Michel Marias

Espaces du type Sobolev sur un espace de Hilbert complexe

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 7, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A7_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 7, 12 p.

ESPACES DU TYPE SOBOLEV SUR UN ESPACE DE HILBERT COMPLEXE

par Michel HARIAS

1. Définitions et rappels.

Soit Z un espace hilbertien complexe de dimension finie, muni d'une conjugaison $z = \bar{z}$. Sur $Z \simeq \underset{\sim}{C}^n$, on considère la mesure gaussienne normale canonique ν'_n :

$$d\nu'_n(z , \bar{z}) = \Pi^{-n} \exp(- z\bar{z})\, d^n z ,$$

si $z = (z_1 , \ldots , z_n)$, $z_j = x_j + iy_j$ et

$$d^n z = dx_1 \ldots dx_n\, dy_1 \ldots dy_n = d^n x\, d^n y .$$

On note $L^2(Z , \nu'_n)$, l'espace vectoriel des classes d'équivalence des fonctions $\Phi : Z \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ de carré intégrable par rapport à la mesure $d\nu'_n$. C'est un espace de Hilbert isomorphe à son antidual. Pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$, on note $\mathrm{Exp}^m Z$, l'espace de Banach des fonctions entières $\Phi : Z \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ qui satisfont la condition de croissance :

$$\|\Phi\|_m = \sup_{z \in Z} |\Phi(z)| \exp(- m|z|) < + \infty .$$

L'espace nucléaire limite inductive des $\mathrm{Exp}^m Z$ est noté $\mathrm{Exp}(Z)$; c'est l'espace des fonctions entières à croissance exponentielle sur Z. Son antidual $'\mathrm{Exp}\, Z$ est l'espace des antifonctionelles analytiques de type exponentiel.

1.1 Un triplet nucléaire complexe [2]. - On identifie Z à l'antidiagonale de $\bar{Z} \times Z$ par l'application

$$Z \longrightarrow \{(\bar{z} , z') \in \bar{Z} \times Z ;\ z = z'\}$$

$$z \longmapsto (\bar{z} , z) .$$

Alors l'injection $k : \mathrm{Exp}(\bar{z} \times z) \hookrightarrow L^2(z , \nu'_n)$, définie par la restriction à l'antidiagonale de $\bar{Z} \times Z$, est continue à image dense. Introduisant l'adjointe k^* de k , il vient le triplet nucléaire :

$$\mathcal{E}(Z) = (\mathrm{Exp}(\bar{Z} \times Z)\ \nu'_n \xhookrightarrow{k} L^2(Z , \nu'_n)\ \nu'_n \xhookrightarrow{k^*} {}'\mathrm{Exp}(\bar{Z} \times Z)) .$$

En utilisant ce triplet, qui remplace le triplet de L. SCHWARTZ

$$\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)\, dx \hookrightarrow L^2(\underset{\sim}{R}^n , dx).dx \hookrightarrow {}'\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n) ,$$

on définira les espaces de Sobolev complexes.

1.2. Polynômes d'Hermite complexes [5] et la transformation Θ. - Sur $\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$, on définit les polynômes d'Hermite complexes par la formule :

$$H_{k,\ell}(\bar{z} , z) = \int_{\underset{\sim}{C}} (\bar{z} + i\bar{t})^k (z + it)^\ell\, d\nu'(t , \bar{t}) .$$

Ils dépendent de deux indices k , ℓ , entiers positifs.

En sommant

(1.1) $$\sum \frac{\bar{u}^k \, u^\ell}{k! \, \ell!} H_{k,\ell}(\bar{z} , z) = \exp(\bar{u}\bar{z} + uz) \int_{\underset{\sim}{C}} \exp i(\bar{u}\bar{t} + ut) \, d\nu'(t , \bar{t})$$
$$= \exp(- \bar{u}u + \bar{u}\bar{z} + uz) ,$$

ont rouve que les polynômes d'Hermite complexes admettent une fonction génératrice

$$G(\bar{u} , u , \bar{z} , z) = \exp(- \bar{u}u + \bar{u}\bar{z} + uz) .$$

De la relation (1.1), on déduit que

(1.2) $$H_{k,\ell}(\bar{z} , z) = [(- 1)^{k+\ell} \frac{\partial \, \partial^{k+\ell}}{\partial \bar{z}^k \, \partial z^\ell} \exp(- z\bar{z})] \exp z\bar{z} .$$

On en déduit que les polynômes $(k! \, \ell!)^{-1/2} H_{k,\ell}(\bar{z} , z)$ forment une base orthonormée de $L^2(\underset{\sim}{C} , \nu')$.

Alors $f \in L^2(\underset{\sim}{C} , \nu') \Longleftrightarrow f(\bar{z} , z) = \sum a_{k,\ell} H_{k,\ell}(\bar{z} , z)$

(1.3) $$\sum_{k,\ell} |a_{k,\ell}|^2 < + \infty \quad \text{et} \quad a_{k,\ell} = \langle f | \frac{H_{k,\ell}}{(k! \, \ell!)^{1/2}} \rangle .$$

Si on note

$$F^2(\bar{Z} \times Z) = \{f : \bar{Z} \times Z \longrightarrow \underset{\sim}{C} \; ; \; f(\bar{z}, z) = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} \bar{z}^k z^\ell \quad \text{et} \quad \sum_{k,\ell} |a_{k,\ell}|^2 < + \infty\} ,$$

c'est un espace de Hilbert qui admet comme base orthonormée la famille

$$\{(k! \, \ell!)^{-1/2} \bar{z}^k z^\ell\}_{k,\ell} .$$

On peut alors définir l'application suivante

$$L^2(\underset{\sim}{C} , \nu') \xrightarrow{\Theta} F(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$$
$$\varphi \longmapsto \Theta\varphi = \Phi$$

avec

$$\Phi(\bar{z} , z) = \sum_{k,\ell} \langle \varphi \frac{H_{k,\ell}}{(k! \, \ell!)^{1/2}} \rangle \frac{\bar{z}^k \, z^\ell}{(k! \, \ell!)^{1/2}}$$
$$= \int_{\underset{\sim}{C}} \sum_{k,\ell} \frac{\bar{z}^k \, z^\ell}{k! \, \ell!} H_{k,\ell}(\bar{u} , u) \, \varphi(\bar{u} , u) \, d\nu'(\bar{u} , u)$$
$$= \int \exp(- \bar{u}u + \bar{u}\bar{z} + uz) \, \varphi(\bar{u} , u) \, d\nu'(\bar{u} , u) .$$

