Paul Krée

Triplets conucléaires en théorie des champs

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. n° 4, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A4_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 4, 11 p.

TRIPLETS CONUCLÉAIRES EN THÉORIE DES CHAMPS

par Paul KRÉE

Un des intérêts de la théorie des distributions pour la physique est le suivant. L'espace de Hilbert $L^2(\underset{\sim}{R}^n, dx)$, très important en physique, est remplacé par un triplet du type

(0.1) $$\mathcal{T} = (\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)dx \subset L^2(\underset{\sim}{R}^n, dx)dx \subset {}'\mathcal{S}(\underset{\sim}{R}^n)) .$$

(a) Les opérateurs linéaires utiles en physique, bien que non continus dans L^2, sont continus dans $\mathcal{S}$ et dans $'\mathcal{S}$.

(b) Le théorème des noyaux de L. Schwartz donne une représentation commode de l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{S}$ dans $'\mathcal{S}$

$$L(\mathcal{S}, {}'\mathcal{S}) \simeq {}'\mathcal{S} \mathbin{\hat{\hat{\otimes}}} \mathcal{S}' .$$

(c) Les opérations dans $'\mathcal{S}$ sont définies très simplement en prenant les adjointes d'opérateurs continus de $\mathcal{S}$.

(d) Les trois espaces $\mathcal{S}$, L^2, $'\mathcal{S}$ se comportent bien par transformation de Fourier.

On cherche un outil analogue en dimension infinie, pour les applications à la TQC. L'analyse mathématique, utilisée pour étudier les champs de bosons correspond à $\sigma = S$ (exposé 3), et c'est une extension de l'analyse usuelle. Mais, comme il n'existe pas de mesure de Lebesgue en dimension infinie, il est commode de remplacer le modèle de dimension finie (0.1) par le suivant.

(0.2) $$\mathcal{T} = ((\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}\ \underset{\sim}{C}^n)\nu_\alpha \subset L^2(\underset{\sim}{R}^n, \nu_\alpha)\nu_\alpha \subset {}'(\mathrm{Exp}\ \underset{\sim}{C}^n)) ,$$

où ν_α est la mesure gaussienne canonique sur $\underset{\sim}{R}^n$, $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}\ \underset{\sim}{C}^n$ désignant l'espace des restrictions, au sous-espace réel $\underset{\sim}{R}^n$ de $\underset{\sim}{C}^n$, des fonctions entières à croissance exponentielle sur $\underset{\sim}{C}^n$. De même, comme la transformation de Fourier usuelle ne donne rien d'intéressant en dimension infinie, on la remplace par la transformation θ

(0.3) $$\varphi \longrightarrow (\theta\varphi)(\bar{z}) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} \exp(-\tfrac{1}{2}\bar{z}^2 + \bar{z}q)\ \varphi(q)\ d\nu_\alpha(q) ,$$

avec $\bar{z}^2 = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j^2$, et $\bar{z}q = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j\ q_j$.

(0.4) DÉFINITION [6]. - <u>Soit</u> Z <u>un espace de Hilbert complexe séparable, et soit</u> $\sigma = S$ <u>ou</u> A. <u>Soit</u> $F_\sigma(\bar{Z})$ <u>l'espace des formes</u> σ-<u>symétriques sur l'anti-espace</u> $\bar{Z}$ <u>de</u> Z, <u>du type</u>

$$f = \sum_{k=0}^\infty f_k ,\quad f_k \in Z_\sigma^k = \hat{\bigcirc}_k Z ,\quad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^\infty k!\ \|f_k\| < \infty ,$$

le tenseur $f_k \in Z_\sigma^k$ étant identifié à la k-forme suivante sur $\bar{Z}$

$$\bar{z}_1 , \dots , \bar{z}_k \xmapsto{f_k} (z_1 \odot \dots \odot z_k , f_k)$$

où les parenthèses symbolisent le produit scalaire dans Z_σ^k. L'espace $F_S(\bar{Z})$ a été défini dans [2] et [3]. Notons $\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}(\underset{\sim}{C}^n)$ l'espace des restrictions à $\underset{\sim}{R}^n$ des $\varphi \in \mathrm{Exp}\, \underset{\sim}{C}^n$. θ est une isométrie de $L^2(\underset{\sim}{R}^n , \nu_\alpha)$ sur $F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}^n)$. Mais, il y a beaucoup mieux [4] : θ réalise un isomorphisme d'e. l. c. s. de $(\underset{\sim}{\mathrm{Exp}}\, \underset{\sim}{C}^n)\nu_\alpha$ sur $\mathrm{Exp}\, \underset{\sim}{\bar{C}}^n$, et, par adjonction, un isomorphisme de $'(\mathrm{Exp}\, \underset{\sim}{C}^n)$ sur $H(\underset{\sim}{\bar{C}}^n)$. Autrement dit, θ réalise un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur

$$\mathrm{Exp}(\underset{\sim}{\bar{C}}_n) \subset F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}^n) \subset H(\underset{\sim}{\bar{C}}^n) .$$

