SÉMINAIRE PAUL KRÉE

CHRISTER O. KISELMAN

Supports des profonctionnelles analytiques

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A9_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 9, 7 p.

SUPPORTS DES PROFONCTIONNELLES ANALYTIQUES

par Christer O. KISELMAN

1. Introduction.

Le but de cet exposé est premièrement (§ 2) de résumer quelques résultats dans la théorie des fonctionnelles analytiques d'un nombre fini de variables, et deuxièmement (§ 3) d'étudier quelques questions correpondantes en dimension infinie.

On sait qu'il y a certaines difficultés pour définir le support d'une prodistribution (cf. SCHACHERMAYER [9]). Or, pour les fonctionnelles analytiques, la notion de support pose des problèmes déjà en dimension finie, et il faut bien s'y habituer avant qu'on ne puisse passer aux profonctionnelles analytiques.

2. Fonctionnelles analytiques en dimension finie.

Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$ (ou une variété holomorphe de dimension finie, réunion dénombrable de compacts), soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω ; c'est un espace de Fréchet avec la topologie définie par les seminormes

$$p_K(\varphi) = \sup_{z\in K}|\varphi(z)| \ , \quad \varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \ , \quad K \subset\subset \Omega \ .$$

Une forme linéaire $T : \mathcal{O}(\Omega) \to \underset{\sim}{C}$ est donc continue si et seulement s'il existe une constante C et un compact K dans Ω tels que $|T(\varphi)| \leq C p_K(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$. On pourrait dire, dans ce cas, que K est un <u>porteur strict de</u> T. Nous dirons qu'un compact K est <u>porteur de</u> T si tout $K' \supset\supset K$ en est porteur strict. La raison de cette notion est claire : $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$, où $a \in \Omega \subset \underset{\sim}{C}$ est une fonctionnelle portée strictement par $\{a\}$, or $\delta'_a(\varphi) = -\varphi'(a)$ n'est pas strictement portée par $\{a\}$. De façon générale, si T est portée par $K \subset \Omega \subset \underset{\sim}{C}^n$, alors $(\partial/\partial z_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial z_n)^{\alpha_n} T$ est elle aussi portée par K. Donc toute combinaison linéaire finie $\sum a_k \delta_0^{(k)}$ est portée par $\{0\} \subset \underset{\sim}{C}$, mais c'est le cas aussi pour certaines combinaisons infinies. Plus précisément, $\sum a_k \delta_0^{(k)}$ est portée par $K = \{z \in \underset{\sim}{C} \ ; \ |z| \leq r\}$, où $r \geq 0$, si, et seulement si, $\limsup |a_k|^{1/k} \leq r$.

Soit $\mathfrak{F}$ une famille de porteurs (compacts) de $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$. On dit que K est un $\mathfrak{F}$-<u>support de</u> T si $K \in \mathfrak{F}$ et si K est minimal dans $\mathfrak{F}$ pour l'inclusion.

<u>Exemple</u>. - Si $T(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$, alors $\{0\}$ est le seul $\mathfrak{F}$-support de T où $\mathfrak{F} = \{K \ ; \ K \text{ compact}, \ 0 \in K\}$.

<u>Exemple</u>. - Soit $T(\varphi) = \int_a^b \varphi(z)\, dz$, $f \in \mathcal{O}(\underset{\sim}{C})$. Tout chemin simple de a à b est un $\mathfrak{F}$-support de T, où $\mathfrak{F}$ est la famille de tous les porteurs polynomialement convexes de T. Donc T a une infinité de $\mathfrak{F}$-<u>supports polynomialement convexes</u>. Or T n'a qu'un seul $\mathfrak{F}_1$-support où $\mathfrak{F}_1$ est la classe des porteurs con-

vexes, à savoir le segment $[a, b]$, dit <u>support convexe</u> de T.

<u>Exemple</u>. – Étant donnée g, holomorphe pour $|z| > 1$, on pose

$$T(\varphi) = \int_\Gamma \varphi(z)\, g(z)\, dz$$

où Γ est un chemin faisant un tout autour de $|z| \leq 1$. Soit $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, et posons

$$S(\varphi) = \int_{\Gamma_1} \varphi(z)\, g(z)\, dz = T(\varphi) - \int_{\Gamma_2} \varphi(z)\, g(z)\, dz .$$

Si K est un support polynomialement convexe de T contenu dans le disque unité, alors on peut montrer que Γ_1 et $K \cup \Gamma_2$ sont des supports polynomialement convexes de S. <u>Morale</u> : Dans la présence d'une petite courbe (Γ_2), on ne peut pas affirmer qu'un support $(K \cup \Gamma_2)$ soit unique.

Si l'on veut qu'un support polynomialement convexe soit unique il faut donc, en gros, supprimer les parties 1-dimensionnelles tandis que les parties 0-dimensionnelles et 2-dimensionnelles sont permises. Le théorème suivant exprime de façon précise cette idée.

THÉORÈME 2.1 ([2], théorème 3.3;3). – <u>Soit</u> K <u>un compact de</u> $\Omega \subset \mathbb{C}$. <u>Alors les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

– K <u>est le seul support</u> $\mathcal{O}(\Omega)$-<u>convexe de toute fonctionnelle analytique</u>

$$T \in \mathcal{O}'(\Omega)$$

<u>dont</u> K <u>est support</u> $\mathcal{O}(\Omega)$-<u>convexe</u> ;

– <u>pour tout ouvert connexe</u> ω <u>tel que</u> $\omega \cap \partial K \neq \emptyset$ <u>et toute composante</u> ω_1 <u>de</u> $\omega \setminus K$, <u>l'intérieur de</u> $K \cup \omega_1$ <u>rencontre</u> ∂K.

Or pour la convexité ordinaire, la situation est différente :

THÉORÈME 2.2. – <u>Toute fonctionnelle</u> $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$, <u>où</u> Ω <u>est un ouvert convexe de</u> $\mathbb{C}$, <u>admet un support convexe unique</u>.

En effet, soit $g(w) = T(z \to (w - z)^{-1})$ <u>la transformée de Borel de</u> T, définie au voisinage de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Omega$. On a

$$T(\varphi) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \varphi(z)\, g(z)\, dz$$

si Γ est une courbe convexe faisant un tour autour des singularités de g. Alors le support convexe de T est "l'enveloppe convexe des singularités de g" qui est un ensemble compact convexe bien défini dans $\mathbb{C}$ bien que "les singularités de g" soient définies sur une surface de Riemann dont une partie variable peut se réaliser dans $\mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, il peut arriver qu'une fonctionnelle ait plusieur supports convexes ; c'est attendu dans la mesure où des "phénomènes polynomialement convexes" dans un espace $\mathbb{C}^n$ peuvent se reproduire comme des "phénomènes convexes" dans un espace de dimension élevée.

Soit $\hat{T} \in \mathcal{O}(\underset{\sim}{C}^n)$ <u>la transformée de Fourier</u> (ou <u>de Laplace</u>) de $T \in \mathcal{O}'(\underset{\sim}{C}^n)$:

$$\hat{T}(\zeta) = T(z \to \exp\langle z, \zeta\rangle) \ , \quad \zeta \in \underset{\sim}{C}^n \ ,$$

où $\langle z , \zeta\rangle = z_1 \zeta_1 + \dots + z_n \zeta_n$. On montre facilement que $\hat{T}$ est de type exponentiel. Plus précisément, soit K un porteur de T ; on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$, en notant B la boule unité de $\underset{\sim}{C}^n$,

$$|T(\varphi)| \leq C_\varepsilon \sup_{z \in K+\varepsilon B} |\varphi(z)| \ , \quad \varphi \in \mathcal{O}(\underset{\sim}{C}^n) \ ,$$

d'où, pour $\varphi(z) = \exp\langle z , \zeta\rangle$,

$$|\hat{T}(\zeta)| \leq C_\varepsilon \exp(H_K(\zeta) + \varepsilon|\zeta|) \ ,$$

où $H_K(\zeta) = \sup_{z \in K} \operatorname{Re}\langle z , \zeta\rangle$, $\zeta \in \underset{\sim}{C}^n$, est la <u>fonction d'appui de</u> K,

$$H_B(\zeta) = |\zeta|$$

celle de B (norme euclidienne). L'<u>indicatrice</u> p_T <u>de</u> T, soit

$$p_T(\zeta) = \lim\sup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|\hat{T}(t\zeta)| \ ,$$

satisfait donc à

$$p_T(\zeta) \leq H_K(\zeta) + \varepsilon|\zeta| \ ,$$

d'où

$$p_T \leq \inf(H_K \ ; \ K \text{ porte } T) \ .$$

Pour montrer une inégalité dans l'autre sens on a besoin du résultat profond suivant :

THÉORÈME 2.3 (EHRENPREIS-MARTINEAU, voir [5], p. 152 ; [1], p. 98). - <u>Soient</u> $T \in \mathcal{O}'(\underset{\sim}{C}^n)$ <u>et</u> K <u>un compact convexe de</u> $\underset{\sim}{C}^n$. <u>Alors</u> K <u>porte</u> T <u>si, et seulement si</u>, $p_T \leq H_K$.

De ce théorème, on peut déduire :

THÉORÈME 2.4 ([3], théorème 5.2). - <u>Si</u> $T \in \mathcal{O}'(\underset{\sim}{C}^n)$, <u>on a</u>

$$p_T^* = \inf(H_K \ ; \ K \text{ porte } T) \ ,$$

où p_T^* est la régularisée supérieure de p_T, soit $p_T^*(\zeta) = \lim\sup_{\theta\to\zeta} p_T(\theta)$.

Le théorème 2.4 entraîne donc à son tour le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.5 ([3], corollaire 5.3). - $T \in \mathcal{O}'(\underset{\sim}{C}^n)$ <u>admet un support convexe unique si, et seulement si</u>, p_T^* <u>est convexe</u>.

Comme la fonctionnelle T, définie par $\hat{T}(\zeta) = \cos\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}$, a l'indicatrice $p_T(\zeta) = |\operatorname{Im}\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}|$ non-convexe, on obtient par là un exemple d'une fonctionnelle ayant plusieurs supports convexes ([2], p. 309).

Il est facile de voir que si p_T^* n'est pas convexe, alors toute majorante convexe minimale de p_T^* est linéaire dans un sous-ensemble convexe de dimension réelle au moins égale à deux. Soit H_K une telle majorante ; il s'ensuit que le compact convexe K a un arrêt. Donc on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.6 ([2], théorème 3.1). - <u>Si la frontière d'un support convexe</u> K <u>de</u> $T \in \mathcal{O}'(\underset{\sim}{C}^n)$ <u>est de classe</u> C^1, <u>alors</u> K <u>est le seul support convexe de</u> T.

MARTINEAU [6] a montré un résultat plus précis. Pour les supports $\mathcal{O}(\Omega)$-convexes un théorème analogue est vrai, cependant la démonstration que je connais est très différente, et l'étude précisée, que MARTINEAU [6] a faite dans le cas convexe, reste à faire.

THÉORÈME 2.7 ([2], théorème 3.2). - <u>Si</u> K <u>est un support</u> $\mathcal{O}(\Omega)$-<u>convexe de</u> $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$, <u>de frontière</u> C^2, <u>et si</u> Ω <u>est d'holomorphie</u>, <u>alors</u> K <u>est le support</u> $\mathcal{O}(\Omega)$-<u>convexe unique de</u> T.

D'autre part, le corollaire 2.5 peut être généralisé en introduisant l'<u>indicatrice générale</u>

$$p_T(\varphi) = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log|T(e^{\varphi})| \ , \quad \varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \ ,$$

(φ linéaire donne l'indicatrice ordinaire). On peut alors démontrer un nouveau théorème.

THÉORÈME 2.8 ([3], corollaire 5.10). - <u>Si</u> Ω <u>est une variété de Stein</u>, $T \in \mathcal{O}'(\Omega)$ <u>admet un seul support</u> $\mathcal{O}(\Omega)$-<u>convexe si, et seulement si,</u> p_T^* <u>est convexe dans</u> $\mathcal{O}(\Omega)$.

Ici $\hat{T}(\varphi) = T(e^{\varphi})$ est une fonctionnelle analytique non linéaire ; c'est la transformée de Laplace (ou de Fourier) non linéaire que j'ai étudiée dans [3]. Une étude systématique des supports des fonctionnelles analytiques non linéaires a été commencée par MARTINEAU dans [7] et [8].

3. Profonctionnelles analytiques en dimension infinie.

Soient E un espace localement convexe complexe, et $(F_j)_{j\in J}$ une <u>bonne famille</u> de sous-espaces de E dans la terminologie de KRÉE [4]. Cela veut dire que

Tout F_j est fermé et de codimension finie ;

Étant donnés j et k dans J, il existe i dans J tel que $F_j \cap F_k \supset F_i$; et

L'intersection des F_j est $\{0\}$.

On note $E_j = E/F_j$ l'espace quotient qui est donc séparé et de dimension finie, et $\pi_j : E \to E_j$ la surjection canonique. On écrit $i \leq j$ si $F_i \supset F_j$, et on définit de façon naturelle $\pi_i^j : E_j \to E_i$ si $i \leq j$; on a alors $\pi_i^j \circ \pi_j = \pi_i$.

Avec $\pi_i^{j*}(\varphi) = \varphi \circ \pi_i^j$, où $\varphi \in \mathcal{O}(E_i)$, et $\pi_j^*(\psi) = \psi \circ \pi_j$ où $\psi \in \mathcal{O}(E_j)$, on obtient pour $i \leq j$:

$$E_i \xleftarrow{\pi_i^j} E_j \xleftarrow{\pi_j} E ,$$

et

$$\mathcal{O}(E_i) \xrightarrow{\pi_i^{j*}} \mathcal{O}(E_j) \xrightarrow{\pi_j^*} \mathcal{O}(E) ,$$

donc

$$E_i' \xrightarrow{\pi_i^{j*}} E_j' \xrightarrow{\pi_j^*} E'$$

s'obtient par restriction. L'application adjointe à π_i^{j*} sera notée

$$\pi_{i*}^j : \mathcal{O}'(E_j) \to \mathcal{O}'(E_i) .$$

Une <u>profonctionnelle analytique</u> $T = (T_j)_{j\in J}$ <u>sur</u> E est, par définition, une famille de fonctionnelles analytiques $T_j \in \mathcal{O}'(E_j)$ qui est cohérente dans le sens habituel, à savoir

$$T_i = \pi_{i*}^j(T_j) = T_j \circ \pi_i^{j*}$$

pour tout i, j avec $i \leq j$.

Un ensemble borné $M \subset E$ sera dit <u>porteur</u> de la profonctionnelle $T = (T_j)$ si l'adhérence de $\pi_j(M)$ porte T_j pour tout $j \in J$ (cf. la définition de supporteur d'une prodistribution due à SCHACHERMAYER [9]). Si c'est le cas, on a

$$p_{T_j}(\zeta) \leq H_{\pi_j(M)}(\zeta) , \quad \zeta \in E_j' .$$

La définition de la fonction d'appui s'étend immédiatement à E :

$$H_M(\zeta) = \sup_{z\in M} \operatorname{Re} \zeta(z) , \quad \zeta \in E' , \quad M \subset E ,$$

et on obtient

(3.1) $$H_M \circ \pi_j^* = H_{\pi_j(M)} \quad \text{sur } E_j' .$$

L'indicatrice p_T de $T = (T_j)$ sera définie par l'équation

(3.2) $$p_T(\pi_j^*(\zeta)) = p_{T_j}(\zeta) , \quad \zeta \in E_j' ,$$

et p_T est par là-même définie sur $E_\infty' = \bigcup \pi_j^*(E_j') \subset E'$, car

$$p_{T_j} \circ \pi_i^{j*} = p_{T_i} \quad \text{si } i \leq j .$$

Avec ces définitions, on obtient

$$p_T(\zeta) \leq H_M(\zeta) \quad \text{pour } \zeta \in E_\infty' ,$$

si T est portée par M. Réciproquement, on peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. - <u>Si</u> M <u>est un sous-ensemble convexe et borné de</u> E, <u>espace localement convexe complexe, et si pour une profonctionnelle analytique</u> T <u>sur</u> E <u>on a</u> $p_T \leq H_M$ <u>dans</u> E_∞', <u>alors</u> T <u>est portée par</u> M.

En effet, si $p_T \leq H_M$ dans E'_∞, on a $p_{T_j} \leq H_{\pi_j(M)}$ dans chaque E'_j (voir (3.1) et (3.2)) et donc, par le théorème 2.3, T_j est portée par le compact $\pi_j(M)$.

Le théorème 3.1 n'est donc qu'une traduction du théorème correspondant en dimension finie. On note qu'aucune condition sur la bonne famille (F_j) n'est nécessaire. L'étude des supports uniques est moins triviale.

THÉORÈME 3.2. - Soient E un espace localement convexe complexe, et (F_j) une bonne famille telle que E'_∞ soit dense dans E' pour la topologie forte $\beta(E', E)$. Soit $T = (T_j)$ une profonctionnelle analytique sur E qui est portée par une partie bornée B de E. Si chaque T_j admet un support convexe compact unique, alors T admet un support convexe fermé et borné unique.

Démonstration. - Soit K_j le support convexe de T_j. Donc $p^*_{T_j} = H_{K_j} \leq H_{\pi_j(B)}$ et, en posant $h_j(\pi^*_j(\zeta)) = H_{K_j}(\zeta)$, $\zeta \in E'_j$, on obtient une famille de fonctions convexes et positivement homogènes sur $\pi^*_j(E'_j) \subset E'_\infty$, qui est de plus croissante pour l'ordre de J ; en effet, $p_{T_i} = p_{T_j} \circ \pi^{j*}_i$ si $i \leq j$ et, en prenant la régularisée supérieure dans les espaces E'_i et E'_j respectivement, on aura

$$p^*_{T_i} \leq p^*_{T_j} \circ \pi^{j*}_i .$$

D'autre part,

$$h_j \circ \pi^*_j = H_{K_j} \leq H_{\pi_j(B)} = H_B \circ \pi^*_j ,$$

ce qui montre que la famille (h_j) est majorée par H_B. La limite $h_\infty = \lim h_j$ existe donc quand j tend vers $+\infty$ pour l'ordre dans J, et h_∞ est une fonction convexe, positivement homogène, définie dans E'_∞ et majorée par H_B. Donc h_∞ est uniformément continue sur E'_∞ pour la topologie sur E' définie par H_B, topologie plus faible que $\beta(E', E)$. La fonction h_∞ admet un prolongement (unique) à E', noté h. Considérons

$$L = \{z \in E \ ; \ \operatorname{Re} \zeta(z) \leq h(\zeta) \ \text{ pour tout } \ \zeta \in E'\} \ ;$$

c'est un sous-ensemble convexe et fermé de E et comme $h \leq H_B$ on voit que L est contenu dans l'enveloppe convexe et fermée de B, d'où L est borné.

Je dis que $\overline{\pi_j(L)} \supset K_j$, d'où L porte T. En effet,

$$H_{K_j} = h_j \circ \pi^*_j \leq h \circ \pi^*_j = H_L \circ \pi^*_j = H_{\pi_j(L)} .$$

Il reste à voir que L est unique : soit M un porteur convexe, fermé et borné de T. Il s'agit de montrer que M contient L. Comme M porte T, $\overline{\pi_j(M)}$ porte T_j, donc $\overline{\pi_j(M)} \supset K_j$ pour tout j. En prenant les fonctions d'appui, nous avons

$$H_M \circ \pi^*_j = H_{\pi_j(M)} \geq H_{K_j} = h_j \circ \pi^*_j$$

d'où

$$H_M \geqslant \lim h_j = h_\infty \quad \text{sur } E'_\infty .$$

Comme M est borné, sa fonction d'appui est uniformément continue pour $\beta(E', E)$, topologie pour laquelle E'_∞ est dense dans E'. Donc $H_M \geqslant h = H_L$ partout dans E' et, finalement, $M \supset L$, ce qui montre que L est le seul support convexe fermé et borné de T.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973.

[2] KISELMAN (C. O.). - On unique supports of analytic functionals, Arkiv for Mat., t. 6, 1965, p. 307-318.

[3] KISELMAN (C. O.). - On entire functions of exponential type and indicators of analytic functionals, Acta Math., t. 117, 1967, p. 1-35.

[4] KRÉE (P.). - Prodistributions, Séminaire Paul Krée : Équations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 2, 14 p.

[5] MARTINEAU (A.). - Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Analyse math., Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[6] MARTINEAU (A.). - Unicité du support d'une fonctionnelle analytique : un théorème de C. O. Kiselman, Bull. Sc. math., Série 2, t. 92, 1968, p. 131-141.

[7] MARTINEAU (A.). - Les supports des fonctionnelles analytiques, Séminaire Pierre Lelong (Analyse), année 1969, p. 175-195. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 116).

[8] MARTINEAU (A.). - Fonctionnelles analytiques non linéaires et représentation de Pólya pour une fonction entière de n variables de type exponentiel, Séminaire Pierre Lelong (Analyse), année 1970, p. 129-165. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 205).

[9] SCHACHERMAYER (W.). - Supporteurs des prodistributions et mesures cylindriques, Séminaire Paul Krée : Équations aux dérivées partielles en dimension infinie, 1re année, 1974/75, n° 3, 8 p.

Christer O. KISELMAN
Dept of Mathematics
University of Uppsala
Sysslomansg. 8
S-75223 UPPSALA (Suède)