On remarque que Θ envoie isométriquement la base $\{(k! \, \ell!)^{-1/2} H_{k,\ell}\}_{k,\ell}$ de $L^2(\underset{\sim}{C} , \nu')$ sur la base $\{(k! \, \ell!)^{-1/2} \bar{z}^k z^\ell\}_{k,\ell}$ de $F^2(\underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{C})$, donc Θ est une isométrie de $L^2(\underset{\sim}{C} , \nu')$ sur $F^2(\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C})$.

PROPOSITION 1. - <u>L'application</u> $\Theta \circ k$ <u>envoie bijectivement</u> $\mathrm{Exp} \, \bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$ <u>dans</u> $\mathrm{Exp} \, \bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$.

<u>Preuve</u>. - Soit $\varphi(\bar{u} , u) \in L^2(\underset{\sim}{C} , \nu')$ qui se prolonge à une application $\tilde{\varphi}(\bar{z}, z')$ sur $\bar{\underset{\sim}{C}} \times \underset{\sim}{C}$ entière et à croissance exponentielle, c'est-à-dire vérifiant la condition de croissance :

(1.4) $\exists\ c > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0$ tels que, $\forall\ (\bar{z}\ ,\ z')$,

$$|\tilde{\varphi}(\bar{z}\ ,\ z')| < c \exp[\alpha(|\bar{z}| + |z'|)] .$$

Comme $\varphi(\bar{u}\ ,\ u) \in L^2(\underset{\sim}{C}\ ,\ \nu')$, on a le développement suivant

(1.5) $$\varphi(\bar{u}\ ,\ u) = \Sigma_{k,\ell}\ \varphi_{k,\ell}\ \frac{H_{k,\ell}(\bar{u}\ ,\ u)}{(k!\ \ell!)^{1/2}}$$

avec

$$\varphi_{k,\ell} = (k!\ \ell!)^{-1/2} \int_{\underset{\sim}{C}} \varphi(\bar{u}\ ,\ u)\ H_{k,\ell}(\bar{u}\ ,\ u)\ d\nu'(u)$$
$$= (k!\ \ell!)^{-1/2} \int_{\underset{\sim}{C}} \frac{\partial^{k+\ell}\ \varphi(\bar{u}\ ,\ u)}{\partial\bar{u}^k\ \partial u^\ell}\ d\nu'(u) .$$

On fait des estimations des $\partial^{k+\ell}\ \varphi(\bar{u}\ ,\ u)/\partial\bar{u}^k\ \partial u^\ell$ pour trouver une estimation de $(\Theta\varphi)(\bar{z}\ ,\ z')$.

On fixe u , et on considère $(z\ ,\ z') \in D_R(u) \times D_R(u)$; alors

(1.6) $$\left|\frac{\partial^{k+\ell}\ \varphi(\bar{z}\ ,\ z')}{\partial\bar{z}^k\ \partial z'^\ell}\right| \leq c \exp(\alpha(|\bar{z}| + |z'|))\ k!\ \ell!\ M(R) \quad \text{avec} \quad M(R) = \frac{\exp 2\alpha R}{R^{k+\ell}} .$$

Mais $M(R)$ atteint son minimum si $R = (k + \ell)/2\alpha$, et par conséquent

$$|\varphi_{k,\ell}| \leq c_1\ c\ \frac{(e\alpha)^k\ (e\alpha)^\ell}{(k!\ \ell!)^{1/2}} .$$

Comme $(\Theta\varphi)(\bar{z}\ ,\ z') = \Sigma_{k,\ell}\ \varphi_{k,\ell}\ \bar{z}^k\ z'^\ell/(k!\ \ell!)^{1/2}$, on trouve :

$$|\Theta\varphi(\bar{z}\ ,\ z')| \leq c_1\ c \exp e\alpha(|\bar{z}| + |z'|) .$$

Donc $\Theta \circ k$ envoie continûment $\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$ dans $\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$.

Inversement, on remarque que si $\lambda \in \underset{\sim}{C}$:

$$(\Theta \circ k)^{-1}\ (\lambda\bar{z}^k\ z^\ell) = \lambda H_{k,\ell}(\bar{z}\ ,\ z') = \lambda \int_{\underset{\sim}{C}} (\bar{z} + i\bar{t})^k\ (z' + it)^\ell\ d\nu'(\bar{t}\ ,\ t) .$$

Par conséquent, si $\varphi \in \operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$ polynômiale, on a :

(1.7) $$[(\Theta \circ k)^{-1}\ \varphi](\bar{z}\ ,\ z') = \int_{\underset{\sim}{C}} \varphi(\bar{z} + i\bar{t}\ ,\ z' + it)\ d\nu'(t\ ,\ \bar{t}) .$$

Donc si $\varphi \in \operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$, $(\Theta \circ k)^{-1}\ \varphi \in \operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$, car les fonctions polynômiales sont denses dans $\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$, et la formule (1.7) donne l'estimation demandée.