Ces résultats s'étendent en dimension infinie, d'où l'analogue en analyse commutative de dimension infinie de la théorie de Plancherel-Schwartz de la transformation de Fourier sur $\underset{\sim}{R}^n$. Il existe des résultats analogues dans le cas anticommutatif. Dans le cas commutatif, $F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}^n)$ est plongé isométriquement dans l'espace de Hilbert $L^2(\underset{\sim}{\bar{C}}^n , \nu'_\alpha)$, où ν'_α est une mesure gaussienne complexe sur $\underset{\sim}{\bar{C}}^n$

(0.5) $$(f , g) = \int_{\underset{\sim}{C}^n} f(\bar{z})^* g(\bar{z})\, d\nu'_\alpha(\bar{z} , z) ,$$

avec f et $g \in F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}^n)$, $f(\bar{z})^* = \overline{f(\bar{z})}$.

$$\nu'_\alpha(\bar{z} , z) = \pi^{-n}(\exp(-z\bar{z})).dz_1\, \overline{dz_1} \dots dz_n\, \overline{dz_n} .$$

De plus, les opérateurs d'annihilation et de création sont représentés par des opérateurs de dérivation et de produit dans $F_S(\underset{\sim}{\bar{C}}^n)$

$$a_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} , \quad a_j^* = \bar{z}_j .$$

Les propriétés analogues dans le cas anticommutatif ont été notées dans [2] en dimension finie et écrites en dimension quelconque en utilisant une intégrale de Fermi en dimension infinie de fonctions à valeurs anticommutatives. De même, des opérateurs en dualité sont définis $F_A(\bar{Z})$ en utilisant des intégrations par parties par rapport à la mesure de Fermi en dimension infinie. Nous reprenons ces questions dans cet exposé en utilisant les résultats de l'exposé 3. Les résultats obtenus sont utilisés dans l'exposé 5 pour établir le calcul symbolique.

(0.6) Remarque.

Notant J l'isométrie naturelle de $L^2(\underset{\sim}{R}^n , dx)$ sur $L^2(\underset{\sim}{R}^n , \nu)$, la transformation de BARGMANN [1] est, à quelque homothétie près, la composée de J et de θ. Naturellement, J n'existe plus en dimension infinie. En mécanique quantique ordinaire, on utilise parfois dans $L^2(\underset{\sim}{R}^n , dx)$ les combinaisons suivantes des opérateurs Q_j de position et P_j de moment

$$Z_j = P_j + iQ_j \qquad \overline{Z_j} = P_j - iQ_j ,$$

et l'on considère parfois [1] que ceci est un modèle heuristique de dimension finie des opérateurs $a(f)$ et $a^*(f)$ de la théorie des champs. On notera que les formules (3.37) de l'exposé 1 montrent un défaut de ce modèle : il intervient en dimension infinie un multiplicateur non borné $\omega(\vec{p})$.

1. Le foncteur "formes".

On suppose fixé un élément $\sigma \in \{S , A\}$, et une famille P de poids sur $\underset{\sim}{N}$ vérifiant les conditions (C1), (C2), (C3), et

(C4) $$\forall \varpi \in P , \ \forall r > 0 , \ \sum_{j=0}^{\infty} \varpi(j)^2 r^j j!^{-1} < \infty .$$

On suppose aussi que P est filtrante croissante, et que, pour tout entier $j \geqslant 0$, il existe $\varpi \in P$ tel que $\varpi(j) \neq 0$. Un tel couple (σ , P) étant fixé, on va construire un foncteur "formes" dans la catégorie des triplets conucléaires.

(1.1 Définition de $F_\sigma \mathcal{C}$ et proposition.

Soit $\mathcal{C} = (S \subset Z \subset^j {}'S)$ un triplet conucléaire complexe.

(a) On a une injection canonique continue à image dense i de $F_\sigma(\overline{Z})$ dans l'espace nucléaire complet $F_\sigma(\overline{S})$.

(B) Identifiant $F_\sigma(\overline{Z})$ à son antidual, et considérant l'adjointe de i , on obtient le triplet conucléaire complexe

$$F_\sigma \mathcal{C} = (F_\sigma(S') \subset F_\sigma(\overline{Z}) \subset F_\sigma(\overline{S})) .$$

En théorie des champs, $\mathcal{C}$ est un triplet à conjugaison d'espaces de solutions de l'équation de Klein-Gordon si $\sigma = S$, et de l'équation de Dirac si $\sigma = A$. Dans ces conditions, les anti-espaces de S , Z et $'S$ respectivement, sont identifiés comme groupes additifs à ces mêmes espaces, leur structure d'espace vectoriel étant fournie par la multiplication "tordue" λ ; $\overline{z} \longrightarrow \lambda\overline{z} = (\overline{\overline{\lambda} z})$.

Démonstration de (1.1 (a)). - Soit (ϵ_u) une famille filtrante croissante de semi-normes préhilbertiennes définissant la topologie de $'S$, $u \in U$. Comparant j avec la surjection canonique $'S \longrightarrow {}'S_u$, on a, pour tout u , une application linéaire continue à image dense $Z \longrightarrow {}'S_u$, dont la norme est majorée par une constante $C > 0$. D'où, pour tout $j \geqslant 0$, une application $\bigcirc_j Z^j \xrightarrow{\beta_{j,u}} \bigcirc_j {}'S_u$ dont la norme est majorée par C^j . Ceci prouve que l'application $\beta_j : \bigcirc_j Z \hookrightarrow \bigcirc_{j,\epsilon} {}'S$ est continue. Le prolongement continu $\widehat{\beta}_j$ de cette application

$$Z_\sigma^j \longrightarrow {}'S_\sigma^j$$

est injectif. En effet, l'adjointe de $\widehat{\beta}_j$ est l'injection continue à image dense de $S_\sigma^j = \bigcup_u \widehat{\bigcirc}_j S'_u$ dans Z_σ^j . La collection des applications $\widehat{\beta}_j$ définit une application linéaire continue i de $F_\sigma(\overline{Z})$ dans $F_\sigma(\overline{S})$ car, pour $f \in \sum f_j \in F_\sigma(\overline{Z})$, on a

$$p_{\varpi,u}(f) = \sum \varpi(j) |f_j|_u < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varpi(j) C^j}{j!^{\frac{1}{2}}} \cdot \|f_j\| \, j!^{\frac{1}{2}} .$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$p_{\varpi,u}(f) < \|f\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varpi(j)\, c^{2j}}{j!} \Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

et cette dernière série converge, vu l'hypothèse (C4). Finalement, i est injective car les applications $\widehat{\beta}_j$ sont injectives, et l'image de i est dense dans $F_\sigma(\overline{S})$, d'après (3.8 (c)) exposé 2.

(1.2) <u>Definition de U_α pour un morphisme α de (T'NC).</u>

Soit $\mathcal{C}_1 = (S_1 \subset Z_1 \subset {}'S_1)$ un second objet de (T'NC). Soit β un morphisme de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ défini par une application linéaire continue β de $'S$ dans $'S_1$, transformant toute partie équicontinue de S en une partie équicontinue de S_1. Il résulte de (4.1) de l'exposé 3 que $U_\beta = F_\sigma \beta$ est une application linéaire continue de $F_\sigma(\overline{S})$ dans $F_\sigma(\overline{S}_1)$ envoyant toute partie équicontinue de l'anti-dual $F_\sigma(S')$ de $F_\sigma(\overline{S})$ en une partie équicontinue de $F_\sigma(S_1)$. Par conséquent, U_β est un morphisme de $F_\sigma\, \mathcal{C}$ vers $F_\sigma\, \mathcal{C}_1$.

(1.3) <u>Rapport avec le foncteur de Fock.</u>

(a) En théorie constructive, σ étant fixé égal à S ou A, le foncteur $\mathfrak{F}_\sigma$ est ainsi défini dans la catégorie des espaces de Hilbert complexes, les morphismes étant les applications linéaires contractantes. A tout objet Z est associé l'espace de Fock σ-symétrique $\mathfrak{F}_\sigma Z = \bigoplus_{k=0}^{\infty} Z_\sigma^k$. Si β est une application linéaire contractante de Z dans Z_1, $\mathfrak{F}_\sigma \beta$ est définie par la collection des contractions $Z_\sigma^j \longrightarrow (Z_1)_\sigma^j$ induites par les applications $\otimes_j \beta$. Identifions $\mathfrak{F}_\sigma Z$ à $F_\sigma(\overline{Z})$ en associant à tout $t = (t_k) \in \mathfrak{F}_\sigma Z$ la forme $f = (f_k)$, avec $f_k = k!^{-\frac{1}{2}}\, t_k$, pour tout $k \geqslant 0$.

(b) Le rapport entre le foncteur de Fock et le foncteur "formes" est le suivant. Pour tout objet $\mathcal{C}$ de T'NC, $F_\sigma\, \mathcal{C}$ est centré sur un espace isométrique à l'espace de Fock $\mathfrak{F}_\sigma Z$: $F_\sigma\, \mathcal{C}$ est la réalisation holomorphe de l'espace de Fock $\mathfrak{F}_\sigma Z$. Dans le cas particulier d'un morphisme β de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ induisant une contraction de Z dans Z_1, alors $F_\sigma \beta$ induit $\mathfrak{F}_\sigma \beta$.

(c) Un intérêt d'utiliser le foncteur "formes" au lieu du foncteur de Fock est que les opérateurs β, à considérer en théorie des champs, sont rarement des contractions, mais toujours des morphismes de (T'NC). De plus, les espaces constituant $F_\sigma\, \mathcal{C}$ sont en fait des algèbres, d'où une structure extrèmement riche qui permet, par exemple, le calcul symbolique.

Pour bien développer ce calcul, nous introduisons maintenant d'autres foncteurs, ce qui va être fait très simplement, à l'aide du produit tensoriel de triplets conucléaires.

(1.4) Proposition et définition du produit tensoriel dans (T'NC).

Soient deux triplets conucléaires

$$\mathcal{C}_1 = (S_1 \overset{j_1}{\subset} Z_1 \subset {'S_1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2 = (S_2 \overset{j_2}{\subset} Z_2 \subset {'S_2}) \ .$$

Alors, ${'S} = {'S_1} \hat{\hat{\otimes}} {'S_2}$ est nucléaire complet, de dual $S = S_1 \check{\otimes} S_2$. Le produit tensoriel $j = j_1 \otimes j_2$ induit une injection continue à image dense de S dans $Z = Z_1 \hat{\hat{\otimes}} Z_2$. Cet espace est identifié à son antidual. Introduisant l'adjointe de j, on obtient un triplet conucléaire $\mathcal{C}$, noté produit de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$

$$\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2 = (S_1 \check{\otimes} S_2 \subset Z_1 \hat{\hat{\otimes}} Z_2 \subset {'S_1} \hat{\hat{\otimes}} {'S_2}) \ .$$

Preuve. - Les structures de ${'S_1}$ et ${'S_2}$ sont définies respectivement par des familles filtrantes croissantes (ϵ_u) et (ϵ_v) de semi-normes préhilbertiennes sur ${'S_1}$ et ${'S_2}$ respectivement. Les polaires des semi-boules $\{\epsilon_u \leqslant 1\}$ et $\{\epsilon_v \leqslant 1\}$ sont respectivement des disques hilbertiens u et v de S_1 et de S_2 respectivement. Les deux ensembles de disques obtenus sont notés U et V respectivement. On a des injections canoniques $j_u^1 : S_{1,u} \longrightarrow Z_1$ et $j_v^2 : S_{2,v} \longrightarrow Z_2$ continues à image dense. Le produit tensoriel de ces deux applications induit une application linéaire continue $j_{u,v} : S_{1,u} \hat{\otimes} S_{2,u} \longrightarrow Z_1 \hat{\hat{\otimes}} Z_2$. L'image est dense puisqu'elle contient $Z_1 \otimes Z_2$. Il s'agit de montrer que $j_{u,v}$ est une injection. Or, j_u^1 est l'adjointe de l'application k_u^1-canonique $Z_1 \longrightarrow \widehat{{'S_{1,u}}}$ qui est continue à image dense. On définit de même $k_u^2 : Z_2 \longrightarrow \widehat{{'S_{2,v}}}$. Par produit tensoriel de ces deux applications, on obtient une application linéaire continue à image dense $k_{u,v}$ de $Z_1 \hat{\hat{\otimes}} Z_2$ dans $\widehat{{'S_{1,u}}} \otimes_\epsilon \widehat{{'S_{2,v}}}$. Il en résulte que son adjointe $j_{u,v}$ est une injection.

(1.5) Variante σ-symétrique de (1.4) et définition de $\bigcirc_k \mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C} = (S \overset{j}{\subset} Z \subset {'S})$ un triplet conucléaire, et soit k un entier $\geqslant 0$. Alors, ${'S_t^k}$ est nucléaire complet de dual S_t^k. Le produit tensoriel

$$\bigcirc_k j : \bigcirc_k S \longrightarrow \bigcirc_k Z$$

induit une injection continue à image dense j_t^k de S_t^k dans Z_t^k identifié à son antidual. Introduisant l'adjointe de j_t^k, on obtient le triplet conucléaire complexe

$$\mathcal{C}_\sigma^k = (S_\sigma^k \subset Z_\sigma^k \subset {'S_\sigma^k}) \ .$$

De plus, si la structure de ${'S}$ est définie par une famille filtrante croissante de disques hilbertiens u de S, les semi-normes $\epsilon_{t,u}^k \leqslant 1$ étant la boule unité u_t^k de $S_{t,u}^k = \widehat{\bigcirc}_k S_u$.

(1.6) Les morphismes α_t^k.

Soit $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1$ un morphisme de (T'NC) défini par une application linéaire continue ${'S} \longrightarrow {'S_1}$. Soit V une famille de disques hilbertiens de S_1, tel que les rv^0 forment, lorsque (v , r) décrit $V \times \underset{\sim}{R}^+$, un système fondamental de voisinages de l'origine de $'S_1$. Comme α^* est continue de S_1 dans S , $\forall\, v \in V$, $\exists\,(u\,,\,r) \in U \times \underset{\sim}{R}^+$, tel que $\alpha^* v \subset ru$. Donc, l'application canonique

$$'S^k_{t,u} \longrightarrow {}'(S_1)^k_{t,u}$$

est continue et a une norme majorée par r^k . Ceci entraîne que $\otimes_k \alpha$ induit une application continue α^k_t : $'S^k_t \longrightarrow {}'(S_1)^k_t$. D'autre part α induisant une application bornée de S dans S_1 , pour tout $u \in U$, $\exists\,(v\,,\,r') \in V \times \underset{\sim}{R}^+$ tel que $\alpha u \subset r' v$. Donc $\otimes_k \alpha$ induit une application linéaire continue $S^k_u \longrightarrow (S_1)^k_u$ dont la norme est majorée par r^k . Pour terminer ce paragraphe, donnons un argument physique motivant la construction du foncteur forme F_σ . Soit σ fixé $= S$ ou A. Un boson (respectivement un fermion) est appelé une σ-particule. Une σ-particule étant décrite par le triplet $\mathcal{C} = (S \subset Z \subset {}'S)$, un ensemble de k σ-particules identicules est représenté par le triplet $\mathcal{C}^k_\sigma$. Comme un champ libre de σ-particules a un nmobre arbitraire de σ-particules, on le représente par une somme pondérée des triplets $\mathcal{C}^k_\sigma$, k variant de 0 à $+\infty$. Pour définir les espaces extrêmes, on utilise une famille P de poids vérifiant certaines conditions, mais l'espace central $F_\sigma(\overline{Z})$ est défini indépendamment de P .

On notera aussi que, d'après les résultats de l'exposé 3, les opérations naturelles de produit et dérivation sont continues ou équicontinues dans les espaces extrêmes $F_\sigma(S')$ et $F_\sigma(\overline{S})$, bien que ces opérations ne soient pas toujours continues dans l'espace central.

2. Foncteurs formes vectorielles.

En dimension infinie, dans le cas commutatif comme dans le cas anticommutatif, il est indispensable d'introduire des opérateurs linéaires vectoriels, de dérivation par exemple. On note, par exemple, que, pour tout k entier ≥ 0 , et, toute $\Phi \in F_S(S')$, la dérivée d'ordre k $D^k\,\Phi$ appartient à $F_S(S'\,,\,S^k_S)$. De même,

$$\Psi \in F_S(\overline{S}) \Longrightarrow D^k\,\Psi \in F_S(\overline{S}\,,\,'S^k_S) .$$

Ceci motive la définition suivante.

(2.1) DÉFINITION. - <u>Pour tout entier</u> $k \geq 0$, <u>le foncteur "formes vectorielles d'ordre</u> k " <u>associe à</u> $\mathcal{C}$ <u>le triplet</u>

$$F^k_\sigma \mathcal{C} = F\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^k_\sigma .$$

Donc, plus explicitement, vu (1.4)

$$F^k_\sigma \mathcal{C} = (F_\sigma(S') \check{\otimes} S^k_\sigma \subset F_\sigma(\overline{Z}) \,\hat{\hat{\otimes}}\, Z^k_\sigma \subset F_\sigma(\overline{S}) \,\hat{\hat{\otimes}}\, {}'S^k_\sigma) .$$

3. Relation entre $F_\sigma(\overline{Z})$ et la théorie de la mesure.

Pour être bref, on se limite au cas anticommutatif, en se référant à [4] pour le cas commutatif.

(3.1) Cas de l'espace réel sous-jacent à un espace hermitien.

Soit Z un espace hilbertien complexe de dimension n, et soit Z^r l'espace réel sous-jacent. Notons $z^1, \dots, z^n$ les coordonnées de $z \in Z$ par rapport à une base orthonormée de Z. Introduisant les formes linéaires $\bar{z}^i$ sur Z^r, on sait que la forme suivante sur Z est indépendante du choix de la base

$$(3.2) \qquad z^1 \wedge \bar{z}^1 \wedge z^2 \wedge \bar{z}^2 \wedge \dots \wedge z^n \wedge \bar{z}^n = z^n \wedge z^{n-1} \wedge \dots \wedge z^1 \wedge \bar{z}^1 \wedge \bar{z}^2 \wedge \dots \wedge \bar{z}^n .$$

Nous la notons $z^\vee \bar{z}$. Par conséquent, la coforme $d\bar{z}^\vee z$ est canoniquement définie sur Z^r, i. e. indépendamment du choix d'une base orthonormée dans Z. Nous définissons à présent une coforme alternée qui joue en analyse anticommutative un rôle analogue à celui de la promesure normale canonique d'un espace de Hilbert.

(3.3) Définition de la coforme normale canonique.

Soit Z^r l'espace réel sous-jacent à un espace de Hilbert complexe séparable Z. La forme symplectique $u \vee \bar{z} + \bar{u} \vee z$ sur $(Z^r)^* \times Z^r$ est définie en suivant la convention de l'exposé 3. La coforme normale canonique sur $(Z^r)^*$ est la coforme ν sur cet espace ayant pour transformée de Laplace $\exp(u \vee \bar{u})$. Ceci s'écrit

$$(3.4) \qquad \int (\exp(u \vee \bar{z} + \bar{u} \vee z)\, \nu(z, \bar{z}) = \exp(u \vee \bar{u}) .$$

Cherchons la représentation cylindrique de cette coforme. Comme la famille (Z_α) des sous-espaces complexes de dimension finie de Z est cofinale dans la famille ordonnée par inclusion des sous-espaces réels de dimension finie de Z^r, il suffit de calculer les coformes ν_α sur $(Z_\alpha^r)'$, ν_α ayant pour transformée de Laplace la restriction φ_α à Z_α^r de $\varphi = \exp(u \vee \bar{u})$. Or Z_α^r est identifié à son dual car Z_α^r est euclidien. On a donc prouvé (a) de la proposition suivante.

(3.5) PROPOSITION. - Soit (Z_α) la famille des sous-espaces de dimension finie de l'espace hilbertien complexe séparable Z.

(a) Alors les coformes normales canoniques ν_α sur les espaces euclidiens Z_α^r sont cohérentes, i. e. si $Z_\beta \subset Z_\alpha$, ν_β est l'image de ν_α par le projecteur orthogonal de Z_α^r d'image Z_β^r.

(b) La coforme normale canonique ν_α sur Z_α^r est le produit à gauche par $\exp(z \vee \bar{z})$ de la coforme de Fermi canonique $d\bar{z}^\vee z$ sur Z_α^r.

La preuve utilise le lemme suivant.

(3.6) LEMME. - Si Z est la somme hilbertienne de deux sous-espaces Z_1 et Z_2, on a

$$\nu(Z_1 \oplus Z_2) = \nu(Z_1) \otimes \nu(Z_2) .$$

En effet, posant $u = (u^1, u^2)$, les formes $u \vee \bar{u}$ relatives à Z_1, Z_2 et

$Z = Z_1 \oplus Z_2$ sont reliées par

$$u \vee \bar{u} = u_1 \vee \bar{u}_1 + {}_2 \vee \bar{u}_2 \,.$$

Il résulte

$$\exp(u \vee \bar{u}) = (\exp(u_1 \vee \bar{u}_1)) \wedge (\exp(u_2 \vee \bar{u}_2))$$
$$= (\exp(u_2 \vee \underset{\sim}{u}_2)) \wedge (\exp(u_1 \vee \underset{\sim}{u}_1)) \,.$$

Preuve de (b). - Soit un espace hilbertien Z de dimension finie qui est la somme hilbertienne de deux sous-espaces Z' et Z''. On pose $z = z' + z''$, $u = u' + u''$. Le produit tensoriel $m' \otimes m''$ des coformes

$$m' = \exp(z' \vee \bar{z}')\, d(\bar{z}^{\vee})'\, z' \,, \text{ et } m'' = \exp(z'' \vee \bar{z}'')\, d(\bar{z}^{\vee})''\, z''$$

est tel que, quels que soient $f = f(z', \bar{z}') \in F_A(Z'^n)$ et $g = g(z'', \bar{z}'') \in F_A(Z''^n)$ on a

$$\langle m' \otimes m'' , f \wedge g \rangle = m'(f)\, m''(g) \,.$$

Or

$$\int fg \exp(z \vee \bar{z})\, d\bar{z}^{\vee}\, z$$
$$= \int f(z', \bar{z}') \exp(z' \vee \bar{z}') \wedge g(z'', \bar{z}'') \exp(z'' \vee \bar{z}'')\, d(\bar{z}^{\vee})''\, z''\, (\bar{z}^{\vee})'\, z'$$
$$= m'(f)\, m''(g) \,.$$

Donc

$$\exp(\bar{z} \vee z)\, d\bar{z}^{\vee}\, z = m' \otimes m'' \,.$$

Vu le lemme (3.6), ceci nous ramène en dimension un. Il s'agit de voir que

$$\int_{\underset{\sim}{C}} \exp(u \wedge \bar{z} + \bar{u} \wedge z + z \wedge \bar{z})\, d\bar{z}z = \exp(u \wedge \bar{u}) \,.$$

Or le premier membre est égal à

$$\int [1 + u\wedge\bar{z} + \bar{u}\wedge z + z\wedge\bar{z} + \tfrac{1}{2}(u\wedge\bar{z}+\bar{u}\wedge z+z\wedge\bar{z}) \wedge (u\wedge\bar{z}+\bar{u}\wedge z+z\wedge\bar{z})]\, d(\bar{z} \wedge z)$$
$$= \int [1 + u\wedge\bar{z} + \bar{u}\wedge z + z\wedge\bar{z} + u\wedge\bar{u}\wedge z\wedge\bar{z}]\, d(\bar{z} \wedge z) \,,$$

le terme en $z \wedge \bar{z}$ dans la forme entre crochets étant égal à $1 + u \wedge \bar{u} = \exp(u\wedge\bar{u})$. Appliquons ce résultat à la réalisation holomorphe du Fock antisymétrique pour retrouver dans ce cas l'analogue anticommutatif de résultats établis dans [4] pour le Fock symétrique.

(3.7) THÉORÈME. - Soit (Z_α) une famille filtrante de sous-espaces complexes de dimension finie de Z, dont la réunion R contient une base orthonormée de Z. Soit Φ une forme alternée quelconque sur R, et soit Φ_α la restriction de Φ à Z_α. Alors, pour que Φ soit la restriction à R d'une forme $\tilde{\Phi} \in F_A(\bar{Z})$, il faut et il suffit que

$$\sup_\alpha \int_{Z_\alpha} \Phi_\alpha^*(z) \wedge \Phi_\alpha(\bar{z}) \exp(z \vee \bar{z})\, d\bar{z}^{\vee}\, z < \infty \,.$$

De plus, ce sup est égal à $\|\tilde{\Phi}\|^2$.

Démonstration.

(a) Montrons d'abord la propriété en dimension finie, soit

$$\|\Phi_\alpha\|^2 = \int \Phi_\alpha^*(z) \wedge \Phi_\alpha(\bar z) \exp(z \vee \bar z)\, d\bar z^\vee z < \infty .$$

Soit n la dimension de Z_α. Rapportons Z_α à une base orthonormée. Lorsque i **décrit** $I_A(n)$, les formes $\bar z^i$ forment une base orthonormée de $F_A(Z_\alpha)$. Il suffit donc de montrer que

$$\delta_{i,j} = \int z^{\vee i} \wedge \bar z^j \wedge \sum_{\gamma \in I_A(n)} z^{\vee\gamma} \wedge \bar z^\gamma\, d\bar z^\vee z .$$

Cette intégrale est nulle pour $i \neq j$. Et pour $i = j$, elle est égale à

$$\int z^{\vee i} \wedge \bar z^i \wedge z^{\vee i'} \wedge \bar z^{i'}\, d(\bar z^\vee z) .$$

Posant $|i| = k$, $|i'| = \ell$, l'intégrande vaut

$$(-1)^{k\ell} z^{\vee i} \wedge z^{\vee i'} \wedge \bar z^i \wedge \bar z^{i'} = (z^i \wedge z^{i'})^\vee \wedge \bar z^i \wedge \bar z^{i'} = z^\vee \bar z .$$

Donc, l'intégrale est égale à un et le théorème est montré en dimension finie.

(b) Posons $n_\alpha = \dim Z_\alpha$. Il existe une suite croissante $(Z_\alpha)'$ et une base orthonormée $(b_1, b_2, \dots)$ de Z telles que, pour tout α', $(b_1, b_2, \dots, b_{n_{\alpha'}})$ soit une base orthonormée de $Z_{\alpha'}$. Soit I_A l'ensemble des suites infinies $i = (i_1, i_2, \dots)$ de nombres égaux à 0 où 1, avec seulement un nombre fini de termes non nuls. On note $z^1, z^2, \dots$ les coordonnées d'un point quelconque de Z par rapport à la base considérée. On sait que les monômes $\bar z^i$ forment, lorsque i décrit I_A, une base orthonormée de $F_A(\bar Z)$. Pour tout $i \in I_A$, il existe α' tel que $i_k = 0$, pour tout $k > n_{\alpha'}$. On pose

$$i(\alpha') = (i_1, i_2, \dots, i_{n_{\alpha'}}) .$$

Alors, pour tout i fixé, lorsque α' varie en vérifiant la condition "$i_k = 0$, pour tout $k > n_{\alpha'}$", le nombre $c_i = (\bar z^{i(\alpha')}, \Phi_{\alpha'})$ reste fixe. Notons que la famille des nombres c_i, $i \in I_A$, détermine Φ. Par ailleurs, on sait qu'il existe $\tilde\Phi \in F_A(\bar Z)$ telle que $c_i = (\bar z^i, \tilde\Phi)$ pour tout i, si et seulement si $\sum |c_i|^2 < \infty$. Or, on a

$$\sum |c_i|^2 = \sup_{\alpha'} \sum_{i_1,\dots,i_{n_{\alpha'}}} |c_{i_1,i_2,\dots,i_{n_{\alpha'}},0,0,\dots}|^2$$
$$= \sup_{\alpha'} \int \Phi_{\alpha'}^*(z)\, \Phi_{\alpha'}(\bar z)\, \nu_{\alpha'}(\bar z, z) .$$

Ainsi le théorème est démontré. Nous avions montré dans [4] l'analogue commutatif de ce théorème, et nous avions aussi montré, alors, que ceci provenait aussi du fait suivant. Si la fonction $\Phi(\bar z)$ sur $\bar R$ est finiment harmonique, et si Φ_α désigne sa restriction à Z_α, alors la famille des $\Phi_\alpha \nu'_\alpha$ est cohérente, $\nu' = (\nu'_\alpha)$ désignant la promesure normale canonique sur Z^r. On a un résultat analogue ici.

(3.8) PROPOSITION. - <u>Avec les notations du théorème précédent, la famille des coformes</u> $\Phi_\alpha\, \delta\varphi_\alpha$ <u>sur les espaces</u> Z_α^r <u>est cohérente.</u>

Démonstration. – Soit $Z_\beta \subset Z_\alpha$, et soit Z'' le supplémentaire de Z_β dans Z_α : $Z_\alpha = Z_\beta \oplus Z''$. Tout $z \in Z_\alpha$ s'écrit $z = z' + z''$, avec $z' \in Z_\beta$ et $z'' \in Z''$. Soit π la projection orthogonalede Z_α sur Z_β . Soit $\Phi = \Phi_\alpha$ une forme alternée sur l'espace complexe Z_α , et soit $r\Phi = \Phi\beta$, sa restriction à Z_β . Il s'agit de montrer que $\pi(\Phi\delta\varphi_\alpha) = (r\Phi)\delta\varphi_\beta$. C'est-à-dire que l'on a, pour toute forme alternée sur l'espace réel Z^r_β ,

$$\langle (r\Phi)\delta\varphi_\beta , \psi\rangle = \langle \Phi\delta\varphi_\alpha , \psi \circ \pi\rangle .$$

Soient $n' = \dim Z_\beta$, $n'' = \dim Z''$, $n = n' + n'' = \dim Z_\alpha$. Rapportant Z_β et Z'' à des bases orthonormées, par bilinéarité, on se ramène à démontrer

(*) $\forall$ i et $j \in I_A(n')$, $\forall\, k \in I_A(n)$

$$\int z'^i \wedge \bar z'^j \wedge \bar z^k \,\delta\varphi_\alpha(z , \bar z) = \int z'^i \wedge \bar z'^j \, r(\bar z^k)\,\delta\varphi_\beta(z' , \bar z') .$$

Ecrivons $\bar z^k = \bar z'^{k'} \wedge \bar z''^{k''}$, avec $k' \in I_A(n')$, $k'' \in I_A(n'')$. Introduisant la coforme normale canonique $\delta\varphi''$ de Z'' , on a $\delta\varphi_\alpha = \delta\varphi_\beta \otimes \delta\varphi''$. Par conséquent, le premier membre de l'égalité (*) s'écrit

$$\int z'^i \wedge \bar z'^j \wedge \bar z'^{k'} \,\delta\varphi_\beta(z' , \bar z') \int \bar z''^{k''} \,\delta\varphi''(z'' , \bar z'') .$$

De deux choses l'une, ou bien $k'' = \Phi$ alors

$$\int \bar z''^{k''} \,\delta\varphi'' = \int \delta\varphi'' = 1 , \quad r(\bar z^k) = z'^{k'}$$

et (*) est vérifiée, ou bien $k'' \neq \Phi$. Mais alors

$$\int \bar z''^{k''} \,\delta\varphi'' = 0 \quad \text{et} \quad r(\bar z^k) = 0$$

et l'on a encore (*).

(3.9) PROPOSITION. – Soit $\Phi \in F_A(\bar Z)$. Alors, la restriction Φ_α de Φ à tout sous-espace Z_α de dimension finie de Z vérifie la relation

$$\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\bar z') = \int_{Z^r_\alpha} \exp(\bar z' \vee z) \wedge \Phi_\alpha(\bar z)\,\delta\varphi_\alpha(z , \bar z) .$$

Rapportons Z_α à une base orthonormée, et soit n la dimension de Z_α . Notant $I(\Phi_\alpha)$ le deuxième membre de (*), prenons $\alpha \in IA(n)$ et calculons

$$I(\bar z'^\alpha) = \sum_{i,\beta\in IA(n)} \int (\bar z'^i)^\vee z^i \bar z^\alpha (z^\beta)^\vee \bar z^\beta \, d(\bar z^\vee z) .$$

Nous avons omis d'écrire les signes $\wedge$. D'ailleurs, en analyse ordinaire, on n'écrit pas les signes de multiplication. Le seul terme non nul dans la somme correspond à $i = \alpha$, $\beta = i'$. Posant comme d'habitude $|\alpha| = k$, $|\alpha'| = \ell$, il vient

$$\begin{aligned} I(\bar z'^\alpha) &= \int (\bar z'^\alpha)^\vee z^\alpha \bar z^\alpha (z^{\alpha'})^\vee d\bar z^\vee z \\ &= \int (\bar z'^\alpha)^\vee (-1)^{k\ell} z^\alpha (z^{\alpha'})^\vee \bar z^\alpha \bar z^{\alpha'} d\bar z^\vee z \\ &= (-1)^{k\ell} \int \bar z'^\alpha (z^\alpha)^\vee (z^{\alpha'})^\vee \bar z^\alpha \bar z^{\alpha'} d\bar z^\vee z \\ &= \int \bar z'^\alpha (z^\alpha z^{\alpha'})^\vee \bar z^\alpha \bar z^{\alpha'} d\bar z^\vee z = \bar z'^\alpha \int z^\vee \bar z \, d\bar z^\vee z = \bar z'^\alpha . \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARGMANN (V.). - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 187-214.

[2] BEREZIN (F. A.). - The method of secund quantization [Translated from Russian by N. Mugibayashi and A. Jeffrey]. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Physics, 24).

[3] DWYER (T. A. W.). - Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy type, Bull. Amer. math. Soc., t. 77, 1971, p. 725-730.

[4] KRÉE (P.). - Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, II, Séminaire P. Lelong : Analyse, 14e année, 1973/74, n° 2, p. 16-47. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 474).

[5] KRÉE (P.). - Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infinie, Séminaire P. Lelong : Analyse, 16e année, 1975/76, n° 5, p. 44-70. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 578).

[6] KRÉE (P.). - Méthodes fonctionnelles en analyse de dimension infinie et en holomorphie anticommutative, Séminaire P. Lelong : Analyse, 17e année, 1976/77. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraître).

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS