} f(\omega_1)\, g(\omega_2)\, dP(\omega_1 , \omega_2)\right|$$
$$\leq \{\iint |f(\omega_1)|^2\, dP(\omega_1 , \omega_2)\}^{1/2}\, \{\iint |g(\omega_2)|^2\, dP(\omega_1 , \omega_2)\}^{1/2}$$
$$= \{\int_\Omega A^*(1)\, |f|^2\, dm\}^{1/2}\, \{\int_\Omega A(1)\, |g|^2\, dm\}^{1/2} \leq \|f\|_{L^2}\, \|g\|_{L^2} .$$

La relation (*) est donc vraie, pour tout $f , g \in L^2(\Omega , m)$. (c) en résulte immédiatement.

Appendice C

Contre-exemple à la proposition (III.2.15). - Cette proposition n'est plus vraie si A est supposé seulement faiblement fermé.

Si $\alpha > 0$ et $\xi \in X' \setminus \cup X_i$, on posera $A_\alpha = \{(\xi/\alpha)^0\}^c = \{x \in X , \ |(x , \xi)| \geq \alpha\}$. Alors, pour tout i , $f_i(A_\alpha) = X_i$.

En effet, fixons i et remarquons que, $\forall\ \beta > 0$,

$$\xi \notin X_i \Longrightarrow \xi/\beta \notin X_i = F_i^\perp \Longrightarrow F_i = (F_i^\perp)^0 \not\subset (\xi/\beta)^0$$
$$\Longrightarrow \exists\ \zeta \in X ,\ \zeta \in A_\beta \cap F_i \Longrightarrow \exists\ \zeta \in A_\beta ,\ f_i(\zeta) = 0 .$$

Si $x \in X_i$, on trouvera donc $\zeta \in A$ tel que $f_i(\zeta) = x$ en prenant $\zeta = \tilde{\zeta} + x$, où $\tilde{\zeta} \in A_{\alpha+|x,\xi)|}$ est tel que $f_i(\tilde{\zeta}) = 0$.

Maintenant A^c_α est un ouvert non vide. Il existe donc un compact K inclus dans A^c_α de mesure > 0 .

Choisissant alors un élément $\zeta \in HC_b^1(X) \cap C_b^0(X)$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ sur A_α et $\operatorname{supp} \zeta \subset K^c$, on a $\zeta \in C^1_{A_\alpha}$ et $\int_X \zeta \, d\mu \leq \mu(K^c) < 1$.

On a alors $f_i(A_\alpha) = X_i \Longrightarrow \operatorname{cap}_i(f_i(A_\alpha)) = 1$. Mais $\operatorname{cap} A_\alpha < 1$; car sinon le potentiel capacitaire serait donné par la fonction 1 et $\zeta \in C^1_{A_\alpha}$ devrait vérifier $\langle 1 , \zeta - 1\rangle_1 \geq 0$ c'est-à-dire $\int \zeta \, d\mu \geq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALBEVERIO (S.) and HØEGH KROHN (R.). - Dirichlet forms and diffusions processes on rigged Hilbert spaces, Z. für Wahrscheinlichk. und verw. Geb., t. 40, 1977, p. 1-57.

[2] ALBEVERIO (S.) and HØEGH KROHN (R.). - Quasi-invariant measures, symmetric diffusion processes and quantum fields, "Les méthodes mathématiques de la théorie quantique des champs" [1975. Marseille]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1976 (Colloques internationaux du CNRS, 248).

[3] ANCONA (A.). - Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet, Séminaire de théorie du potentiel, n° 2, p. 1-25. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 563).

[4] BRELOT (M.). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fondamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research. Lectures on Mathematics, 19).

[5] CHOQUET (G.). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1953/54, p. 131-295.

[6] DENY (J.). - Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel. Cours au C. I. M. E., 1969.

[7] GARLING (D. J. H.). - A generalized form of inductive limit topology for vector spaces, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t 14, 1964, p. 1-28.

[8] GARLING (D. J. H.), FREMLIN (D. H.) and HAYDON (R. G.). - Bounded measures on topological spaces, Proc. London math. Soc., 3rd Series, t. 25, 1972, p. 115-136.

[9] GEL'FAND (I. M.) et VILENKIN (N. Y.). - Les distributions. Tome 4 : Applications de l'analyse harmonique. - Paris, Dunod, 1967.

[10] GOODMAN (V.). - A divergence theorem for Hilbert spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 164, 1972, p. 411-426.

[11] GROSS (L.). - Potential theory of Hilbert spaces, J. funct. Analysis, t. 1, 1967, p. 123-181.

[12] GROSS (L.). - Logarithmic Sobolev inequalities, Amer. J. of Math., t. 97, 1975, p. 1061-1083.

[13] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1958.

[14] HEGERFELDT (G. C.). - On canonical commutation relations and infinite dimensional measures, J. Math. Phys., t. 13, 1972, p. 45-50.

[15] KRÉE (M.). - Classes K^s du type Sobolev, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 10, 21 p.

[16] KRÉE (P.). - Utilisation de limites inductives généralisées d'espaces localement convexes, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 1, 9 p.

[17] KRÉE (P.). - Dérivées de densité d'une prodistribution, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 9, 14 p.

[18] KRÉE (P.). - Probabilités cylindriques et processus linéaires, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, nº 4, 17 p.

[19] LASCAR (B.). - Propriétés locales de type Sobolev en dimension infinie, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées en dimension infinie, 1re année, 1974/75, nº 11, 16 p.

[20] LASCAR (B.). - Une C. N. S. en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 2, 1977, fasc. 1, p. 31-67.

[21] LASCAR (B.). - Opérateurs pseudo-différentiels en dimension infinie. Etude de l'hypoellipticité et de la résolubilité dans des classes de fonctions hölderiennes et de distribution pour des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques, J. Analyse math., Jerusalem, t. 28, 1978, p. 39-104.

[22] MEYER (P. A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[23] ROYER (G.). - Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $C(\underset{\sim}{R})$, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 8, 1975, p. 319-338.

[24] SCHACHERMAYER (W.) . - Supporteurs des prodistributions et mesures cylindriques, Séminaire P. Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, nº 3, 8 p.

[25] SCHWARTZ (L.). - Radon mesures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. - Bombay, Oxford University Press, 1973 (Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics, 6).

[26] SIMON (B.). - The $P(\phi)_2$ euclidian (quantum) field theory. - Princeton, Princeton University Press, 1974 (Princeton Series in Physics).

[27] SION (M.). - On capacitability and measurability, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, fasc. 1, p. 83-98.