C. Q. A. D.

La transformation Θ est un isomorphisme de triplets nucléaires [2]

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C} & \xrightarrow{k} & L^2(\underset{\sim}{C}\ ,\ \nu') & \hookrightarrow & '\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C} \\
\downarrow & & \downarrow \Theta & & \downarrow \\
\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C} & \hookrightarrow & F^2(\underset{\sim}{C}\ ,\ \nu') & \hookrightarrow & '\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C} .
\end{array}$$

<u>Remarque</u> 2. - Pour tout $T \in {}'\operatorname{Exp} \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$, on définit la famille $(a_{k,\ell})_{k,\ell}$ de ses coefficients d'Hermite par

$$a_{k,\ell} = (k!\ \ell!)^{-1/2} \langle T | H_{k,\ell} \rangle .$$

Alors T est caractérisé par la famille $(a_{k,\ell})_{k,\ell}$. Car si $a_{k,\ell} = 0$, $\forall\ k\ ,\ \ell$ entiers, en prenant sa transformée par Θ ,

$$(\mathcal{G}T)(\bar{z}\ ,\ z') = \langle T(\bar{u}\ ,\ u')\ ,\ \exp(-\bar{u}u' + \bar{u}\bar{z} + u'z')\rangle$$
$$= \langle T(\bar{u}\ ,\ u')\ ,\ \sum_{k,\ell} \frac{\bar{z}^k\ z'^\ell}{k!\ \ell!} H_{k,\ell}(\bar{u}\ ,\ u')\rangle = 0\ ,$$

ce qui entraine $T \equiv 0$.

Remarque 3. - Tout ce qui est fait en (1.7) est valable pour $\underset{\sim}{C}^n$, $n \geq 1$.

1.3. Dérivation relative. - Posons

$$\partial_{z_i}^\ell = \frac{\partial^\ell}{\partial z_i}\ ,\quad \partial_{\bar{z}_i}^\ell = \frac{\partial^\ell}{\partial \bar{z}_i}\ ,\quad \check{\partial}_{z_i} = \exp(z\bar{z})\,\partial_{z_i}\ \exp(-z\bar{z}) = \partial_{z_i} - \bar{z}_i\ .$$

et

$$\check{\partial}_{\bar{z}_i} = \exp(z\bar{z})\ \partial_{\bar{z}_i}\ \exp(-z\bar{z}) = \partial_{\bar{z}_i} - z_i\ .$$

Ces opérateurs sont linéaires continus dans $\mathrm{Exp}\ \bar{Z} \times Z$.

En prenant l'adjoint de l'opérateur $-\check{\partial}_{z_i}^\ell$ (resp. $-\check{\partial}_{\bar{z}_i}^\ell$) on définit un opérateur $\delta_{z_i}^\ell$ (resp. $\delta_{\bar{z}_i}^\ell$) de $'\mathrm{Exp}\ \underset{\sim}{\bar{C}} \times \underset{\sim}{C}$.

1.4. Définition des espaces $M^{s,t}(Z)$ quand $Z \simeq \underset{\sim}{C}^n$.

DÉFINITION 4. - Pour s et t entiers positifs, on définit l'espace :

$$M^{s,t}(Z) = \{f(\bar{z}\ ,\ z')\nu_n' \in {'\mathrm{Exp}}(\bar{Z} \times Z)\ ;$$
$$\partial_z^\lambda\ \partial_{\bar{z}}^\mu\ f(\bar{z}\ ,\ z) \in L^2(Z\ ,\ \nu')\ \text{ pour }\ |\lambda| \leq s\ ,\quad |\mu| \leq t\}\ .$$

On munit $M^{s,t}(Z)$ de la norme :

$$\|f\|_{s,t}^2 = \sum_{\substack{0\leq \ell \leq s\\ 0\leq m\leq t}} |||D_{\bar{z}}^\ell\ D_z^m\ f|||^2 \tag{1.8}$$

avec

$$|||D_{\bar{z}}^\ell\ D_z^m\ f|||^2 = \sum_{|\lambda|=\ell} \sum_{|\mu|=m} \|\partial_{\bar{z}}^\lambda\ \partial_z^\mu\ f\|_2^2\ \frac{|\lambda|!\ |\mu|!}{\lambda!\ \mu!}\ .$$

Pour pouvoir définir $M^{s,t}(Z)$ pour $(s\ ,\ t) \in \underset{\sim}{R}^2$ quelconque, on cherche une norme équivalente, en développant $f \in {'\mathrm{Exp}}\ \bar{Z} \times Z$ suivant les polynômes d'Hermite complexes. On a vu que si $f \in {'\mathrm{Exp}}\ \bar{Z} \times Z$, alors

$$f(\bar{z}\ ,\ z) = \sum a_{\alpha,\beta}\ H_{\alpha,\beta}(\bar{z}\ ,\ z)$$

avec α , β multi-indices de longueur n et $a_{\alpha,\beta} = (\alpha!\ \beta!)^{-1/2}\ \langle f | H_{\alpha,\beta}\rangle$.

Par conséquent

$$\partial_{\bar{z}}^\lambda\ \partial_z^\mu\ f(\bar{z}\ ,\ z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\ H_{\alpha-\mu,\beta-\lambda}(\bar{z},z)\ \left(\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha-\mu)!\ (\beta-\lambda)!}\right)^{1/2}$$

et, en posant $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t(t-1)$, ... , on trouve :

$$\partial_{\bar{z}}^\lambda\ \partial_z^\mu\ f(\bar{z}\ ,\ z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(P_{\mu_1}(\alpha_1)\ P_{\lambda_1}(\beta_1)\ \ldots\ P_{\mu_n}(\alpha_n)\ P_{\lambda_n}(\beta_n))^{\frac{1}{2}}\ H_{\alpha-\mu,\beta-\lambda}(\bar{z}\ ,\ z)\ .$$

La norme de f est égale à

$$\|f\|^2_{s,t} = \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2 \sum_{\substack{0\leq \ell\leq t\\ 0\leq m\leq s}} \sum_{\substack{|\lambda|=\ell\\ |\mu|=m}} \frac{|\lambda|!\,|\mu|!}{\lambda!\,\mu!} P_{\mu_1}(\alpha_1) P_{\lambda_1}(\beta_1) \ldots P_{\mu_n}(\alpha_n) P_{\lambda_n}(\beta_n)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2 \sum_{\substack{0\leq \ell\leq t\\ 0\leq m\leq s}} P_m(|\alpha|)P_\ell(|\beta|) .$$

Il existe alors des constantes positives $c_1(s , t)$, $c_2(s , t)$ [1] telles que

$$c_1(s , t) \|f\|'_{s,t} \leq \|f\|_{s,t} \leq c_2(s , t) \|f\|'_{s,t}$$

si

(1.4) $$\|f\|'^2_{s,t} = \Sigma_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2 (1 + |\alpha|)^s (1 + |\beta|)^t .$$

Cette norme permet de définir $M^{s,t}(Z)$ pour $(s , t) \in \underset{\sim}{R}^2$.

DÉFINITION 5. - Si $(s , t) \in \underset{\sim}{R}^2$, on définit $M^{s,t}(Z)$ comme l'espace des $T \in {}'\mathrm{Exp}\ \overline{Z} \times Z$ telles que :

$$\sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2 (1 + |\alpha|)^s (1 + |\beta|)^t < + \infty$$

si $a_{\alpha,\beta} = (\alpha!\ \beta!)^{-1/2} \langle T|H_{\alpha,\beta}\rangle$, $\alpha \in \underset{\sim}{N}^n$, $\beta \in \underset{\sim}{N}^n$, sont les coefficients d'Hermite de l'antifonctionnelle analytique T .

On a les inclusions suivantes, pour $s \geq 0$, $t \geq 0$,

$$M^{s,t}(Z) \hookrightarrow L^2(Z , \nu'_n)\nu'_n \hookrightarrow M^{-s,-t}(Z) ,$$

$M^{-s,-t}(Z)$ est anti-dual de $M^{s,t}(Z)$.

Pour tout s , t réels, l'espace $P(Z)$ des fonctions polynômiales

$$f(z' , z) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq M\\ |\beta|\leq N}} a_{\alpha,\beta}\, \overline{z}^\alpha z^\beta$$

est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

DÉFINITION 6. - Soit Z un espace hilbertien complexe séparable, avec conjugaison. Soient s , t des nombres réels. On note par $F^{s,t}(\overline{Z} \times Z)$ l'espace des fonctions entières Φ sur $\overline{Z} \times Z$ qui admettent un développement de Taylor à l'origine

$$\Phi(\overline{z} , z') = \sum_{0\leq \ell,m\leq+\infty} \frac{D^\ell_{\overline{z}} D^m_{z'}\ \Phi(0 ; \overline{z} , z')}{\ell!\ m!}$$

tel que

$$\|\Phi\|^2_{s,t} = \sum_{0\leq \ell,m\leq+\infty} \frac{\|D^\ell_{\overline{z}} D^m_{z'}\ \Phi(0)\|^2 (1 + \ell)^s (1 + m)^t}{\ell!\ m!} < + \infty$$

où $\|.\|$ dans la dernière somme désigne la norme dans $(\hat{\odot}_\ell \overline{Z}) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_m Z)$.

PROPOSITION 7. - Si Z est de dimension finie, Θ réalise une isométrie entre $M^{s,t}(Z)$ et $F^{s,t}(\overline{Z} \times Z)$.

Démonstration. - Il suffit de prendre Φ polynômiale, car $P(Z)$ est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

Soit

$$\Phi(\bar{u}\ ,\ u) = \sum_{\substack{|\alpha|\leq M\\ |\beta|\leq N}} \frac{a_{\alpha,\beta}}{(\alpha!\ \beta!)^{1/2}} H_{\alpha,\beta}(\bar{u}\ ,\ u)$$

$$\Longrightarrow (\Theta\Phi)(z\ ,\ z') = \sum_{\ell\leq M, m\leq N} (\ell!\ m!)^{-1}[\ell!\ m! \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} a_{\alpha,\beta} \frac{\bar{z}^{\alpha}\ z'^{\beta}}{(\alpha!\ \beta!)^{1/2}}] .$$

Considérons le polynôme dans la parenthèse comme un élément de $(\bigodot_{\ell}^{\wedge} \bar{Z}) \hat{\otimes} (\bigodot_{m}^{\wedge} Z)$, et on voit que :

$$(\Theta\Phi)(\bar{z}\ ,\ z') = \sum_{\ell\leq M, m\leq N} \frac{(D_{\bar{z}}^{\ell}\ D_{z'}^{m}\ \Theta\Phi)(0)}{\ell!\ m!}$$

et la norme de $(D_{\bar{z}}^{\ell}\ D_{z'}^{m}\ \Theta\Phi)(0)$ dans cet espace est égale à

$$\|D_{\bar{z}}^{\ell}\ D_{z'}^{m}\ \Theta\Phi(0)\|^2 = \ell!\ m! \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} (\alpha!\ \beta!)^{-1}\ |a_{\alpha,\beta}|^2 \frac{\alpha!\ \beta!}{|\alpha|!\ |\beta|!} = \sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} |a_{\alpha,\beta}|^2 .$$

On obtient alors

$$\|\Theta\Phi\|_{s,t}^2 = \sum_{\ell\leq M, m\leq N} \Big(\sum_{|\alpha|=\ell, |\beta|=m} |a_{\alpha,\beta}|^2\Big) \frac{(1+\ell)^s\ (1+m)^t}{\ell!\ m!}$$

$$= \sum_{\ell\leq M, m\leq N} |a_{\alpha,\beta}|^2 (1 + |\alpha|)^s\ (1 + |\beta|)^t = \|\Phi\|_{s,t}^2 .$$

D'où l'isométrie par prolongement.

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> $a \in Z$. <u>L'application</u>

$$P(Z)\nu_n' \xrightarrow{U_a} {}'\mathrm{Exp}(\bar{Z} \times Z)$$

$$f(\bar{z}\ ,\ z)\nu_n' \longmapsto f(\bar{z} - \bar{a}\ ,\ z - a)\ \exp\{\frac{(z|a)}{2} + \frac{(a|z)}{2} - \|a\|^2\}\nu_n'$$

<u>se prolonge par continuité en un endomorphisme biunivoque et bicontinu de</u> $M^{s,t}(Z)$ <u>pour tout</u> s , t <u>réels.</u>

<u>Remarque</u> 9. - L'application U_a , $a \in Z$, est une isométrie de $L^2(Z\ ,\ \nu_n')\nu_n'$; en effet

$$\|U_a\ f\nu_n'\|^2 = \Pi^{-n} \int_Z |f(\bar{z} - \bar{a}\ ,\ z - a)|^2 \exp\{\frac{(z|a) + (a|z)}{2} - \|a\|^2 - \|z\|^2\}\ d^2 Z$$

$$= \Pi^{-n} \int_Z |f(\bar{z} - \bar{a}\ ,\ z - a)|^2 \exp(-\|z - a\|^2)\ d^2 Z = \|f\nu_n'\|_2^2 .$$

<u>Remarque</u> 10. - Soient $(\omega_1\ ,\ \omega_2) \in \underset{\sim}{C}^2$. On a, pour tout s , t réels, une isométrie :

$$F^{s,t}(\bar{Z} \times Z) \longrightarrow F^{s+\mathrm{Re}\ \omega_1, t+\mathrm{Re}\ \omega_2}(\bar{Z} \times Z)$$

$$f(z\ ,\ z') \longmapsto \sum_{\ell,m} \frac{D_{\bar{z}}^{\ell}\ D_{z'}^{m}\ f(0\ ;\ \bar{z}\ ,\ z')\ (1+\ell)^{-\omega_1/2}\ (1+m)^{-\omega_2/2}}{\ell!\ m!}$$

donc, par Θ , les isométries :

$$\Lambda_{\omega_1,\omega_2}\ :\ M^{s,t}(Z) \longrightarrow M^{s+\mathrm{Re}\ \omega_1, t+\mathrm{Re}\ \omega_2}(Z) .$$

En utilisant les isométries $\Lambda_{\omega_1,\omega_2}$ on prouve une propriété d'interpolation similaire à celle-ci, prouvée dans [1] pour les espaces $K^s(X)$, LEMME 11. - Soient s , t entiers positifs, alors il existe $C(s , t)$ constante positive telle que :

$$\|U_a f\|^2_{s,t} \leqslant C(s , t) \|f\|^2_{s,t}$$

pour tout $f \in M^{s,t}(Z)$.

Preuve. - Comme U_a est une isométrie de $L^2(Z , \nu'_n)\nu'_n$, alors si $f \in M^{s,t}(Z)$, $U_a f \in M^{s,t}(Z)$. On rapporte Z à une base orthonormée $e_1 , e_2 , \dots , e_n$ telle que a soit colinéaire à e_1 . Si λ et μ sont deux multi-indices de longueur n , on note

$$\lambda = (\lambda_1 , \lambda') \quad \text{et} \quad \partial_z^\lambda = \partial_{z_1}^{\lambda_1} \partial_{z'}^{\lambda'} .$$

Calculons alors l'expression

$$\begin{aligned}\partial_z^\lambda \partial_{\bar z}^\mu (U_a f) &\\ = \Big[\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant\lambda_1\\ 0\leqslant j\leqslant\mu_1}} \binom{\lambda_1}{i}\binom{\mu_1}{j} \frac{\bar a^i a^j}{4}\, \partial_{z_1,z'}^{\lambda_1-i,\lambda'} \partial_{\bar z_1,\bar z'}^{\mu_1-j,\mu'} f(z-a , \bar z-\bar a)\Big] \exp\{\frac{a\bar z_1 + \bar a z_1}{2} - \|a\|^2\}.\end{aligned}$$

Alors

$$\|\partial_z^\lambda \partial_{\bar z}^\mu U_a f\|^2 \leqslant 2^{\ell-2}\, 2^m \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant\lambda_1\\ 0\leqslant j\leqslant\mu_1}} \binom{\lambda_1}{i}\binom{\mu_1}{j} a^{2j} \bar a^{2i} \|\partial_{z_1,z'}^{\lambda_1-i,\lambda'} \partial_{\bar z_1,\bar z'}^{\mu_1-j,\mu'} f\|^2$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{|\lambda|=s,|\mu|=t} \|\partial_z^\lambda \partial_{\bar z}^\mu U_a f\|^2 \frac{|\lambda|!\,|\mu|!}{\lambda!\,\mu!} &\leqslant 2^{\ell-2}\, 2^m \sum_{\substack{i,\lambda_1,\lambda'\\ j,\mu_1,\mu'}} \binom{\lambda_1}{i}\binom{\mu_1}{j} \bar a^{2i} a^{2j} \|\partial_{z_1,z'}^{\lambda_1,\lambda'} \partial_{\bar z_1,\bar z'}^{\mu_1,\mu'} f\|^2 \frac{|\lambda|!\,|\mu|!}{\lambda!\,\mu!}\\ &\leqslant 2^{\ell-2}\, 2^m\, m!\, \ell! \sum_{\substack{\lambda_1,i\\ \mu_1,j}} (1+\bar a^2)^{\lambda_1} (1+a^2)^{\mu_1} \|f\|^2_{\ell,m}\\ &\leqslant m!\, \ell!\, 2^{\ell-2}\, 2^m\, \ell m (1+\bar a^2)^\ell (1+a^2)^m \|f\|^2_{\ell,m} .\end{aligned}$$

En sommant les inégalités pour $\ell = 0 , 1 , \dots , s$ et $m = 0 , 1 , \dots , t$, on trouve

$$\|U_a f\|^2_{s,t} \leqslant C(s , t) \|f\|^2_{s,t} ,$$

ce qui prouve le lemme.

Preuve de la proposition 8. - Comme $a \longrightarrow U_a$ est un homomorphisme de groupe, il suffit de montrer que chaque U_a est continue.

Si s , t sont entiers positifs, il suffit d'appliquer le lemme 7.

Si s , t sont réels positifs, il suffit d'interpoler.

Si s , t sont réels négatifs, on utilise le fait que l'adjoint de l'opérateur U_a de $M^{s,t}(Z)$ est l'endomorphisme U_{-a} de $M^{-s,-t}(X)$.

2. Espaces $M^{s,t}(Z)$ si Z est de dimension quelconque.

Soit Z un espace de Hilbert complexe séparable avec conjugaison. Soit $F_u = (Z_i)_{i\in I}$ une bonne famille des s. e. v. de dimension finie de Z, c'est-à-dire une famille filtrante croissante de s. e. v. Z_i de dimension finie dont la réunion Ξ est dense dans Z. Si $i \geqslant j$ (i. e. $Z_j \subset Z_i$), on note s_{ij} la projection orthogonale de Z_i sur Z_j. D'où un système projectif $\Pi_u = (Z_i , s_{ij})$. Pour tout $i \in I$, s_i désigne la projection orthogonale de Z sur Z_i.

Ici on utilisera la bonne famille maximale F_m de tous les s. e. v. de dimension finie.

L'espace vectoriel $\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(Z)$ est défini comme l'espace des fonctions cylindriques f sur Z, s'écrivant $f = s_i \circ f_i$, $i \in I$, avec $f_i \in \mathrm{Exp}(Z_i)$. On le munit de la topologie de limite inductive :

$$\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(Z) = \mathrm{liminf}(\mathrm{Exp}\, Z_i , \theta_i) \quad [4].$$

Son antidual est noté $'\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(Z)$. Si $T \in {}'\mathrm{exp}_{\mathrm{cyl}}(Z)$, alors T est donc définie par une famille cohérente $(T_i)_{i\in I}$ des antifonctionnelles analytiques $T_i \in {}'\mathrm{Exp}(Z_i)$.

Soit $P_{\mathrm{cyl}}(Z)$ l'espace des fonctions polynômiales et cylindriques sur Z. Alors $P_{\mathrm{cyl}}(Z)$ est dense dans $\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(Z)$.

Sur le triplet $\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(\bar{Z} \times Z) \hookrightarrow L^2(Z , \nu') \hookrightarrow {}'\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(\bar{Z} \times Z)$, on définira les espaces $M^{s,t}(Z)$.

DÉFINITION 12. - Pour tout s, t réels fixés, $M^{s,t}(Z)$ désigne l'espace des antifonctionnelles analytiques $T \in {}'\mathrm{Exp}_{\mathrm{cyl}}(Z)$, $T = (T_i)_{i\in I}$ telles que $T_i \in M^{s,t}(Z_i)$ pour tout i et

$$\|T\|_{s,t} = \sup_i \|T_i\|_{s,t} < +\infty .$$

DÉFINITION 13. - Pour tout s, t réels, on définit $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$ comme l'espace des fonctions entières f sur $\bar{Z} \times Z$ à valeurs dans $\underset{\sim}{C}$ telles que

$$\|f(\bar{z} , z)\|^2_{s,t} = \sum_{\ell, m\in \underset{\sim}{N}} \frac{\|D^{\ell}_{\bar{z}}\, D^m_z f(0 ; \bar{z} , z)\|^2 (1+\ell)^s (1+m)^t}{\ell !\, m!} < +\infty ,$$

où $\|D^{\ell}_{\bar{z}}\, D^m_z(0)\|$ désigne la norme de $D^{\ell}_z\, D^m_{\zeta} f(0 ; \bar{z} , z)$ dans $(\hat{\odot}_{\ell}\, \bar{Z}) \hat{\otimes} (\hat{\odot}_m Z)$.

Remarquons que les fonctions polynômiales cylindriques sont denses dans cet espace.

PROPOSITION 14. - Pour tout s, t réels, la transformation Θ réalise une isométrie de $M^{s,t}(Z)$ sur $F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$.

Preuve. - La transformation Θ est définie par la formule

$$(\Theta T)(\bar{z}' , z) = \int_{\bar{Z}\times Z} \exp(-\bar{u}u + \bar{z}\bar{u} + zu)\, dT(\bar{u} , u) .$$

Comme les exponentielles sont cylindriques, la formule a un sens si $\dim Z = +\infty$.

la restriction $(\Theta T)_j$, de ΘT sur $\bar{Z} \times Z$ est donnée par

$$(\Theta T)_j(\bar{z}, z) = \int_{\bar{Z}\times Z} \exp(-\bar{u}u + \bar{z}\bar{u} + zu)\, dT_j(\bar{u}, u) .$$

Vu la proposition 7, on a :

$$\forall\ j\ ,\quad T_j \in M^{s,t}(Z_j) \quad \text{et} \quad \|\Theta_j\, T_j\|_{s,t} = \|T_j\|_{s,t}\ ,$$

donc

$$\|\Theta T\|_{s,t} = \sup_j \|(\Theta T)_j\|_{s,t} = \sup_j \|T_j\|_{s,t} = \|T\|_{s,t} .$$

Réciproquement, pour toute $f \in F^{s,t}(\bar{Z} \times Z)$, les profonctionnelles analytiques $T_j = \Theta_j^{-1} f_j$ (où f_j est la restriction de f à $\bar{Z}_j \times Z_j$) sont cohérentes [7], et vérifient :

$$\|T\|_{s,t} = \sup_j \|T_j\| = \sup_j \|\Theta_j\, f_j\| = \|f\| .$$

COROLLAIRE 15. - Par transport de structure on obtient, pour tout $s\ , t \in \mathbb{R}$,

(a) $M^{s,t}(Z)$ est un espace de Hilbert,

(b) L'espace $P_{cyl}(Z)$ des fonctions polynômiales cylindriques est dense dans $M^{s,t}(Z)$.

Quels que soient ℓ et m entiers, on pose $Z^{\ell} = \widehat{\odot}_{\ell}\, Z$ et $\bar{Z}^m = \widehat{\odot}^m\, \bar{Z}$.

PROPOSITION 16. - L'application $f \longmapsto D_z^{\ell}\, D_{\bar{z}}^{m}$, définie sur $\mathrm{Exp}_{cyl}(Z)$ à valeurs dans $\mathrm{Exp}_{cyl}(Z)\ \hat{\otimes}\ Z^{\ell} \otimes \bar{Z}^m$, se prolonge en un opérateur linéaire continu, qu'on note $D_z^{\ell}\, D_{\bar{z}}^{m}$ de $M^{s,t}(Z)$ dans $M^{s-\ell,t-m}(Z)\ \hat{\otimes}\ Z^{\ell}\ \hat{\otimes}\ \bar{Z}^m$.

Preuve. - On va prouver le résultat pour $f \in \mathrm{Exp}_{cyl}(Z)$, dont le développement en polynômes d'Hermite est fini.

Soit $f = \sum_{\alpha,\beta,|\alpha|\leq A,|\beta|\leq B} a_{\alpha,\beta}\, H_{\alpha,\beta}$ avec $\sum |a_{\alpha,\beta}|^2(1+|\alpha|)^s(1+|\beta|)^t < +\infty$. On a alors :

$$D_z^{\ell}\, D_{\bar{z}}^{m}\, f = \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \frac{|\lambda|!\ |\mu|!}{\lambda!\ \mu!}\Big(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\, H_{\alpha-\lambda,\beta-\mu}\Big(\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha-\lambda)!\ (\beta-\mu)!}\Big)^{1/2}\Big)\, e_{\ell,m}$$

avec

$$e_{\ell,m} = \frac{e_1^{\odot\lambda_1} \odot \ldots \odot e_n^{\odot\lambda_n} \odot \bar{e}_1^{\odot\mu_1} \odot \ldots \odot \bar{e}_n^{\odot\mu_n}}{(\ell!\ m!)^{1/2}} .$$

On déduit alors

$$\|D_z^{\ell}\, D_{\bar{z}}^{m}\, f\|^2_{M^{s-\ell,t-m}\hat{\otimes}(\widehat{\odot}_{\ell+m} Z)}$$

$$= \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \frac{|\lambda|!\ |\mu|!}{\lambda!\ \mu!} \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2\, \frac{\alpha!\ \beta!\ (1+|\alpha|)^{s-\ell}(1+|\beta|)^{t-m}}{(\alpha-\lambda)!\ (\beta-\mu)!}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}|^2\, (1+|\alpha|)^{s-\ell}\, (1+|\beta|)^{t-m}\, m!\ \ell! \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha-\lambda)!\ (\beta-\mu)!\ \lambda!\ \mu!}$$

On remarque que [6]

$$\sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha-\lambda)!\ (\beta-\mu)!\ \lambda!\ \mu!} = \frac{|\alpha|!\ |\beta|!}{(|\alpha|-\ell)!\ (|\beta|-m)!}$$

$$\Longrightarrow m!\ \ell! \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha-\lambda)!\ \lambda!\ (\beta-\mu)!\ \mu!} = O(|\alpha|^{\ell}\ |\beta|^{m}) ,$$

ce qui donne

$$\|D_z^{\ell}\ D_{\bar z}^{m}\ f\|^2_{M^{s-\ell,t-m}(Z)\hat\otimes(\widehat{\odot}_{\ell+m}Z)} \leqslant C\ \|f\|^2_{s,t} .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 17. - <u>L'application</u>

$$\mathrm{Exp}_{cyl}(Z) \otimes (\widehat{\odot}_{m+\ell}\ Z) \longrightarrow \mathrm{Exp}_{cyl}(Z)$$

$$f \longmapsto \mathrm{div}_{m,\ell}\ f$$

<u>se prolonge à un opérateur linéaire continu, défini sur</u> $M^{s,t}(Z)\ \hat\otimes\ (\odot_{\ell+m}\ Z)$ <u>à valeurs dans</u> $M^{s-m,t-\ell}(Z)$.

<u>Preuve</u>. - Si

$$f = \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} f_{\lambda,\mu}(\bar z\ ,\ z)\ e_{\lambda,\mu}\ ,\ \text{où}\ \ f_{\lambda,\mu} \in \mathrm{Exp}_{cyl}(Z)$$

et où un nombre fini de termes sont non nuls, on a :

$$\|f\|^2_{M^{s,t}\hat\otimes(\widehat{\odot}_{\ell+m}Z)} = \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \|f_{\lambda,\mu}\|^2_{s,t}\ \frac{\lambda!\ \mu!}{|\lambda|!\ |\mu|!} .$$

D'autre part, en utilisant le développement en polynômes d'Hermite de

$$f_{\lambda,\mu} = \sum_{\alpha,\beta} a^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}\ H_{\alpha,\beta}(\bar z\ ,\ z)\ ,$$

on trouve

$$\mathrm{div}_{m,\ell}\ f = \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m} \check\partial_z^{\lambda}\ \check\partial_{\bar z}^{\mu}\ f_{\lambda,\mu}$$

$$= \sum_{\substack{|\gamma|\geqslant m\\ |\delta|\geqslant \ell}} H_{\gamma,\delta} \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu,\ |\mu|=m\\ \delta=\beta+\lambda,\ |\lambda|=\ell}} \frac{a^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}}{(-1)^{\lambda+m}}\left(\frac{(\alpha+\mu)!\ (\beta+\lambda)!}{\alpha!\ \beta!}\right)^{1/2}$$

Si on pose $c^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta} = a^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}\left(\frac{\lambda!\ \mu!}{m!\ \ell!}\right)^{1/2}$, on a

$$\|f\|^2_{M^{s,t}\hat\otimes(\odot_{\ell+m}Z)} = \sum_{|\lambda|=\ell,|\mu|=m}\ \sum_{\alpha,\beta} |c^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}|^2\ (1+|\alpha|)^s\ (1+|\beta|)^t .$$

D'autre part,

$$\|\mathrm{div}_{m,\ell}\ f\|^2_{s-m,\ell-t} = \sum_{|\gamma|\geqslant m,\ |\delta|\geqslant \ell} (1+|\gamma|)^{s-m}\ (1+|\delta|)^{t-\ell}\ (\ldots)$$

avec

$$(\ldots) = \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu,\ |\mu|=m\\ \delta=\beta+\lambda,\ |\lambda|=\ell}} |c^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}|^2\ (1+|\alpha|)^s\ (1+|\beta|)^t$$

$$\times \sum_{\substack{\gamma=\alpha+\mu\\ \delta=\beta+\lambda}} \frac{(1+|\gamma|)^{s-m}\ (1+|\delta|)^{t-\ell}}{(1+|\alpha|)^s\ (1+|\beta|)^t} \left[\frac{(\alpha+\mu)!\ (\beta+\lambda)!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!}\right]^{1/2} m!\ \ell! .$$

Majorons l'expression :

$$\sum_{\gamma=\alpha+\mu,\,\delta=\beta+\lambda} \frac{m!\,\ell!\,(\alpha+\mu)!\,(\beta+\lambda)!\,(1+|\gamma|)^{s-m}\,(1+|\delta|)^{t-\ell}}{\alpha!\,\beta!\,\lambda!\,\mu!\,(1+|\alpha|)^{s}\,(1+|\beta|)^{t}}$$

Notons que $\sum_{\gamma=\alpha+\mu,\,|\mu|=m,\,\delta=\beta+\lambda,\,|\lambda|=\ell} \frac{(\alpha+\mu)!\,(\beta+\lambda)!}{\alpha!\,\beta!\,\lambda!\,\mu!}$ représente le coefficient des termes en $x^m\,x^\ell$ dans le produit $(1+x)^{\gamma_1}(1+x)^{\gamma_2}\ldots(1+x)^{\gamma_n}(1+x)^{\delta_1}\ldots(1+x)^{\delta_n}$ quand $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ et $|\gamma|=n_1\geqslant m$, $|\delta|=n_2\geqslant \ell$. Ce coefficient est égal à $n_1!\,n_2!/(n_1-m)!\,m!\,(n_2-\ell)!\,\ell!$ et on est amené à majorer l'expression :

$$\frac{(1+n_1)^{s-m}\,(1+n_2)^{t-\ell}}{(1+n_1-m)^{s}\,(1+n_2-\ell)^{t}}\,\frac{n_1!\,n_2!}{(n_1-m)!\,m!\,(n_2-\ell)!\,\ell!} \leqslant \frac{(1+n_1)^{s}}{(1+n_1-mm)^{s}}\,\frac{(1+n_2)^{t}}{(1+n_2-\ell)^{t}}$$
$$\leqslant \sup(1\,,\,(1+m)^{s})\,\sup(1\,,\,(1+\ell)^{t}) = c_{s,t,\ell,m}\,.$$

Finalement on trouve l'inégalité :

$$\|\operatorname{div}_{\ell,m} f\|^2_{M^{s-m,t-\ell}(Z)} \leqslant C_{s,t,\ell,m}\,\|f\|^2_{M^{s,t}(Z)\hat{\otimes}(\hat{\odot}_{\ell,m}Z)}\,,$$

qui prouve la proposition.

PROPOSITION 18. - <u>Soit</u> $a\in Z$. <u>L'application</u>

$$U_a\ :\ f(\bar z\,,\,z)\nu' \longmapsto f(\bar z-\bar u\,,\,z-u)\exp\{(z|a)/2+(a|z)/2-\|a\|^2\}\nu'\,,$$

<u>définie sur</u> $P_{cyl}(Z)$ <u>à valeurs dans</u> $'\mathrm{Exp}_{cyl}(Z)$, <u>se prolonge par continuité en un endomorphisme biunivoque et bicontinu de</u> $M^{s,t}(Z)$.

<u>Preuve</u>. - Supposons Z muni d'une bonne famille maximale. Soit $\tilde P = P\circ S_i$ un polynôme cylindrique de base Z_i . Quitte à remplacer Z_i par le s. e. v. engendré par Z_i et a , on peut supposer que $a\in Z_i$. On note que

$$\tilde Q(\bar z\,,\,z) = \tilde P(z-u\,,\,z-u)\exp\{(a|z)/2+(z|a)/2-\|a\|^2\}$$

est une fonction cylindrique de base Z_i ; c'est-à-dire $\tilde Q(\bar z\,,\,z) = Q\circ S_i$. D'après la proposition 8, on a, pour tout s , t réels,

$$\|\tilde Q\|^2_{s,t} \leqslant C(s\,,\,t\,,\,a)\,\|P\|^2_{s,t}$$

donc

$$\|U_a\,\tilde P\|^2_{s,t} = \|\tilde Q\|_{s,t} \leqslant C(s\,,\,t\,,\,a)\,\|P\|^2_{s,t}\,,$$

d'où le résultat puisque les polynômes cylindriques sont denses dans $M^{s,t}(Z)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRÉE (M.). - Propriété de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, Bull. Soc. math. France, t. 105, 1977, p. 141-163.

[2] KRÉE (P.). - Méthodes holomorphes et méthodes nucléaires en analyse de dimension infinie et en théorie quantique de champs, "Conférence on measures on vector spaces [1977, Dublin]". - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

[3] KRÉE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

[4] KRÉE (P.). - Holomorphie et théorie des distributions en dimension infinie, "Infinite dimensional holomorphy and applications", p. 277-296. - Amsterdam, North-Holland publishing company, 1977 (North-Holland Mathematics Studies, ; Notas de Matematica,).

[5] LASCAR (B.). - Une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité pour une classe d'opérateurs différentiels en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 2, 1977, p. 31-67.

[6] LASCAR (B.). - Propriétés locales d'espaces de type Sobolev en dimension infinie, Comm. partial diff. Equations, t. 1, 1976, p. 561-584.

[7] Séminaire Paul KRÉE : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75. - Paris, Secrétariat mathématique, 1975.

Michel MARIAS
47-B boulevard Jourdan
75015 PARIS