Paul Krée

Espaces collectivement localement convexes

Séminaire Paul Krée, tome 3 (1976-1977), exp. nº 2, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1976-1977__3__A2_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
3e année, 1976/77, n° 2, 19 p.

ESPACES COLLECTIVEMENT LOCALEMENT CONVEXES

par Paul KRÉE

Du point de vue de la physique, cet exposé peut être considéré comme un outil d'analyse fonctionnelle, pour étudier l'analyse en dimension infinie et la théorie des champs. On rappelle d'abord les résultats sur les produits tensoriels topoliques (p. t. t.) multiples (pour les détails, voir [4]). On complète d'ailleurs ces résultats en étudiant la dualité entre $E \hat{\hat{\otimes}} G$ et son dual, E et G étant nucléaires complets. Puis on introduit des notions mathématiques nouvelles à savoir les espaces collectivement localement convexes, et les espaces de suites de vecteurs d'espaces variables, ces espaces de suites généralisant les espaces de suites de nombres. L'idée est la suivante. Si E est nucléaire complet, il est naturel d'introduire des espaces de séries formelles $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k$ sur E', où φ_0 appartient au corps de base $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, et où, pour tout $k \geqslant 1$, φ_k est le polynôme homogène de degré k sur E' défini canoniquement par un élément (noté φ_k) de $E_S^k = \hat{\hat{\odot}}_k E$. Pour imposer des conditions de croissance à la suite (φ_k), il faut contrôler simultanément les semi-normes sur tous les E_S^k. Or, si $(\varepsilon_u)_{u \in U}$ est une famille filtrante croissante de semi-normes définissant la topologie de E, pour tout $k \geqslant 1$, les restrictions $\varepsilon\sigma_u^k$ à E_S^k des semi-normes $\varepsilon(\varepsilon_u, \ldots, \varepsilon_n)$ sur $E_x^k = \hat{\hat{\otimes}} E$ forment, lorsque $u \in U$, une famille filtrante croissante de semi-normes définissant la topologie de E_S^k. Autrement dit, chacun des espaces E_S^k admet une famille filtrante croissante $(\varepsilon\sigma_u^k)_{u \in U}$ de semi-normes indexées dans le même ensemble U. Nous dirons que les E_S^k sont collectivement localement convexes et c'est ce fait qui permet de définir des e. l. c. s. de suites (φ_k), $\varphi_k \in E_S^k$ du type suivant, par exemple.

$$P_H(\underset{\sim}{N}, E_S^{!}) = \{(\varphi_k) , \ \forall\ (n , \varpi) \in \underset{\sim}{N} \times U ; \ \sum_{j=0}^{\infty} n^j \ \varepsilon\sigma_u^j(\varphi_j) < \infty\} ,$$

où l'on a posé $\varepsilon\sigma_u^0(\varphi_0) = |\varphi_0|$ pour tout u. D'ailleurs si $K = \underset{\sim}{C}$, $P_H(\underset{\sim}{N}, E_S^{!})$ est isomorphe à un espace de fonctions entières φ sur E', l'isomorphisme associant à (φ_k) la fonction entière $\xi \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi_k , \otimes_k \xi \rangle$. On étudie, dans cet exposé, des propriétés topologiques des espaces de suites vectorielles de ce type, la famille P_H des poids $\varpi_n(j) = n^j$ étant d'ailleurs remplacée par une famille plus générale. Donc, du point de vue de la physique, cet exposé technique peut être passé en première lecture, et on y reviendra à l'occasion des applications (voir les exposés 3, 4 et 5).

Du point de vue mathématique, il s'agit d'une structure nouvelle très motivée, et qui pose encore des problèmes (voir, par exemple, le paragraphe 5 du présent exposé).

1. Compléments sur la dualité pour les e. l. c. s.

(1.1) Généralités.

Soit E un e. l. c. s. dont la topologie est définie par une famille filtrante croissante $(\varepsilon_u)_{u\in U}$ de semi-normes. La semi-boule $V_u = \{\varepsilon_u \leq 1\}$ est un disque fermé, et son polaire (absolu) est

(1.2) $$V_u^0 = \{\xi \in E' \ ; \ |\langle x , \xi\rangle| \leq 1\} .$$

On ne considère ci-après que des polaires absolus. L'espace $E_u = E/\varepsilon_u^{-1}(0)$ est muni de la norme déduite de ε_u par passage au quotient. Par le théorème du bipolaire, V_u est le polaire absolu de V_u^0 pour la dualité $E - E'$. Comme ε_u est ainsi caractérisée par V_u^0, on peut simplifier les notations en écrivant u au lieu de V_u^0. Le dual de l'e. v. E muni de la semi-norme ε_u coincide avec le dual de E_u.

(1.3) $$(E , \varepsilon_u)' = E'_u = \{\xi \in E' \ ; \ \sup\{|\langle \xi , x\rangle| \ ; \ \varepsilon_u(x) \leq 1\} < \infty\}$$

Ce dual s'identifie ainsi au sous-espace de E' engendré par u, muni de la jauge de u. Cet e. v. n. est complet. D'une manière générale, on associe à l'e. l. c. s. E le système projectif des e. v. n. E_u, avec, pour tout couple (u , u') d'éléments de U tels que $u \subset u'$, des surjections canoniques :

(1.4) $$E \longrightarrow E_{u'} \xrightarrow{\alpha(u',u)} E_u ,$$

la topologie de E étant la topologie initiale associée aux surjections $E \longrightarrow E_u$. En considérant les duals, on a un système inductif d'e. v. n. E'_u, les applications de transition étant injectives :

(1.5) $$E' \longleftarrow E'_u \xleftarrow{\alpha'(u',u)} E'_u ,$$

et l'e. v. E' est la limite inductive des sous-espaces E'_u. Mais le dual fort E' de E est-il la limite inductive localement convexe des E'_u ?

(1.6) THÉORÈME [8]. - Si E est un espace de Schwartz complet, alors son dual fort E' est limite inductive des espaces de Banach E'_u, pour toute famille filtrante croissante de s. n. ε_u définissant la topologie de E.

(1.7) Conséquence pratique.

Il est inutile de connaître les ouverts ou les bornés pour cette topologie forte. Il suffit de connaître la structure d'e. v. à bornés de E' définie par les disques u, un "borné" étant par définition un ensemble équicontinu i. e. une partie de E' contenue dans un λu. En effet, pour voir si une application linéaire ℓ de E' dans un e. l. c. s. F est continue, il suffit de voir si les restrictions de ℓ aux espaces normés E'_u sont continues. Prenant, en particulier, $F = \underset{\sim}{K}$ = le corps de base $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, le bidual de E est l'espace des formes linéaires sur E' dont les restrictions aux E'_u sont continues. On sait que ce bidual est E, car E est semi-réflexif.

(1.8) Cas où E est nucléaire complet.

D'après [2] ou [4], on peut choisir ε_u pour que les E'_u soient des espaces de Hilbert séparables. Les semi-normes (ε_u) sont, alors, dites préhilbertiennes car E_u est préhilbertien.

2. Produits tensoriels topologiques multiples.

(2.1) Une semi-norme ℓ-tensorielle est la donnée, pour toute suite $(E_1, p_1), \dots, (E_\ell, p_\ell)$ de ℓ espaces semi-normés, d'une semi-norme $\alpha(p) = \alpha(p_1, \dots, p_\ell)$ sur $\bigotimes_i E_i$ de façon que :

(a) Si l'on a une autre suite $(F_1, p_1), \dots, (F_\ell, p_\ell)$ d'espaces semi-normés, et si l'on a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une application linéaire continue $u_i : E_i \longrightarrow F_i$, alors $u = \bigotimes u_i$ est continue, $\bigotimes E_i \longrightarrow \bigotimes F_i$, et $\|u\| \leqslant \|u_1\| \dots \|u_\ell\|$.

(b) Notant u la norme usuelle $\lambda \longrightarrow |\lambda|$ sur le corps de base, on a $\alpha(u, \dots, u) = u$.

(2.2) On montre que (voir [4]) :

(a) pour tout tenseur décomposable $e = \bigotimes e_i \in \bigotimes_i E_i$, on a

$$|e|_\alpha = |e_1| \times \dots \times |e_\ell|$$

(b) pour tout tenseur $t \in \bigotimes_j E_j$, $|t|_\alpha$ est compris entre

$$|t|_\varepsilon = \sup\{|\langle t, x'_1 \otimes \dots \otimes x'_\ell \rangle| \; ; \; |x'_1| \leqslant 1, \dots, |x'_\ell| \leqslant 1\},$$

$$|t|_\pi = \inf\{\textstyle\sum_{k=1}^N |e_1^k| \dots |e_\ell^k|, \text{ avec } t = \sum_{k=1}^N e_1^k \otimes \dots \otimes e_\ell^k\},$$

et l'on définit ainsi deux semi-normes tensorielles.

(2.3) Topologies π et ε.

Soient ℓ e. l. c. s. $E_1, \dots, E_\ell$, et, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, soit (ε_{u_i}) une famille fondamentale filtrante croissante de semi-normes de E_i, u_i décrivant U_i. La topologie π (resp. ε) sur $\bigotimes E_i$ est définie par la famille filtrante croissante des semi-normes $\pi(\varepsilon_{u_1}, \dots, \varepsilon_{u_\ell})$ (resp. $\varepsilon(\varepsilon_{u_1}, \dots, \varepsilon_{u_\ell})$) lorsque, pour tout i, u_i décrit U_i.

On vérifie facilement que ces définitions des e. v. t. $\bigotimes_\pi E_i$ et $\bigotimes_\varepsilon E_i$ ne dépendent pas du choix des familles fondamentales (ε_{u_i}) choisie sur chaque E_i.

(2.4) Propriété universelle de π.

C'est la topologie localement convexe la plus fine sur $\bigotimes E_i$ rendant continue l'application canonique $\sigma : \pi E_i \longrightarrow \bigotimes E_i$. De plus, pour tout e. l. c. s. G, si $\tilde{\beta}$ désigne l'application linéaire $\bigotimes E_i \longrightarrow G$ associée à une application ℓ-linéaire $\beta : \pi E_i \longrightarrow G$, alors $\beta \longrightarrow \tilde{\beta}$ est une bijection entre l'espace

$L(E_1, \dots, E_\ell ; G)$ des applications β qui sont ℓ-linéaires continues et l'espace $L(\otimes_{n,\ell} E_i , G)$ des applications $\tilde{\beta}$ qui sont linéaires continues. Cette bijection met en correspondance les ensembles équicontinus (proposition (5.1) de [3]).

(2.5) Interprétation de la topologie ε.

Soient ℓ e. l. c. s. $E_1 , \dots , E_\ell$. On a une dualité naturelle entre $\otimes E_i$ et $\otimes E'_i$. Ainsi $\otimes E_i$ se plonge dans l'espace M des formes multilinéaires m sur $E'_1 \times \dots \times E'_\ell$ dont les restrictions aux produits d'espaces normés $E'_{u_1} \times \dots \times E'_{u_\ell}$ sont continues. De plus, la topologie ε est induite par la topologie naturelle sur M, à savoir celle définie par les semi-normes

$$m \longrightarrow \sup\{|m(\xi_1 , \dots , \xi_\ell)| ; \quad \xi_j \in u_j\} .$$

(2.6) Produit tensoriel σ-symétrique.

Par la suite, l'élément σ de l'ensemble $\{X , S , A\}$ est supposé fixé. σ caractérise la symétrie des tenseurs. Plus précisément, pour tout e. v. E sur $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, pour $\sigma = S$ ou A, Sym_σ est l'opérateur de σ-symétrisation des tenseurs appartenant à $\otimes_k E$.

$$\mathrm{Sym}_\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = (k!)^{-1} \sum_{\alpha\in\mathfrak{S}_k} sg_\sigma(\alpha)\, x_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes x_{\alpha_k} ,$$

avec $sg_S(\alpha) \equiv 1$, $sg_A(\alpha)$ étant la signature de la permutation

$$\alpha = (\alpha_1 , \dots , \alpha_n) \in \mathfrak{S}_n .$$

On pourra noter Sym_X l'opérateur identique de $\otimes_k E$. Un tenseur $t \in \otimes_k E$ est dit σ-symétrique s'il est quelconque pour $\sigma = X$, symétrique ($\mathrm{Sym}_S\, t = t$) pour $\sigma = S$, antisymétrique ($\mathrm{Sym}_A\, t = t$) pour $\sigma = A$. Le sous-espace de $\otimes_k E$ formé par les tenseurs σ-symétriques est noté $\bigcirc_k E$ en général, et plus précisément $\odot_k E$ si $\sigma = S$, et $\wedge_k E$ si $\sigma = A$. Dans l'espace vectoriel $\mathfrak{A}_\sigma(E) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\bigcirc_k E)$, le produit tensoriel σ-symétrisé est noté $f \bigcirc g$, pour f et $g \in \mathfrak{A}_\sigma(E)$. On obtient ainsi une algèbre $\mathfrak{A}_\sigma(E)$. Lorsque E est un e.l.c.s. dont la topologie est définie par (ε_u), la topologie ε sur $\otimes_k E$ est définie par les semi-normes $\varepsilon_u^k = \varepsilon(\varepsilon_u , \dots , \varepsilon_u)$. On peut munir $\bigcirc_k E$ de la topologie induite par ε. Si $\varepsilon\sigma_u^k$ désigne la restriction à $\bigcirc_k E$ de la semi-norme ε_u^k, on notera que pour $t \in \bigcirc_k E$,

$$
\begin{aligned}
(2.7) \qquad \varepsilon\sigma_u^k(t) &= \sup\{|\langle t , \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k\rangle| ; \quad \xi_j \in u\} \\
&= \sup\{|\langle \mathrm{Sym}_\sigma\, t , \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k\rangle| ; \quad \xi_j \in u\} \\
&= \sup\{|\langle t , \mathrm{Sym}_\sigma(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_k)\rangle| ; \quad \xi_j \in u\} \\
&= \sup\{|\langle t , \xi_1 \bigcirc \dots \bigcirc \xi_k\rangle ; \quad \xi_j \in u\} .
\end{aligned}
$$

De la même manière, la topologie π sur $\otimes_k E$ est définie par les semi-normes $\pi_u^k = \pi(\varepsilon_u , \dots , \varepsilon_u)$, et $\bigcirc_k E$ peut être muni de la topologie induite. La restriction $\pi\sigma_u^k$ de π_u^k à $\bigcirc_k E$ est telle que

(2.8) $\pi\sigma_u^k(t) = \inf\{\sum_{j=1}^N \varepsilon_u(x_1^j) \times \dots \times \varepsilon_u(x_k^j)\ ;\ t = \sum_{j=1}^N x_1^j \otimes \dots \otimes x_k^j\}$
$$= \inf\{\sum_{j=1}^N \varepsilon_u(x_1^j) \times \dots \times \varepsilon_u(x_k^j)\ ;\ t = \sum_{j=1}^N x_1^j \bigcirc \dots \bigcirc x_k^j\} .$$

(2.9) LEMME. - Les topologies des e. l. c. s. E et F sont respectivement définies par les familles filtrante croissantes $(\varepsilon_u)_{u\in U}$ et $(\varepsilon_v)_{v\in V}$. Posant $T = E \otimes F$. Alors l'e. v. n. $T_{u,v} = T/\varepsilon_{uv}^{-1}(0)$ s'identifie à l'e. v. n. $E_u \otimes_\varepsilon F_v$.

En effet, les deux applications canoniques

$$T \xrightarrow{L} E_u \otimes F_v \quad \text{et} \quad E'_u \otimes F'_v \xhookrightarrow{L'} E' \otimes F'$$

sont transposées l'une de l'autre, donc faiblement continues. Or $\varepsilon_{uv}^{-1}(0)$ est l'espace des $t \in E \otimes F$, définissant des formes bilinéaires nulles sur $E'_u \times E'_v$, donc des formes linéaires nulles sur $\operatorname{Im} L'$. On a donc un isomorphisme ensembliste

$$T/\varepsilon_{uv}^{-1}(0) \simeq T/(\operatorname{Im} L')^\perp = T/\ker L \simeq E_u \otimes F_v .$$

On vérifie alors que la norme ε sur cet espace coincide avec la norme déduite par passage au quotient de ε_{uv}.

(2.10) THÉORÈME. - Soient $H_1, \dots, H_k$ des espaces de Hilbert.

(a) Le dual de $(\bigotimes_{i=1}^k H_i, \varepsilon)$ s'identifie isométriquement au complété de $(\bigotimes_{i=1}^k H_i, \pi)$;

(b) Si tous les H_i sont égaux, le dual de $\bigcirc_{k,\varepsilon} H = (\bigcirc_k H, \varepsilon)$ s'identifie isométriquement au complété $\widehat{\bigcirc}_k H$ de $(\bigcirc_k H, \pi)$.

Démonstration.

(a) A. GROTHENDIECK [2] a montré que si E et F sont des espaces de Banach, tels que E' ait la propriété d'approximation métrique, et tels que E' ou F' ait la propriété de Radon-Nikodym, alors $(E \otimes_\varepsilon F)' = E' \otimes F'$. Ceci permet de démontrer (a) par récurrence sur k.

(b) Posons $T = \bigotimes_{k,\varepsilon} H$. Alors $P = \mathrm{Sym}_\sigma$ est un projecteur continu de T d'image $\bigcirc_{k,\varepsilon} H$. Donc les sous-espaces $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Im}(I - P) = \ker P$ de T sont supplémentaires topologiques. Donc $(\operatorname{Im} P)'$ est isométrique au sous-espace de T' formé par les ℓ nulles sur $\ker P$

$$(\operatorname{Im} P)' \simeq (\ker P)^\perp = \overline{\operatorname{Im} P'} .$$

Comme P' est l'opérateur de symétrisation dans T', cette image est fermée, et $(\operatorname{Im} P)'$ s'identifie isométriquement au sous-espace de $\widehat{\bigcirc}_k H$ formé par les tenseurs σ-symétriques.

(2.11) THÉORÈME ([2], ou [3] exposé 1).

(a) Soient E et G deux e. l. c. s., l'un d'eux étant nucléaire. Alors les topologies π et ε coincident sur $E \otimes G$.

(b) De même, si E est nucléaire, pour tout $k > 1$, les topologies π et ε coincident sur $\bigcirc_k E$.

(2.12) THÉORÈME.

(a) Soient E et G deux espaces nucléaires complets dont les topologies sont définies par des familles filtrantes croissantes de semi-normes préhilbertiennes (ε_u) et (ε_v). Alors le dual de $E \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, G$ est la réunion $E' \check{\otimes} G'$ des espaces de Banach $E'_u \,\widehat{\otimes}\, G'_v$, lorsque $(u, v) \in U \times V$. De plus, la topologie de dual fort sur $E' \check{\otimes} G'$ coincide avec la topologie limite inductive des espaces normés $E'_u \,\widehat{\otimes}\, F'_v$.

(b) De même, pour tout $k \geqslant 1$, le dual de $E^k_\sigma = \widehat{\widehat{\bigcirc}} E$ est la réunion E'^k_σ des espaces de Banach $E'^k_{\sigma,u} = \widehat{\bigcirc} E'_u$. Et, la topologie de dual fort coincide avec la topologie limite inductive des e. v. n. $E'^k_{\sigma,u}$.

En effet, le dual T' de $E \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, G$, ou de $T = E \otimes_\varepsilon G$, est la réunion des duals des espaces $T_{u,v} = T/\varepsilon^{-1}_{u,v}(0)$. Vu (2.9), ces e. v. n. s'identifient à $E_u \otimes_\varepsilon G_v$. Le dual de cet e. v. n. est le même que le dual de $\widehat{E}_u \otimes_\varepsilon \widehat{G}_v$. Par application de (2.10), on voit que T' est la réunion des espaces $E'_u \,\widehat{\otimes}\, G'_v$. Par application de (1.6), la topologie forte sur T' coincide abec la topologie limite inductive des $E'_u \,\widehat{\otimes}\, G'_v$.

On montre de même (b).

(2.13) On notera que la conclusion de (2.12 (a)) subsiste si l'on suppose seulement que E et G sont des e. l. c. s. tels que la topologie de E soit définissable par une famille filtrante croissante de semi-normes préhilbertiennes. En effet, $T' = (E \otimes_\varepsilon G)' = \bigcup_{u,v} (E_u \otimes_\varepsilon G_v)' = \bigcup_{u,v} E'_u \,\widehat{\otimes}\, G'_v$.

On utilisera souvent en clacul symbolique le théorème suivant qui identifie deux espaces d'applications linéaires à deux produits tensoriels complétés.

(2.14) THÉORÈME. - Soient E et G deux espaces l. c. s. complets, E étant nucléaire. Les topologies de E et G sont respectivement définies par des familles filtrantes croissantes de semi-normes (ε_u) et (ε_v) avec $(u, v) \in U \times V$, les semi-normes ε_u étant préhilbertiennes.

(a) L'espace $L(E', G)$ des applications linéaires continues ℓ de E' dans G est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. Alors, on a un isomorphisme d'e. l. c. s.

$$L(E', G) \xrightarrow{a} G \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, E, \tag{2.15}$$

et cet isomorphisme fait correspondre à la semi-norme

$$\ell \longrightarrow p_{u,v}(\ell) = \sup\{\varepsilon_v(\ell\varkappa),\ \varkappa \in u\}$$

la semi-norme $\varepsilon(\varepsilon_u, \varepsilon_v)$.

(b) Soit $L^{HR}(E, G')$ l'espace des applications linéaires hypercontinues $\ell : E \longrightarrow G'$, c'est-à-dire telles qu'il existe $(u, v) \in U \times V$, et $\lambda > 0$ avec

$\ell(u^0) \subset \lambda v$. Cet e. v. est muni des "bornés" définis par les disques $\delta_{u,v} = \{\ell \ ; \ \ell u^0 \subset v\}$. Alors, on a un isomorphisme d'e. v. à bornés

(2.16) $$L^{HR}(E , G') \xrightarrow{\alpha} G' \check{\otimes} E' .$$

Pour tout $(u , v) \in U \times V$, soit $u_1 \in U$, $u_1 \supset u$ tel que l'application canonique $E_{u_1} \longrightarrow E_u$ ait une norme nucléaire majorée par n . Alors,

(2.17) $$d_{u,v} \subset \alpha(\delta_{u,v}) \subset nd_{u_1,v} .$$

(c) Le dual de l'espace nucléaire complet $L(E' , G)$ est ainsi identifié à l'espace vectoriel à bornés $L^{HR}(E , G')$.

Démonstration. - Pour (a), on renvoie à [2], ou à [5]. Signalons que (2.15) subsiste dans certaines conditions précisées dans [6], même si E n'est pas nucléaire.

(b) Soit $B = B(E , G)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires continues sur $E \times G$. B est muni de la famille des bornés définie par les disques

$$\delta'_{u,v} = \{\beta \ ; \ |\beta(x , y)| \leq 1 , \text{ si } x \in u^0 \text{ et } y \in v^0\} .$$

L'e. v. à bornés $L^{HR}(E , G')$ est isomorphe à B . A l'opérateur linéaire ℓ est associé la forme bilinéaire $\beta(x , y) = \langle \ell x , y \rangle$ et, ainsi, $\delta_{u,v}$ est appliqué sur $\delta'_{u,v}$. Vu la propriété universelle de π , et vu la nucléarité de E , on a $B \simeq (E \otimes_\pi G)' = (E \otimes_\varepsilon G)'$. Par application de (2.12), on obtient finalement un isomorphisme α de l'e. v. $L^{HR}(E , G')$ sur $E' \check{\otimes} G' = \bigcup_{n,v} E'_u \hat{\otimes} G'_v$. Soit $\tilde{\beta}$ la forme linéaire sur $E \otimes G$ associée à $\beta \in B$. Comme $\pi \geq \varepsilon$, on a

$$\{\pi(\varepsilon_u , \varepsilon_v) \leq 1\} \subset \{\varepsilon(\varepsilon_u , \varepsilon_v) \leq 1\} .$$

Donc $\ell \in \delta_{u,v}$ équivaut à $|\beta| \leq 1$ sur $U^0 \times V^0$, et équivaut à $\tilde{\beta} \leq 1$ si $\pi(\varepsilon_u , \varepsilon_v) \leq 1$, donc $\delta_{u,v} \subset \alpha\delta_{u,v}$. Soit u_1 , comme dans l'énoncé (b). Donc $\pi(\varepsilon_u , \varepsilon_v) \leq n\varepsilon(\varepsilon_{u_1} , \varepsilon_v)$. Si $\ell \leq 1$ sur $\{\pi(\varepsilon_u , \varepsilon_v) \leq n\} \supset \{\varepsilon(\varepsilon_{u_1} , \varepsilon_v) \leq 1\}$, alors $\ell \leq 1$ sur $\{\varepsilon(\varepsilon_{u_1} , \varepsilon_v) \leq 1\}$, ce qui se traduit par $\alpha(\delta_{u,v}) \subset nd_{u_1,v}$. Ainsi (2.17) est démontré.

(c) résulte de (a) et (b). En effet, le dual de l'espace nucléaire complet $G \hat{\otimes} E$ est l'e. v. à bornés $G' \check{\otimes} E'$.

Signalons que (2.12) est l'analogue pour les e. l. c. s. du théorème suivant relatif aux espaces de Hilbert.

(2.18) THÉORÈME [8]. - Soient H et K deux espaces de Hilbert complexes. Alors, l'espace $L_2(\bar{H} , K)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de l'anti-espace de H , à valeurs dans K , est isométrique à $H \hat{\otimes} K$.

3. Espaces collectivement localement convexes [6].

(3.1) Espaces munis collectivement de familles filtrantes croissantes (f. f. c.) de semi-normes.

Soit J un ensemble non vide au plus dénombrable. Les e. v. E^j , $j \in J$, sont dits collectivement munis de f. f. c. de semi-normes $p_{j,u}$ s'il existe un ensemble filtrant croissant U et, pour tout $j \in J$, une application croissante $u \longrightarrow p_{j,u}$ de U dans l'ensemble des semi-normes sur E^j . Soit $E^j_u = E^j/p^{-1}_{j,u}(0)$.

On peut dire aussi que les E^j sont collectivement multi-semi-normés. On pose $E^\bullet = (E^j)_j$ et

(3.2) $\pi_j = (p_{j,u})_u$, $((p_{j,u})) = (\pi_j)_j = \{p_{j,u} ; (j , u) \in J \times U\}$.

(3.3) Applications linéaires collectivement continues.

Soit, de même, des e. v. F^j collectivement munis de f. f. c. de semi-normes $q_{j,v}$, $(j , v) \in J \times V$. Les applications linéaires $\ell_j : E^j \longrightarrow F^j$ sont dites collectivement continues si, pour tout v , il existe $u \in U$, tel que, pour tout j , $p_{ju} \circ \ell_j$ majore $q_{jv}\, C_j$, C_j étant une constante convenable > 0 .

Donc, quel que soit v , il existe u , l'application $E^j_u \longrightarrow F^j_v$ étant définie et continue. On note $\alpha_j(u , v)$ cette application.

(3.4) Espaces collectivement localement convexes. (e. c. l. c.).

Considérons le cas particulier où $E^\bullet = F^\bullet$, ℓ_j étant, pour tout j , l'application identique Id_j de E^j . On dit que les familles $((p_{ju}))$ et $((q_{jv}))$ sont équivalentes si les applications Id_j sont collectivement continues, ainsi que les applications Id_j^{-1} .

On obtient ainsi une relation d'équivalence sur la notion (3.1). Par passage au quotient on obtient la notion d'e. c. l. c.

Si card $J = 1$, on retrouve la notion d'e. l. c. On dit que $E^\bullet$ est séparé si tous les E^j sont séparés. On dit que $E^\bullet$ est collectivement nucléaire (resp. collectivement Schwartz) si, pour tout $u \in U$, il existe $u' \geqslant u$, u' U , tel que l'application canonique $\alpha_j(u' , u)$ de $E^j_{u'}$ sur E^j_u soit nucléaire (resp. si $\widehat{\alpha_j(u' , u)} : \widehat{E^j_{u'}} \longrightarrow \widehat{E^j_u}$ est compacte). Ces définitions ne dépendent pas des f. f. c. définissant la structure d'e. c. l. c.

(3.5) Les espaces vectoriels duals $E^{j'}$ sont collectivement multidisqués, et collectivement munis de "bornés".

Le polaire absolu

$$\{p_{j,u} \leqslant 1\}^0 = \{\xi \in E^j ; \ p_{j,u}(x_j) \leqslant 1 \Longrightarrow |\langle x_j , \xi\rangle| \leqslant 1\}$$

de la semi-boule, où $p_{j,u} \leqslant 1$ caractérise $p_{j,u}$. Ce polaire absolu est noté u^j . Le sous-espace de $(E^j)'$, engendré par u^j , est normé par la jauge de u^j , cet e. v. n. est noté $E^{j'}_u$. Il apparait que les espaces $E^{j'}$ sont chacun muni d'une famille filtrante croissante $(u^j)_u$ de disques, l'ensemble des indices étant le même pour chacune de ces familles.

(3.6) Définition de l'e. l. c. s. $P(J , E^\bullet)$.

Soit $E^\bullet = (E^j)$ une famille d'espaces collectivement localement convexes et séparés. Soit P une famille de poids sur J vérifiant la condition suivante.

(CC_E) Pour tout $\varpi \in P$ et tout couple ordonné $((p_{j,u}))$ et $((p'_{j,v}))$ de f. f. c. définissant $E^\bullet$, $\forall\, v \in V$, notant $u = u(v) \in U$ tel que les $\alpha_j(u , v)$; $E^j_u \longrightarrow E^j_v$ soient continues, il existe $\varpi' \in P$, tel que $\varpi' \geqslant \varpi$, et

$$\Sigma_j \frac{\varpi(j)}{\varpi'(j)} \max(1 , \|\alpha_j(u , v)\|) < \infty .$$

Alors, l'espace $P(J , E^\bullet)$ des $e = (e_j) \in \pi E^j$, tels que

(3.7) $$\forall\, (\varpi , u) \in P \times U ,\quad q_{\varpi,u}(e) = |e|_{\varpi,u} = \Sigma\, \varpi(j)\, p_{j,u}(e_j) < \infty ,$$

ne dépend pas de $((p_{j,u}))$. Et la f. f. c. des $q_{\varpi,u}$ est remplacée par une famille équivalente si $((p_{ju}))$ est remplacée par une famille collectivement équivalente. En effet, vu (CC_E), il existe $C > 0$ tel que

$$\varpi(j)\|\alpha_j(u , v)\| \leqslant C\varpi'(j) ,\ \text{pour tout } j .$$

D'où

$$\Sigma_j\, \varpi(j)\, p'_{j,v}(e_j) \leqslant \Sigma\, \varpi(j)\|\alpha_j(u , v)\| p_{j,u}(e_j) \leqslant C\, \Sigma\, \varpi'(j)\, p_{j,u}(e_j) .$$

(3.8) PROPRIÉTÉS.

(a) On notera que $P(J , E^\bullet)$ coincide aussi avec l'espace $P^\infty_\bullet(J , E^\bullet)$ des suites $e = (e_j)_j \in \prod E^j$ telles que

$$\forall\, (\varpi , u) \in P \times U ;\quad \varpi(j)\, p_{j,u}(e_j) \longrightarrow 0 \ \text{si}\ j \longrightarrow \infty ,$$

cet espace étant muni de la topologie définie par les semi-normes

$$q'_{\varpi,u}(e) = \sup_j \varpi(j)\, p_{j,u}(e_j) .$$

En effet, pour tout $\varpi \in P$, il existe $\varpi' \geqslant \varpi$ tel que $C = \Sigma\, \varpi(j)\, \varpi'(j)^{-1} < \infty$. Donc, tout $e \in P^\infty_\bullet(J , E^\bullet)$ est tel que, pour tout $(\varpi , u) \in P \times U$,

$$\Sigma\, \varpi(j)\, p_{j,u}(e_j) \leqslant C \sup_j \varpi'(j)\, p_{j,u}(e_j) < \infty .$$

Donc, $e \in P(J , E^\bullet)$. Pour tout $1 \leqslant \beta \leqslant \infty$, $P^\infty(J , E^\bullet)$ est aussi l'espace $P^\beta(J , E^\bullet)$ des $e = (e_j) \in \prod E^j$, telles que

$$\forall\, (\varpi , u) \in P \times U ;\quad (\Sigma_j\, \varpi(j)(p_{j,u}(e_j))^\beta)^{1/\beta} < \infty .$$

(b) Pour tout j, soit D_j un sous-espace dense de E^j. Alors,

$$\bigoplus_j D_j \subset P(J , E^\bullet) \subset \prod_j E^j .$$

(c) Si les E^j sont complets (resp. quasi complets), alors $D(J , E^\bullet)$ est complet (resp. quasi complet).

(d) Supposons que chaque E^j soit un espace $\Lambda^j(I^j , \mathbb{C})$ de suites, où Λ^j désigne une famille de poids $n_j \longrightarrow \lambda^j(n_j)$ sur l'ensemble dénombrable I^j. Notant $(e_j^{n_j})_{n_j}$ la base de E^j, cet e. l. c. s. est donc isomorphe à l'ensemble des

$x_j = \sum_{n_j} x_j^{n_j} e_j^{n_j}$ tels que $\sum_{n_j} \lambda^j(n_j)|x_j^{n_j}| < \infty$, pour tout $\lambda^j \in \Lambda^j$. Alors $P(E^j)$ est isomorphe à un espace de suites sur l'ensemble $I = \bigcup I^j$.

(e) Soient $E^\bullet$ et $G^\bullet$ deux familles d'espaces collectivement l. c. s. indexées chacune dans le même ensemble dénombrable J. Soit P une famille de poids sur J vérifiant les conditions CP_E et CP_G. On considère des applications linéaires $\ell_j : E^j \longrightarrow G^j$ collectivement continues. Les structures de $E^\bullet$ et $G^\bullet$ étant définies par des f. f. c. $((p_{j,u}))$ et $((q_{j,v}))$, on suppose que, pour tout $(\varpi , v) \in P \times V$, il existe $(\varpi' , u) \in P \times U$ tel que les applications $\alpha_j(u , v) : E_u^j \longrightarrow G_v^j$ soient définies continues avec

$$\|\alpha_j(u , v)\| \varpi(j) \leq C\varpi'(j) \text{ , pour tout } j .$$

Alors, les applications ℓ^j définissent une application continue

$$\alpha : P(J , E^\bullet) \longrightarrow P(J , G^\bullet) ,$$

car, $\forall (\varpi , v) \in P \times V$,

$$q_{\varpi,v}(\alpha e) = \sum \varpi(j)\ p_{j,v}(e_j) \leq \sum \varpi(j)\|\alpha_j(u , v)\| p_{j,u}(e_j)$$
$$\leq C \sum \varpi'(j)\ p_{j,u}(e_j) = Cq_{\varpi',u}(e) .$$

(3.9) Dualité entre $\bigoplus_{j=0}^{\infty} E^j$ et $\prod_{j=0}^{\infty} E^{j\prime}$. Recherche du dual $P'(J , E^\bullet)$ de $P(J , E^\bullet)$.

Pour $f = \sum f_j \in \bigoplus E^j$, et pour $g = (g_j) \in \prod(E^j)$, on pose

(3.10)
$$\langle f , g\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} j!\ \langle f_j , g_j\rangle .$$

(3.11) Soit P une famille de poids sur $J = \underset{\sim}{N}$ vérifiant (CC_E)

Soit $P^\vee$ la famille conjuguée, c'est-à-dire des applications

$$j \longrightarrow \varpi^\vee(j) = j!\ \varpi(j)^{-1} \text{ de } \underset{\sim}{N} \text{ dans }]0 , +\infty] , \varpi \in P .$$

Le dual de $P(\underset{\sim}{N} , E^\bullet)$ coincide avec le dual de son sous-espace dense $\bigoplus E^j$, la topologie de ce sous-espace étant définie par les restrictions $\tilde{q}_{\varpi,u}$ des semi-normes $q_{\varpi,u}$, (ϖ , u) décrivant $(P \times U)$. Toute forme linéaire continue ℓ sur ce sous-espace se restreint, pour tout j, en une forme linéaire ξ_j sur E^j, et $\ell = 0$ si les ξ_j sont nuls. Donc $P'(\underset{\sim}{N} , E^\bullet)$ s'identifie à un sous-espace de $\prod E^{j\prime}$. Le polaire de la semi-boule de $\bigoplus E^j$, où $\tilde{q}_{\varpi,u} \leq 1$ est l'ensemble $d_{\varpi,u}$ des $\xi = (\xi_j) \in \prod E^{j\prime}$ tels que

$$\|\xi\|_{\varpi,u} = \sup \varpi^\vee(j)\|\xi_j\|_u \leq 1 .$$

Le sous-espace $B_{\varpi,u}$ de $\prod E^{j\prime}$, engendré par $d_{\varpi,u}$, muni de la jauge de ce disque est complet.

(3.12) Proposition et définition de l'e. v. m. $P^\vee(J , E^{\bullet\prime})$.

Soit $E^\bullet$ une suite d'e. c. l. c. dont la structure est définie par des f. f. c. $(p_{j,u})$ de semi-normes sur chaque E^j. Alors, le dual de $P(\underset{\sim}{N} , E^\bullet)$ s'identifie pour la dualité (3.10) à la réunion $\check{P}(\underset{\sim}{N}, E^{\bullet\prime})$ des espaces de Banach.

(3.13) $$B_{\varpi,u} = \{\xi = (\xi_j) \in \prod E^{j'} \ ; \ \sup_j \check{\varpi}(j)\|\xi_j\|_u < \infty\} ,$$

le polaire de $\{q_{\varpi,u} \leqslant 1\}$ étant la boule unité $d_{\varpi,u}$ de cet espace de Banach.

Les disques $d_{\varpi,u}$ définissent une structure d'e. v. à bornés sur $\check{P}(\underset{\sim}{N}, E^{\bullet\prime})$, cette structure ne changeant pas si les $(p_{j,u})$ sont remplacées par des familles collectivement équivalentes.

(3.14) THÉORÈME. - Soit $E^{\bullet} = (E^j)_{j\in J}$ une famille d'e. c. l. c. s., la structure de cette famille étant définie par des f. f. c. $(p_{j,u})_u$ de semi-normes sur les E^j. Soit P une famille de poids sur J vérifiant (CC_E).

(a) Si les E^j sont collectivement de Schwartz, alors $P(J , E^{\bullet})$ est un e. l. c. s. de Schwartz.

(b) Supposons les E^j colectivement nucléaires, et que, pour tout $(\varpi , u) \in P \times U$, il existe $(\varpi', u') \in P \times U$ tel que $(\varpi', u') \geqslant (\varpi , u)$, et

(3.15) $$\sum_j \varpi'(j)^{-1} \varpi(j)\, M_j(u' , u) < \infty$$

où $M_j(u' , u)$ majore strictement la norme nucléaire de $\alpha_j(u' , u)$. Alors l'e. l. c. s. $P(J , E^{\bullet})$ est nucléaire.

Démonstration.

(a) Posant $X = P(J , E^{\bullet})$, l'e. v. n. $X_{\varpi,u} = X/(q_{\varpi,u}^{-1}(0))$ s'identifie à un espace de suites $\xi = (\xi_j)$; $\xi_j \in E^j_u$ telles que $\xi_j = 0$ chaque fois que $\varpi(j) = 0$, et telles que

$$\|\xi\| = \sum \varpi(j)\|\xi_j\|_u < \infty .$$

Le complété de $X_{\varpi,u}$ est l'espace des suites $\xi = (\xi_j)$, les $\xi_j \in \widehat{E^j_u}$ vérifiant une condition analogue.

L'application canonique $\gamma : X_{\varpi',u'} \longrightarrow X_{\varpi,u}$ est continue, car

(*) $$\|\gamma\xi\| = \sum \varpi(j)\, p_{j,u}(\alpha_j(u' , u)\xi_j) \leqslant \sum \varpi'(j)\, p_{j,u'}(\xi_j) .$$

Soit β la boule unité fermée de $\widehat{X}_{\varpi',u'}$. Pour ε fixé > 0, soit J' une partie finie de J telle que

$$\sum_{j\notin J'} \varpi'(j)^{-1} \varpi(j)\|\alpha_j(u' , u)\| \leqslant \varepsilon/2 .$$

Toute suite $\xi = (\xi_j)$ de β s'écrit $\xi = \xi' + \xi''$ avec $\xi'_j = \xi_j$ pour $j \in J'$, et $\xi''_j = 0$ pour $j \notin J'$. Pour tout j, soit β_j l'ensemble des $\xi_j \in E^j(u')$ tels que $\varpi'(j)|\xi_j|_{u'} \leqslant 1$. Pour tout $\xi = (\xi_j) \in \beta$, on a $\xi_j \in \beta_j$. Pour tout $j \in J'$, comme $\widehat{\alpha}_j(u' , u)$ est compacte, il existe $n(j)$ boules de $\widehat{E^j(u)}$ qui recouvrent $\widehat{\alpha}_j(u' , u)\beta_j$. Par conséquent, il existe un nombre fini N de boules de rayon $\varepsilon/2$ de $\widehat{X_{\varpi,u}}$ qui recouvrent les $\widehat{\gamma}(\xi')$ lorsque $\xi = \xi' + \xi''$ décrit β. Or quand ξ décrit β,

$$\|\gamma(\xi'')\| = \sum_{j\notin J'} \varpi(j)\|\xi_j\|_u \leq \sum\varpi(j)\|\widehat{\alpha}_j(u' , u)\|.\|\xi_j\|_{u'}$$
$$\leq \sum \varpi'(j)^{-1} \varpi(j)\|\alpha_j(u' , u)\| < \varepsilon/2 .$$

Donc, il existe N boules de rayon ε de $\widehat{X_{\varpi,u}}$ qui recouvrent $\widehat{\gamma}(\beta)$, et $\widehat{\gamma}(\beta)$ est précompact. Comme $\widehat{X_{\varpi,u}}$ est complet, $\widehat{\gamma}(\beta)$ est relativement compact, ce qui montre que $\widehat{\gamma}$ est compact.

(b) On prend des notations analogues. Comme $\alpha_j(u' , u)$ est nucléaire, cette application s'écrit

$$\alpha_j(u' , u) = \sum_{k_j} x'_{j,k_j} \otimes y_{j,k_j} \quad \text{avec} \quad \sup_{k_j} \|x'_{j,k_j}\| \leq 1$$

et

$$\sum_{k_j} \|y_{j,k_j}\| \leq M_j(u' , u) \quad \text{avec} \quad x'_{j,k_j} \in (E^j)'_{u'} \quad \text{et} \quad y_{j,k_j} \in E^j .$$

Comme $X_{\varpi',u'}$ s'identifie à un espace de suites vectorielles à valeurs dans les e. v. n. $E^j_{u'}$, la surjection canonique $X \longrightarrow X_{\varpi',u'}$ est définie par la collection des surjections canoniques $\alpha_j(u') : E^j \longrightarrow E^j_{u'}$. L'application canonique $\gamma : X_{\varpi',u'} \longrightarrow X_{\varpi,u}$ est continue d'après (*). Soit ξ'_{j,k_j} la forme linéaire continue sur $X_{\varpi',u'}$ qui associe à la suite vectorielle $(\xi_j)_j$ le nombre $\langle\xi_j , x'_{j,k_j}\rangle$. Sa norme est majorée par $\varpi'(j)^{-1}$. Soit η_{j,k_j} la suite vectorielle appartenant à $X_{\varpi,u}$, dont tous les termes sont nuls, sauf le j-ième égal à y_{j,k_j} . La norme de cette suite est $\varpi(j)\|y_{j,k_j}\|$. Alors, on a

$$\gamma = \sum_j \sum_{k_j} \xi'_{j,k_j} \otimes \eta_{j,k_j} ,$$

et la norme nucléaire de γ est finie car

$$\|\gamma\|_1 \leq \sum_j \sum_{k_j} \varpi'(j)^{-1} \varpi(j)\|y_{j,k_j}\| \leq \sum_j \varpi'(j)^{-1} \varpi(j) M_j(u' , u) .$$

(3.16) <u>Produit tensoriel d'espaces collectivement localement convexes.</u>

Soient I et J deux ensembles dénombrables d'indices. Soient $E^\bullet = (E^i)_i$, et $F^\bullet = (F^j)_j$ deux familles d'espaces collectivement localement convexes complets, ces structures étant définies respectivement par des familles collectives filtrantes croissantes $((p_{i,u}))$ et $((q_{j,v}))$ de semi-normes, u et v , décrivant des ensembles filtrants croissants U et V respectivement. Alors les espaces $E^i \otimes_\varepsilon F^j$ sont collectivement localement convexes, et leurs topologies sont définies par les familles filtrantes croissantes de semi-normes.

$$\varepsilon_{ij}(u , v)$$
$$= \varepsilon(p_{i,u} , q_{j,v}) : t \longrightarrow \sup\{|\langle t , e'_i \otimes f'_j\rangle| ; e'_i \in d_{i,u} ; f'_j \in d_{j,v}\} ,$$

avec

$$d_{i,u} = \{p_{i,u} \leq 1\}^0 , \quad d_{j,v} = \{q_{j,v} \leq 1\}^0 .$$

Pour tout (i , j) fixé dans $I \times J$, la famille des semi-normes $\varepsilon(p_{i,u} , q_{j,v})$ est donc indexée dans $U \times V$, muni de l'ordre produit. De même, les espaces complétés $E^i \widehat{\widehat{\otimes}} F^j$ sont collectivement localement convexes. Ces deux familles d'e.l.c.s. sont notées respectivement $E^\bullet \underset{\varepsilon}{\otimes} F^\bullet$ et $E^\bullet \widehat{\widehat{\otimes}} F^\bullet$. Soient P et Q deux familles filtrantes croissantes de poids sur I et J respectivement, vérifiant respectivement CC_E et CC_F. Alors la famille $P \otimes Q$ de poids sur $I \times J$ est filtrante croissante, et vérifie $CC_{E^\bullet \otimes F^\bullet}$. On a une bijection naturelle

$$P_f(I\ ,\ E^\bullet) \otimes Q_f(J\ ,\ F^\bullet) \xrightarrow{BN} (P \otimes Q)_f\ (I \times J\ ,\ E^\bullet \otimes F^\bullet)\ . \tag{3.18}$$

(3.19) THÉORÈME. - Soient $(E^i)_i$ et $(F^j)_j$ deux suites d'e. c. l. c. complets, ces structures étant définies par les familles collectives filtrantes croissantes de semi-normes $((p_{i,u}))$ et $((q_{j,v}))$ respectivement, avec $(i\ ,\ j) \in I \times J$, $(u\ ,\ v) \in U \times V$. On pose $u_i = \{p_{i,u} \leqslant 1\}^0$, $v_j = \{q_{j,v} \leqslant 1\}^0$ d'où des structures d'e. v. c. m. sur les duals $(E^i)'$ et $(F^j)'$. Soient P et Q deux familles filtrantes croissantes de poids sur I et J respectivement CC_E et CC_F, respectivement.

(a) Alors, la bijection BN se prolonge en un isomorphisme d'e. l. c. s.

$$P^\infty_\bullet(I\ ,\ E^\bullet) \widehat{\widehat{\otimes}} Q^\infty_\bullet(J\ ,\ F^\bullet) \simeq (P \otimes Q)^\infty_\bullet(I \times J\ ,\ E^\bullet \widehat{\widehat{\otimes}} F^\bullet) \tag{3.20}$$

qui fait correspondre les semi-normes.

$$\varepsilon(q'_{u,\varpi}\ ,\ q'_{v,\varpi'}) \ \text{ et }\ q'_{\varepsilon(u,v),\varpi\otimes\varpi'}\ .$$

(b) De même,

$$P^{\vee 1}(I\ ,\ E'^\bullet) \check{\otimes}\, Q^{\vee 1}(J\ ,\ F'^\bullet) \simeq (P^\vee \otimes Q^\vee)^1(I \times J\ ,\ E'^\bullet \otimes F'^\bullet)\ . \tag{3.21}$$

Démonstration. - Soit $g_{ij} = \sum_{k=1}^N e_i^k \otimes f_j^k$ avec $e^k \in P_f(J\ ,\ E^\bullet)$, $f^k \in Q_f(J\ ,\ F^\bullet)$. Soient $\xi \in P^{\vee\prime}(I\ ,\ E'^\bullet)$, et $\eta \in Q^{\vee}1(J\ ,\ F'^\bullet)$ décrivant les polaires des semi-boules, où $q_{u,\varpi} \leqslant 1$ et $q_{v,\varpi'} \leqslant 1$ respectivement.

$$\sum \varpi(i)^{-1} |\xi_i|_u \leqslant 1\ ,\quad \sum \varpi'(j)^{-1} |\eta_j|_v \leqslant 1\ .$$

Alors posant $g = (g_{ij})_{ij}$, $\varepsilon = \varepsilon(q'_{u,\varpi}\ ,\ q'_{v,\varpi'})$, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon(g) &= \sup_{\xi,\eta} |\langle \textstyle\sum_k e^k \otimes f^k\ ,\ \xi \otimes \eta\rangle| \\
&= \sup_{\xi,\eta} |\textstyle\sum_{i,j,k} \langle e_i^k\ ,\ \xi_i\rangle \langle f_j^k\ ,\ \eta_j\rangle| \\
&= \sup_\eta \sup_\xi |\textstyle\sum_i \langle \sum_k e_i^k \langle f^k\ ,\ \eta\rangle\ ,\ \xi_i\rangle| \\
&= \sup_\eta \sup_i \varpi(i) |\textstyle\sum_k e_i^k \langle f^k\ ,\ \eta\rangle|_u \\
&= \sup_\eta \sup_i \varpi(i) \sup_{\xi_i \in u_i} |\textstyle\sum_k \langle e_i^k \langle f^k\ ,\ \eta\rangle\ ,\ \xi_i\rangle| \\
&= \sup_i \varpi(i) \sup_{\xi_i \in u_i} \sup_\eta |\textstyle\sum_{k,j} \langle \langle e_i^k\ ,\ \xi_i\rangle f_j^k\ ,\ \eta_j\rangle| \\
&= \sup_i \varpi(i) \sup_{\xi_i \in u_i} \sup_j \varpi'(j) \sup_{\eta_j \in v_j} |\textstyle\sum_k \langle e_i^k\ ,\ \xi_i\rangle \langle f_j^k\ ,\ \eta_j\rangle| \\
&= \sup_{ij} \varpi(i)\, \varpi'(j) \sup_{\xi_i \in u_i, \eta_j \in v_j} |\langle \textstyle\sum_k e_i^k \otimes f_j^k\ ,\ \xi_i \otimes \eta_j\rangle| \\
&= \sup_{ij} \varpi(i)\, \varpi'(j) |\textstyle\sum_k e_i^k \otimes f_j^k|_{u,v} = \sup_{i,j} \varpi(i)\, \varpi(j) |g_{ij}|_{u,v} \\
&= q'_{\varepsilon,\varpi\otimes\varpi'}(g)\ .
\end{aligned}$$

(b) se déduit de (a) en égalant les duals de chaque nombre de (3.20).

On a une proposition analogue concernant la topologie π .

(3.22) PROPOSITION. - $P(I , E^\bullet) \hat{\otimes} Q(J , F^\bullet) \simeq P \otimes Q(I \times J , E^\bullet \hat{\otimes} F^\bullet)$, et par cet isomorphisme, les semi-normes $\pi(q_{u,\varpi} , q_{v,\varpi'})$ et $q_{\pi(u,v),\varpi\otimes\varpi'}$ se correspondent.

En effet, pour $g \in (P \otimes Q)_f(I \times J , E' \hat{\otimes} F')$, on a :

$$(\pi(q_{w,\varpi} , q_{v',\varpi'}))(g) = \inf\{\textstyle\sum_k q_{u\varpi}(e^k)\, q_{v\varpi'}(f^k)\} ,$$

pour toutes les écritures de g sous la forme $g = \sum_{k=1}^N e^k \otimes f^k$, soit, plus explicitement, $g_{ij} = \sum_{k=1}^N e_i^k \otimes f_j^k$. D'où,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \inf\{\textstyle\sum_{i,j} \varpi(i)\, \varpi'(j) \sum_k |e_i^k|_u\, |f_j^k|_v \ , \ g = \sum_k e^k \otimes f^k\} \\ &= \textstyle\sum \varpi(i)\, \varpi'(j) \prod_{u,v}(g_{ij}) = q_{\pi(u,\varpi),\varpi\otimes\varpi'}(g) \ . \end{aligned}$$

(3.23) Le théorème (3.19) entraine, en prenant J réduit à un élément,

$$P(I , E^\bullet) \hat{\hat{\otimes}} F \simeq P(I , E^\bullet \hat{\hat{\otimes}} F) .$$

4. Matrices d'opérateurs linéaires.

(4.1) Les données.

Soient $E^\bullet = (E^j)_j$ et $G^\bullet = (G^j)$ deux suites d'espaces collectivement nucléaires complets, dont les structures sont respectivement définies par des familles collectivement filtrantes croissantes $(\varepsilon_u^j)_u$ et (ε_v^j) de semi-normes. On suppose que, pour E et G , les normes des applications α_j , intervenant dans (CC_E) et (CC_G) , admettent des majorations en r^j , r pouvant être arbitrairement grand. Soit P une famille de poids sur $\underset{\sim}{N}$ vérifiant (C1). On pose

(4.2) $$X = P(\underset{\sim}{N} , E^\bullet) , \quad Y = P(\underset{\sim}{N} , G^\bullet) .$$

Ces espaces sont nucléaires complets, et leurs topologies sont respectivement définies par les semi-normes $q_{\varpi,u}$ et $q_{\varpi,v}$ définies en (3.7). Leurs duals sont respectivement

(4.3) $$X' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , E'^\bullet) , \quad Y' = P^\vee(\underset{\sim}{N} , G'^\bullet) .$$

(4.4) PROPOSITION. - L'espace $L(X' , Y)$ des opérateurs linéaires continus de X' dans Y est muni de la topologie ε de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de X' . Alors

(4.5) $$L_\varepsilon(X' , Y) \simeq X \hat{\hat{\otimes}} Y \simeq P(\underset{\sim}{N}^2 , G^\bullet \hat{\hat{\otimes}} E^\bullet) .$$

A l'opérateur $\hat{Q} \in L(X' , Y)$, cet isomorphisme associe $Q = (Q_{k,\ell})_{k,\ell}$ avec $Q_{k,\ell} \in G^k \hat{\hat{\otimes}} E^\ell$. Quels que soient $\varphi = (\varphi_\ell) \in X'$, $\psi = (\psi_k) \in Y'$, on a

(4.6) $$\langle \hat{Q}\varphi , \psi \rangle = \langle \tilde{Q} , \psi \otimes \varphi \rangle = \textstyle\sum_{k,\ell} k!\, \ell!\, \langle Q_{k,\ell} , \psi_k \otimes \varphi_\ell \rangle_{k,\ell} .$$

(4.7) En particulier, si tous les ψ_i sont nuls sauf ψ_k

(a) $\langle Q\varphi \, , \, \psi\rangle = k!\langle (Q\varphi)_k \, , \, \psi_k\rangle = k! \sum \ell!\langle Q_{k,\ell} \, , \, \psi_k \otimes \varphi_\ell\rangle$.

(b) Ce qu'on écrit

$$(Q\varphi)_k = \sum \ell!\{Q_{k,\ell} \, , \, \varphi_\ell\} \, .$$

(c) En particulier, si tous les φ_j sont nuls sauf φ_ℓ

$$(Q\varphi_\ell)_k = \ell! \; Q_{k\ell}(\varphi_\ell) \, .$$

En effet, vu (2.14 (a)), on a $L(X' \, , \, Y) \simeq Y \hat{\otimes} X$, et, d'après (3.20), cet espace localement convexe est égal à $P(\underset{\sim}{N}^2 \, , \, G^\bullet \hat{\hat{\otimes}} E^\bullet)$. A l'opérateur $\widehat{Q}$ correspond l'élément $\tilde{Q}\, d\ell$, espace de suites tel que

$$\langle \widehat{Q}\varphi \, , \, \psi\rangle = \langle \tilde{Q} \, , \, \psi \otimes \varphi\rangle \, ,$$

le dernier crochet indiquant la dualité naturelle entre $Y \hat{\hat{\otimes}} X$ et $Y' \otimes X'$. Par exemple, pour $\tilde{Q} = B_k \otimes A_\ell$, $B_k \in G^k$ et $A_\ell \in E^\ell$, on a

$$\begin{aligned}\langle \widehat{Q}\varphi \, , \, \psi\rangle &= \langle B_k \otimes A_\ell \, , \, \psi \otimes \ell\rangle = \langle B_k \, , \, \psi\rangle\langle A_\ell \, , \, \varphi\rangle \\ &= k! \; \ell!\langle B_k \, , \, \psi_k\rangle_k \langle A_\ell \, , \, \varphi_\ell\rangle_\ell \, ,\end{aligned}$$

d'où la formule (4.6).

(4.8) DÉFINITION de $L^E(R' \, , \, S')$. – Soient R et S deux espaces nucléaires complets dont les topologies sont définies par les familles filtrantes croissantes de s. n. préhilbertiennes (ε_u) et (ε_v) . Soit $L^E(R' \, , \, S')$ l'espace des applications linéaires Q de R' dans S' , transformant toute partie équicontinue de R' en une partie équicontinue de S' . On peut le munir de la famille des disques $\{Qu \subset v\}$, $(u \, , \, v)$ décrivant $U \times V$. Une partie de $L^E(R' \, , \, S')$ est dite bornée si elle est contenue dans l'homothétique d'un tel disque.

Une telle application linéaire Q est dite équicontinue. On notera qu'une telle application Q est forcément continue pour les topologies fortes de R' et S' . Dans le cas particulier où S est réflexif, tout borné de S' est équicontinu, et toute application linéaire continue Q de R' dans S' est équicontinue. En effet, Q étant alors bornée, Q transforme toute partie équicontinue de R' en une partie bornée (donc équicontinue de S').

(4.9) Matrices d'opérateurs caractérisant tout $Q \in L^E(X' \, , \, Y')$.

Pour tout $(k \, , \, \ell) \in \underset{\sim}{N}^2$, on pose

$$L_{k\ell} = L^E(X'^{\ell} \, , \, Y'^{k}) \, .$$

L'espace $L_{k\ell}$ est muni des disques $\{A \, ; \, Av^\ell \subset u^k\}$. Ces disques sont paramétrés dans $U \times V$. Etant donné $\widehat{Q} \in LE(X' \, , \, Y')$, on définit $Q_{k\ell} \in L_{k\ell}$ par

(4.10) $$\forall \; \varphi_\ell \in X'^{\ell} \, , \quad (Q\varphi_\ell)_k = \ell! \; Q_{k\ell}(\varphi_\ell) \, .$$

Ainsi, on caractérise tout opérateur linéaire équicontinu $\widehat{Q}$ de X' dans Y' par une matrice infinie $(Q_{k\ell})_{k,\ell}$ d'opérateurs linéaires équicontinus $Q_{k\ell}$ de X'^{ℓ} dans Y'^{k} .

Le théorème suivant caractérise les matrices des opérateurs linéaires équicontinus de X' dans Y'.

(4.11) THÉORÈME. - L'application $\hat{Q} \longrightarrow (Q_{k\ell})$ réalise un isomorphisme de l'espace vectoriel à bornés $L^E(X', Y')$ sur l'espace des suites doubles $Q_{k\ell} \in L_{k\ell}$ telles que $\forall (\varpi, u) \in P \times U$, $\exists (\varpi', v) \in P \times V$, et $C > 0$ avec pour tout $(k, \ell) \in \underset{\sim}{N}^2$

$$(4.12) \qquad Q_{k\ell}\, u^\ell \subset C\, k!^{-1}\, \varpi(\ell)^{-1}\, \varpi'(k) v^k .$$

Démonstration. - Dire que $\hat{Q} \in L^E(X', Y')$ signifie que, pour tout $(\varpi, u) \in P \times U$, il existe $(\varpi', v) \in P \times V$ et $C \geqslant 0$ avec $Q\, d_{\varpi,u} \subset C\, d_{\varpi',v}$, soit

$$|\langle \hat{Q}\varphi , g\rangle| \leqslant C \quad \text{si} \quad \varphi \in d_{\varpi,u} \quad \text{et si} \quad p_{\varpi',v}(g) \leqslant 1 .$$

Ceci peut encore être écrit

$$(4.13) \begin{cases} \forall (\varpi, u) \in P \times U, \quad \exists (\varpi', v) \in P \times V, \text{ et } C > 0, \text{ avec} \\ \sum_{k,\ell} |\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi(\ell) \ell!^{-1} \text{ et } \sum_{k=0}^\infty \varpi'(k) |g_k|_v \leqslant 1 . \end{cases}$$

(a) Cette condition entraine,

$$\forall \ell , \sum_{k=0}^\infty |\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi(\ell)\ell!^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^\infty \varpi'(k)|g_k|_v \leqslant 1 ,$$

soit

$$\forall \ell , \quad |\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi(\ell)\ell^{-1} \quad \text{et} \quad \varpi'(k)|g_k|_v \leqslant 1 .$$

Posant $\varphi_\ell = \varpi(\ell)\ell!^{-1}\varphi'_\ell$, et $g'_k = \varpi'(k) g_k$, ceci s'écrit si $\varpi(\ell) \neq 0$

$$|\langle Q_{k\ell}\, \varphi'_\ell , g'_k\rangle| \leqslant C\, k!^{-1}\, \varpi(\ell)^{-1}\, \varpi'(k) \quad \text{si} \quad \varphi'_\ell \in u^\ell \quad \text{et} \quad g'_k \in (v^k) .$$

Donc les $Q_{k\ell}$ vérifient la condition (4.12). De plus, si $\hat{Q} \in L^E(X', Y')$ décrit le disque $\{\hat{Q}\, d_{\varpi,u} \subset d_{\varpi',v}\}$, on voit que les $Q_{k\ell}$ correspondants vérifient (4.12) avec la même constante C. Donc l'application $\hat{Q} \longrightarrow (Q_{k\ell})_{k,\ell}$ est bornée.

(b) Inversement, soit $(Q_{k\ell})$ une famille d'opérateurs appartenant à $L_{k\ell}$, les $Q_{k\ell}$ vérifiant (4.12). Montrons que l'opérateur $\hat{Q}$, défini par (4.10), est équicontinu de X' dans Y', c'est-à-dire que les $Q_{k\ell}$ vérifient (4.13). Prenons $\varpi_1 \in P$, $\varpi_1 \geqslant \varpi$ tel que $\sum_{j=0}^\infty \varpi_1(j)^{-1}\, \varpi(j) < \infty$. Appliquant l'hypothèse (4.12) avec (ϖ, u) remplacé par (ϖ_1, u), on obtient qu'il existe $(\varpi', v) \in P \times V$ et $C > 0$ avec, pour tout $(k, \ell) \in \underset{\sim}{N}^2$,

$$|\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C , \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi_1(\ell)\ell!^{-1} \quad \text{et} \quad \varpi'(k)|g_k|_v \leqslant 1 .$$

On a donc

$$|\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C \frac{\varpi(\ell)}{\varpi_1(\ell)} , \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi(\ell)\ell!^{-1} \quad \text{et} \quad \varpi'(k)|g_k|_v \leqslant 1 .$$

Ceci entraine

$$\sum_k |\langle Q_{k\ell}\, \varphi_\ell , g_k\rangle| k!\, \ell! \leqslant C \frac{\varpi(\ell)}{\varpi_1(\ell)} \quad \text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leqslant \varpi(\ell)\ell!^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^\infty \varpi'(k)|g_k|_v \leqslant 1 .$$

En sommant membre à membre ces inégalités correspondant à $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient (4.13). Ce qui prouve que Q est equicontinue. Le théorème est démontré.

On notera que cette démonstration a simplement utilisé le fait que la famille P de poids servant à définir $X = P(\underset{\sim}{N}, E^{\bullet})$ vérifie (C1), et la conclusion du théorème subsiste si $Y = Q(\underset{\sim}{N}, G^{\bullet})$, la famille Q de poids ne vérifiant pas forcément (C1). Etudions d'ailleurs une variante de (4.11) utilisant cette remarque.

(4.14) <u>Matrice d'un opérateur à valeurs dans une somme hilbertienne.</u>

Soit X comme précédemment. Soit $Y^0, Y^1, \dots, Y^k, \dots$ une suite d'espaces de Hilbert et

(4.15) $$Y = \{(y^k)_k \; ; \; y^k \in Y^k , \; \sum \|y^k\|^2 k! < \infty\} .$$

Tout opérateur linéaire continu Q de X' dans Y est caractérisé par une matrice d'opérateurs

(4.16) $$Q_{k,\ell} \in L(X'^{\ell}, Y^k) \simeq X^{\ell} \hat{\otimes} Y^k ,$$

ces opérateurs étant tels que $(Q\varphi_\ell)_k = \ell! \, Q_{k\ell}(\varphi_\ell)$.

(4.17) PROPOSITION. - <u>Une matrice</u> $(Q_{k,\ell})$ <u>d'opérateurs</u> $Q_{k,\ell} \in L(X'^{\ell}, Y^k)$ <u>est la matrice d'un opérateur linéaire continu</u> Q <u>de</u> X' <u>dans</u> Y <u>si, et seulement si,</u>

(4.18) $\forall (\varpi, u) \in P \times U , \; \exists C > 0 , \; \forall \ell , \varphi_\ell \in u^\ell \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_{k\ell} \varphi_\ell\|^2 k! \, \varpi(\ell)^2 \leq C$.

<u>Démonstration</u>. - L'opérateur Q de matrice $(Q_{k,\ell})$ est continu de X' dans Y si, et seulement si,

(4.19) $\forall (\varpi, u) \in P \times U , \; \sum_{k=0}^{\infty} k! \|\sum_{\ell=0}^{\infty} \ell! \, Q_{k\ell} \varphi_\ell\|^2 \leq C$ si $|\varphi_\ell|_u \leq \varpi(\ell)\ell!^{-1}$.

Cette relation peut encore s'écrire

(*) $\sum_{k,\ell} k! \, \ell! \, |\langle Q_{k,\ell} \varphi_\ell , g_k\rangle| \leq C$ si $|\varphi_\ell| \leq \varpi(\ell)\ell!^{-1}$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k! \|g_k\|^2 \leq 1$.

(a) Ceci entraine,

$$\forall \ell , \; \sum_k k! \, \ell! |\langle Q_{k,\ell} \varphi_\ell , g_k\rangle| \leq C \text{ si } |\varphi_\ell| \leq \varpi(\ell)\ell!^{-1} \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} k! \|g_k\|^2 \leq 1 ,$$

soit

$$\forall \ell , \; \sum_{k=0}^{\infty} k! \, \varpi(\ell) |\langle Q_{k,\ell} \varphi_\ell , g_k\rangle| \leq C \text{ si } \varphi_\ell \in u^\ell \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} k! \|g_k\|^2 \leq 1 .$$

Ceci équivaut à

$$\forall \ell , \; \sum_{k=0}^{\infty} k! \, \varpi(\ell)^2 \|Q_{k,\ell} \varphi_\ell\|^2 \leq C \text{ si } \varphi_\ell \in u^\ell .$$

(b) Réciproquement, montrons que si, $\forall (\varpi, u) \in P \times U$; les $Q_{k\ell}$ vérifient cette relation, l'opérateur Q de matrice $Q_{k\ell}$ est continu de X' dans Y.

Soit $\varpi_1 \geq \varpi$ tel que $\sum \varpi(j)\varpi_1^{-1}(j) < \infty$. On a

$$\forall \ell , \; \sum_{k=0}^{\infty} \varpi_1(\ell)^2 \|Q_{k,\ell} \varphi_\ell\|^2 k! \leq C \text{ si } \varphi_\ell \in u^\ell .$$

Donc,

$$\forall \ell , \; \sum_{k=0}^{\infty} k! \, \ell! |\langle Q_{k,\ell} \varphi_\ell , g_k\rangle| \leq C \text{ si } |\varphi_\ell|_u \leq \varpi_1(\ell)\ell!^{-1} \text{ et } \sum k! \|g_k\|^2 < \infty ,$$

ou bien

$$\forall \ell \ , \ \sum_{k=0}^{\infty} k!\, \ell!\, |\langle Q_{k,\ell}\, \varphi_\ell \ , \ g_k \rangle| \leq C \frac{\varpi(\ell)}{\varpi_1(\ell)}$$

$$\text{si} \quad |\varphi_\ell|_u \leq \varpi(\ell)\ell!^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k!\|g_k\|^2 < \infty \ .$$

En additionnant ces inégalités pour $\ell = 0 , 1 , \ldots$, on obtient (*). On a donc démontré que Q est continu.

5. Problème.

Soit $E^\bullet = (E^j \ ; \ j = 0 , 1 , \ldots)$ une suite d'espaces collectivement nucléaires et complets sur le corps $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. Soit P une famille de poids vérifiant (CC_E) et $(C1)$. Il serait intéressant de trouver des conditions suffisantes sur P et $E^\bullet$ pour

que $P(J , E^\bullet)$ soit bornologique,

ou que son dual fort soit complet,

ou que son dual fort soit nucléaire.

Le cas particulier important est celui où $E^0 = \underset{\sim}{K}$, $E^1 = E$ nucléaire complet, $E^k = \hat{\hat{\bigotimes}}_k E$ pour $k \geq 1$, ou bien $E^k = \hat{\hat{\bigodot}}_k E$.

On peut prendre par exemple, $E = s'$, et pour P la famille P_H des poids $\varpi_n(j) = n^j$. Ce résultat de S. DINEEN [1] répond à une question qui avait été posée lors de la publication de [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] DINEEN (S.). - Analytical functionals on fully nuclear spaces (à paraitre).

[2] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[3] KRÉE (P.). - Symboles et noyaux des opérateurs différentiels, Séminaire Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie et applications à la physique, 2e année, 1975/76, n° 1, 16 p.

[4] KRÉE (P.). - Produits tensoriels topologiques multiples, Séminaire Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie et applications à la physique, 2e année, 1975/76, n° 3, 19 p.

[5] KRÉE (P.). - Espaces nucléaires, Séminaire Krée : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie et application à la physique, 2e année, 1975/76, n° 5, 13 p.

[6] KRÉE (P.). - Méthodes holomorphes et méthodes nucléaires en analyse en dimension infinie et en théorie quantique des champs. "Conférence on measures on vector spaces [1977. Dublin]. - Berlin, Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics) (à paraitre).

[7] KRÉE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[8] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I et II, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 16141 et t. 8, 1958, p. 1-209.

[9] Séminaire KRÉE : Equations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75. - Paris, Secrétariat mathématique, 1975.

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS