BERNARD LASCAR

Théorème de Cauchy-Kovalevsky et théorème d'unicité d'Holmgren pour des fonctions analytiques d'une infinité de variables

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 8, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A8_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 8, 15 p.

THÉORÈME DE CAUCHY-KOVALEVSKY ET THÉORÈME D'UNICITÉ D'HOLMGREN POUR DES FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES

par Bernard LASCAR

0. Énoncé des théorèmes. Notations.

Soit E et F des Banach réels. On note $P_j(E, F)$ les polynômes continus homogènes de degré j sur E à valeurs dans F. On a

$$P_j(E, F) \simeq \mathcal{L}(\hat{\odot}_j E, F)$$

en notant $\hat{\otimes}$ le complété pour la topologie Π.

Soit $A \in \mathcal{L}_j(E, F)$, espace des formes j-linéaires symétriques continues de E dans F, on note

$$\|A\| = \sup_{x_1,\dots,x_j \in E} \frac{\|A(x_1, \dots, x_j)\|}{\|x_1\| \dots \|x_j\|} \quad \text{et} \quad \|\hat{A}\| = \sup_{x \in E} \frac{\|A(x, \dots, x)\|}{\|x\|^j} .$$

On sait que l'on a (voir NACHBIN [7]) :

$$\|\hat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{j^j}{j!} \|\hat{A}\| .$$

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $f : \mathcal{U} \to F$. On dit que $f \in \mathcal{a}(\mathcal{U}, F)$, espace des fonctions $\underset{\sim}{R}$ analytiques de $\mathcal{U}$ dans F, si, et seulement si, $\forall x_0 \in \mathcal{U}$ $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(x_0, r)$, la série

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_0) \cdot (x - x_0)$$

converge uniformément dans $B(x_0, r)$ vers f et où $f_j(x_0) \in P_j(E, F)$. Cette condition implique que f admet un prolongement holomorphe dans un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ et donc que l'on a

$$\|\hat{D}^j f(x_0)\|/j! = \|\hat{f}_j(x_0)\| \leq \rho^j C \quad \text{avec } \rho > 0 , \ \forall j .$$

Réciproquement, cette inégalité implique la convergence uniforme dans la boule $B(x_0, r')$, $r' < \frac{1}{\rho}$.

On dira qu'un opérateur différentiel sur E est à coefficients analytiques dans $\mathcal{U}$ s'il s'écrit

$$P(x, D)\, u = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) \cdot D^j u , \text{ où } a_j(x) \in \mathcal{a}(\mathcal{U}, (P_j(E))') ;$$

le dual $(P_j(E))'$ de $P_j(E)$ est muni de sa topologie forte, il est clair, dans ces conditions, que $P(x, D)$ agit sur les fonctions $C^m(\mathcal{U})$ (Fréchet différentiables), et applique $C^{m+k}(\mathcal{U})$ dans $C^k(\mathcal{U})$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> S <u>une hypersurface analytique ; soit</u> $x_0 \in S$ <u>et</u> $\mathcal{U}$ <u>un</u>

voisinage de x_0. Soit $P(x, D)$ un opérateur à coefficients analytiques dans $\mathcal{U}$. On suppose que S est non caractéristique pour P en x_0. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} P(x, D)\, u = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u = \varphi^j \quad \text{sur } S, \quad 0 \leq j \leq m-1 . \end{cases}$$

a une solution analytique unique dans un voisinage de x_0 pour $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, $\varphi^j \in \mathcal{A}(\mathcal{U} \cap S)$; $\partial/\partial\nu$ représente un champ de vecteur analytique transverse à S.

On suppose maintenant que l'on a $E' \xhookrightarrow{i'} X \xhookleftarrow{i} E$ avec les hypothèses de [4], on a alors le théorème d'unicité sous la forme suivante. Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel sur E qui s'écrit

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^m a_j(x).D^j u \quad \text{avec} \quad a_j \in \mathcal{A}(\mathcal{U}, (P_j(E'))'),$$

ce qui signifie une hypothèse restrictive sur les coefficients.

THÉORÈME 2. - Soit S une hypersurface de classe C^{m+1} de E. Soit $P(x, D)$ un opérateur à coefficients analytiques dans un voisinage $\mathcal{U}$ de $x_0 \in S$, on suppose que S est non caractéristique pour P en x_0 et que

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^m a_j(x)\, D^j \quad \text{avec} \quad a_j(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{U}, (P_j(E'))').$$

Soit $u \in K^m(\mathcal{U})$ (voir [5]).

- $P(x, D)\, u = 0$ dans $\mathcal{U}$

- $u = 0$ dans $S^- \cap \mathcal{U}$, alors il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ voisinage de x_0 tel que $u = 0$ dans $\mathcal{V}$.

On remarque que ce théorème s'applique en particulier aux fonctions de $C^m(\mathcal{U})$.

1. Théorème de Cauchy-Kovalevsky.

Nous montrons d'abord une forme plus particulière du théorème dans laquelle S est un hyperplan fermé de E, que nous noterons H, d'équation $t = 0$, de sorte que

$$E = \mathbb{R} \oplus H, \quad x = (t, x'), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x' \in H, \quad x_0 = 0$$

et

$$P(x, D) = \sum_{0 \leq j+k \leq m} a^{j,k}(x) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k D^j_{x'} u, \text{ où } a^{j,k}(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{U}, (P_j(H))').$$

H, non caractéristique pour P, s'exprime par $a^{0,m}(0, x') \neq 0$ pour $x' \in \mathcal{U} \cap H$; on supposera donc $a^{0,m} = 1$, $\forall\, x \in \mathcal{U}$, ce qui n'est pas restrictif quitte à diminuer $\mathcal{U}$.

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, on écrit

$$f(x) = \sum_{j,r \in \mathbb{N}} f_{j,r}(x')\, t^r, \text{ où } f_{j,r} \in P_j(H) ;$$

alors, $\exists\, L \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que $\|f_{jr}\| \leq L^{j+r+1}$: développement de Taylor en $0 \in \mathcal{U}$.

Soit $\varphi^j \in \mathcal{a}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap H$, $0 \leq j \leq m-1$, on écrit

$$\varphi^j(x) = \sum_{\ell \in \underset{\sim}{N}} \varphi^j_\ell(x'), \quad \varphi^j_\ell \in P_\ell(H)$$

et $\exists\, M > 0$ tel que $\|\varphi^j_\ell\| \leq M^{\ell+1}$, $0 \leq j \leq m-1$.

On écrit également :

$$a^{j,k} = \sum_{\ell,p} a^{j,k}_{\ell,p}(x')\, t^p \quad \text{avec} \quad a^{j,k}_{\ell,p} \in P_\ell(H, P_j(H)').$$

et

$$\|a^{j,k}_{\ell,p}\| \leq N^{\ell+p+1}.$$

Le théorème 1, énoncé ci-dessus, prend la forme suivante.

THÉORÈME 1. - Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques comme dans [1] tel que l'hyperplan H ne soit pas caractéristique pour P, alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} P(x, D)\, u = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x', 0) = \varphi^j(x'), \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

a une solution analytique unique dans un voisinage de zéro.

Démonstration. - On va montrer que le problème a une solution unique en séries formelles puis que la série formelle converge dans un voisinage de 0.

On écrit

$$u = \sum_{\ell,p} u_{\ell p}(x')\, t^p \quad \text{avec} \quad u_{\ell,p}(x') \in P_\ell(H).$$

On a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k D^j_{x'}\, u = \sum_{\ell,p} D^j_{x'}\, u_{\ell p}(x')\, t^{p-k} \frac{p!}{(p-k)!}$$

avec

$$D^j_{x'}\, u_{\ell p}(x')\, h^j = \frac{\ell!}{(\ell-j)!}\, u_{\ell p}(x'^{\ell-j}, h^j),$$

d'où

$$Pu = \sum_{0 \leq j+k \leq m} \sum_{\ell,p,\ell',p'} a^{j,k}_{\ell,p}(x') \cdot D^j_{x'}\, u_{\ell',p'}\, t^{p+p'-k} \frac{p'!}{(p'-k)!} = \sum_{j,r} f_{j,r}(x')\, t^r.$$

Or, pour $j = 0$, $k = m$, on a $a^{0,m}(x) = 1$, d'où

$$\sum_{\ell,p} u_{\ell,p+m}(x') \frac{(p+m)!}{p!}\, t^p =$$

$$= \sum_{j,r} f_{jr}(x')\, t^r - \sum_{k<m} \sum_{\ell,p,\ell',p'} a^{jk}_{\ell p}\, D^j_{x'}\, u_{\ell',p'+k}\, t^{p+p'} \frac{(p'+k)!}{p'!}.$$

Or on a

$$j!\, u_{\ell,j} = \varphi^j_\ell, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad \ell \in \underset{\sim}{N},$$

d'où, par récurrence sur p, on voit que la forme ci-dessus permet de déterminer d'une manière unique les $u_{\ell,p}$ pour $\ell \in \underset{\sim}{N}$, $p \in \underset{\sim}{N}$, et on a :

$$u_{\ell,p+m}(x') \frac{(p+m)!}{p!} = f_{\ell p}(x')$$

$$- \sum_{k<m,j} \sum_{\ell'+\ell''-j=\ell, q+r=p, \ell''\geq j} a^{jk}_{\ell' q}(x') \, u_{\ell'', r+k}(x'^{\ell''-j}, \cdot) \frac{(r+k)!}{r!} \frac{\ell''!}{(\ell''-j)!} .$$

On va montrer que l'on peut choisir M_1 et M_2 de sorte que

$$\|u_{\ell p}\| \leq M_1^{\ell+1} \frac{(\ell+p)!}{\ell!\, p!} M_2^p .$$

Pour $0 \leq p \leq m-1$, cela est évident ; et supposons qu'on ait vérifié cette inégalité jusqu'à l'ordre $p+m-1$, il faut alors montrer que

$$(*) \quad 1 \geq \frac{\ell!\, p!}{(p+\ell+m)!} L^{\ell+p+1} M_1^{-\ell-1} M_2^{-p-m} + \sum_{k<m, \ell', \ell'', q, r} N^{\ell'+q+1} M_1^{j-\ell'} M_2^{r+k-p-m}$$

$$\times \frac{(\ell''+r+k)!}{\ell''!(r+k)!} \frac{(r+k)!}{r!} \frac{\ell''!}{(\ell''-j)!} \frac{p!\, \ell!}{(p+\ell+m)!}$$

avec

$$\begin{cases} q+r=p \\ \ell'+\ell''-j=\ell . \end{cases}$$

On a utilisé le lemme suivant.

LEMME. – <u>La forme ℓ linéaire symétrique associée au polynôme</u>

$$x' \to a^{j,k}_{\ell' q}(x') \, u_{\ell'' r+k}(x'^{\ell''-j}, \cdot) = P_\ell(x')$$

<u>vérifie</u>

$$\|P_\ell\| \leq \|u_{\ell'', r+k}\| \, \|a^{jk}_{\ell' q}\| .$$

<u>Preuve du lemme</u>. – Soit $x'_1, \dots, x'_{\ell'}, x'_{\ell'+1}, \dots, x'_{\ell'+\ell''-j}$ une famille de ℓ vecteurs de H ; on note que

$$P_\ell(x'_1, \dots, x'_\ell) = \frac{1}{\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} a(x'_{\sigma(1)}, \dots, x'_{\sigma(\ell')}) \, (h \to u_{\ell''}(\overbrace{h, \dots, h}^{j}, x'_{\sigma(\ell'+1)}, \dots, x'_{\sigma(\ell'+\ell''-j)}))$$

et donc

$$|P_\ell(x'_1, \dots, x'_\ell)| \leq \frac{1}{\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} (\sup_{y_1, \dots, y_{\ell'}} \frac{\|a(y_1, \dots, y_{\ell'})\|}{\|y_1\| \cdots \|y_{\ell'}\|} (P_j(H))')$$

$$\times \|x'_{\sigma(1)}\| \cdots \|x'_{\sigma(\ell')}\| \times \|u_{\ell''}\| \times \|x'_{\sigma(\ell'+1)}\| \cdots \|x'_{\sigma(\ell'+\ell''-j)}\| .$$

D'où le lemme.

On constate que l'on a

$$\frac{\ell!\, p!\, (\ell''+r+k)!}{(\ell+p+m)!\, r!\, (\ell''-j)!} \leq 1 ,$$

et comme pour vérifier $(*)$ il suffit d'avoir

$$1 \geq \frac{\ell!\, p!}{(\ell+p+m)!} L^{\ell+p+1} M_1^{-\ell-1} M_2^{-p-m} + C \sum_{k<m} \sum N^{\ell'+q+1} M_1^{j-\ell'} M_2^{r+k-p-m} .$$

On choisit M_1 et M_2 assez grand pour que

$$\left(\frac{L}{M_1}\right)^{\ell+1} \left(\frac{L}{M_2}\right)^{p} M_2^{-m} \leq \frac{1}{2}$$

et

$$\sum_{\ell',q} \left(\frac{N}{M_1}\right)^{\ell'} \left(\frac{N}{M_2}\right)^{q} \leq 2 ,$$

ce qui est toujours possible, et pour réaliser (*) il suffit maintenant d'avoir

$$CN \sum_{k<m,j} M_2^{k-m} M_1^{j} \leq \frac{1}{4}$$

ce qui est possible si on choisit M_2 assez grand par rapport à M_1 .

Remarque. – Le rayon de convergence de la solution ne dépend que de celui des coefficients et des données.

Regardons maintenant comment se transforme par difféomorphismes analytiques notre condition sur l'opérateur $P(x , D)$.

Soit

$$P(x , D)\, u = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\, D^j u \quad \text{avec} \quad a_j(x) \in (P_j(E))' .$$

Nous dirons que la surface $S = \{x ; \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ est non caractéristique au point x_0 si $N = \varphi'(x_0) \in E'$, on a

$$a_m(x_0)\, (N \otimes N \otimes \cdots \otimes N) \neq 0 .$$

Vérifions que cette condition correpond à la condition donnée en (1) si $S = H$, $E = \underset{\sim}{R} \oplus H$ et $N = (1 , 0) = e_1$.

On définit un isomorphisme Φ : $P_j(E)$ sur $\prod_{\ell=0}^{j} P_\ell(H)$ de la manière suivante : $u \to (u_\ell , \ 0 \leq \ell \leq j)$ par :

$$u_\ell(x') := u(e_1^{j-\ell} , x')$$

et on a

$$u(t , x') = \sum_{\ell=0}^{j} \frac{j!}{\ell!\,(j-\ell)!}\, t^{j-\ell}\, u_\ell(x') .$$

Par cet isomorphisme, on fait correspondre à $D^j u$ les $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k D^\ell_{x'} u$ pour $\ell + k = j$. Par transposition, on a une bijection de

$$\Psi = \Phi'^{-1} (P_j(E))' \quad \text{sur} \quad \prod_{\ell=0}^{j} (P_\ell(H))' .$$

On suppose $x_0 = 0$, on pose $H = \ker \varphi'(0)$, hyperplan fermé. Soit $e_1 \notin H$, on a $E = \underset{\sim}{R}\, e_1 \oplus H$ somme directe topologique ; l'applicetion

$$\alpha : \alpha(x) = (\varphi(x) - \varphi(0))\, e_1 + x' \quad \text{si} \quad x = te_1 + x' ,$$

est un difféomorphisme analytique dans un voisinage de zéro qui transforme la surface S en l'hyperplan $t = 0$. Soit $u \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, on pose $v = u \circ \alpha^{-1}$; on a

$$v \in \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{U}}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathcal{U}} = \alpha(\mathcal{U}) .$$

Si $\mathcal{U}$ est assez petit, on pose

$$Qv(y) = Pu = P(v \circ \alpha) = \Sigma_{j=0}^{m} a_j(\alpha^{-1}(y))\, D^j(v \circ \alpha) ,$$

or

$$D^j(v \circ \alpha) = \Sigma_{k=1\ldots j, j_1+\ldots+j_k=j} \frac{j!}{k!\, j_1! \ldots j_k!} D^k v(y)\, (D^{j_1} \alpha , \ldots , D^{j_k} \alpha) .$$

Soit

$$a_j D^j(v \circ \alpha) = \Sigma_{k=1}^{j} a'_{j,k}(y)\, D^k v(y) \quad \text{avec} \quad a'_{j,k}(y) \in (P_k(E))' ,$$

défini par

$$a'_{j,k}(y)\, v_k = a_j(\alpha^{-1}(y))\, (h \to \Sigma_{j_1+\ldots+j_k=j} \frac{j!}{k!\, j_1! \ldots j_k!} v_k(D^{j_1} \alpha\, h^{j_1},\ldots,D^{j_k} \alpha\, h^{j_k})) .$$

Seule nous intéresse, en fait, la partie principale de Q qui est

$$a'_m(y)\, D^m v \quad \text{avec} \quad a'_m(y)\, v_m = a_m(\alpha^{-1}(y))\, (v_m \circ D\alpha(\alpha^{-1}(y))) \quad \text{pour} \quad v_m \in P_m(E)$$

et on note $v_m \circ D\alpha$ l'application $h \to v_m(D\alpha(\alpha^{-1}(y))\, h)$. On a donc :

$$a_m(0)\, (N \otimes \ldots \otimes N) = a'_m(0)\, ((N \otimes \ldots \otimes N) \circ (D\alpha)^{-1}(0))$$

et, si on écrit $h = te_1 + h'$, on a

$$(N | (D\alpha)^{-1}(0)\, h) = t$$

et

$$(D\alpha)(0)\, k = \theta(\varphi'(0)\, e_1)\, e_1 + k' \quad \text{si} \quad k = \theta e_1 + k' ;$$

donc si $\varphi'(0)\, e_1 = 1$, on a $(D\alpha)(0) = Id$, et donc

$$\Psi_m(a'_m(0)) = a_m(0)\, (N \otimes \ldots \otimes N) \neq 0 ,$$

ce qui signifie que si S est non caractéristisque pour P , alors $\Psi_m(a'_m(0))$ qui représente le coefficient du terme $(\frac{\partial}{\partial t})^m$ dans $Q(0 , D)$ est non nul, donc on a la condition du théorème 1. Si $\frac{\partial}{\partial \nu}(x)$ est un champ de vecteur analytique transverse à H en 0 , c'est-à-dire $N \frac{\partial}{\partial \nu}(0) \neq 0$, il est clair qu'on peut trouver un difféomorphisme analytique dans un voisinage de zéro $\beta(x)$ tel que

$$\beta'(x) \frac{\partial}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial t} ,$$

$\beta(x)$ conserve en outre la surface $t = 0$.

THÉORÈME 1'. - Soit S une hypersurface analytique, et soit $P(x , D)$ un opérateur à coefficients analytiques tel que S soit non caractéristique pour P , alors le problème de Cauchy :

$$\left| \begin{array}{l} P(x , D)\, u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{U} \\ (\frac{\partial}{\partial \nu})^j\, u = \varphi^j \quad \text{sur} \quad S , \quad u \leq j \leq m - 1 \end{array} \right.$$

a une solution analytique unique dans un voisinage de zéro par des données analytiques, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ étant un champ de vecteur analytique transverse à S .

Nous allons maintenant donner un résultat d'unicité qui est analogue au théorème d'Holmgren. Ce théorème utilise une transposition des opérateurs ; en dimension infinie, nous utiliserons la transposition par rapport à la mesure gaussienne et donc nous devons nous placer dans le cas plus précis de [5] et [6], dont nous utiliserons aussi les résultats géométriques. Il faut souligner également que nous serons contraints de faire des hypothèses plus restrictives sur les coefficients, que celles du théorème 1'.

On considère un triplet $E' \overset{i'}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookrightarrow} E$; E et X sont des Hilbert, i et i' sont des injections à image dense, et sont radonifiantes. On désignera par ν la probabilité de Radon sur E, image par i de la mesure cylindrique gaussienne centrée de X. On désigne par $\hat{\otimes}$ les produits tensoriels projectifs et par $\hat{\otimes}^2$ les produits tensoriels hilbertiens. $\|x\|$, $|x|$, $\|x\|'$ désigne les normes des espaces E, X, E'.

Au théorème 1, on avait

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D^j u$$

où $a_j \in \mathcal{A}(\mathcal{U}, (P_j(E))')$, où $P_j(E) \simeq (\hat{\odot}_j E)'$ $(P_j(E))'$ dual fort.

D'une manière plus générale, si u est C^∞, Fréchet différenciable sur E à valeurs dans un Banach F, on a

$$D^j u \in P_j(E, F) \simeq \mathcal{L}_b(\hat{\odot}_j E, F)$$

isomorphisme topologique.

Nous aurons besoin de faire des hypothèses plus restrictives pour obtenir que $P^*(x, D)$, adjoint de P par le produit scalaire de L^2_ν, est un opérateur à coefficients analytiques de la forme ci-dessus. On prend

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D^j u \quad \text{avec} \quad a_j \in \mathcal{A}(\mathcal{U}, (P_j(E'))') .$$

$a_j(x) D^j u$ est défini par l'action de $a_j(x) \in (P_j(E'))'$ sur la restriction à $E' \times E' \times \dots \times E'$ de l'application j-linéaire $D^j u(x)$ qui est bien E'-continue.

Nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 1. – <u>Soit l'application</u> $x \to \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$ <u>de</u> $E' \to \underset{\sim}{R}^+$ <u>qui est différentiable, on peut donc définir, pour</u> $x \in E'$,

$$H_j(x) = (-1)^j (\exp(\tfrac{1}{2}|x|^2))(D^j \exp(-\tfrac{1}{2}(x)^2))$$

<u>qui est dans</u> $P_j(E')$, <u>alors l'application</u> $x \to H_j(x)$ <u>de</u> $E' \to P_j(E')$ <u>se prolonge par continuité en une application</u> $E \to P_j(E')$ <u>qui est analytique</u>.

<u>Démonstration du lemme 1</u>. – On a

$$\exp(-\tfrac{1}{2}|x+h|^2) = \exp(-\tfrac{1}{2}|x|^2) \sum_j (-1)^j \frac{H_j(x)}{j!} h \quad \text{pour } x \in E', \ h \in E'$$

d'où :

$$\frac{(-1)^j}{j!} H_j(x) h = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1, z \in \underset{\sim}{C}} (\exp((-z^2 |h|^2)/2 - z(x|h)))/z^{j+1} \, dz , \quad x \in E', \quad h \in E'.$$

Le produit $(x|h)$ désigne le produit $E' \times E$ qui prolonge le produit scalaire de X. Donc, pour $x \in E$, l'application $h \to (x|h)$ est continue sur E' et donc, si $x_n \in E'$, $x_n \to x$ dans E, alors $H_j(x_n)\,h$ convergeant uniformément sur la sphère unité de E', limite $H_j(x)\,h$, qui est aussi un polynôme de $d^0\, j$ sur E'. Montrons que cette application est analytique sur E à valeur dans $P_j(E')$, soit $D^k\, H_j(x)\, y$ est

$$h \to \frac{j!}{(j-k)!}\, H_{j-k}(x) . h(y|h)^k$$

pour $y \in E$, $h \in E'$, pour $k \leq j$, 0 sinon, et on a donc

$$\|D^k\, H_j(x)\|_{P_k(E, P_j(E'))} \leq \frac{j!}{(j-k)!}\, \|H_{j-k}(x)\|_{P_{j-k}(E')} .$$

Ceci achève la démonstration de ce lemme. Nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION. - <u>Soit</u> $a_j \in \mathcal{a}(\mathcal{U}, (P_j(E'))')$, <u>alors</u>

(*) $$\operatorname{div}_j(a_j\, u) = \sum_{k=0}^{j} b_k(x)\, D^k\, u \quad \underline{\text{avec}} \quad b_k(x) \in \mathcal{a}(\mathcal{U}, (P_k(E'))')$$

<u>et</u>

$$b_k(x) = \sum_{i=0}^{j-k} \frac{j!}{(j-k-i)!\; k!\; i!}\, (-1)^{k+i}\, tr_i(D^i\, a_j(x)\, H_{j-k-i}(x)) .$$

<u>Démonstration</u>. - La démonstration se fait en deux parties, nous allons d'abord montrer que $b_k(x)$ défini par

$$\sum_{i=0}^{j-k} \frac{j!}{(j-k-i)!\; k!\; i!}\, (-1)^{k+i}\, tr_i(D^i\, a_j(x)\, H_{j-k-i}(x))$$

est dans $\mathcal{a}(\mathcal{U}, (P_k(E'))')$, puis que l'on a effectivement

$$\operatorname{div}_j(a_j\, u) = \sum_{k=0}^{j} b_k(x)\, D^k\, u .$$

Soit $v \in P_k(E')$, nous allons montrer que $|b_k(x)\, v| \leq C\, \|v\|_{P_k(E')}$, ce qui montrera que $b_k \in (P_k(E'))'$. Comme en vertu du lemme 1 on a $H_{j-k-i}(x) \in P_{j-k-i}(E')$, le produit $v \times H_{j-k-i}(x) \in P_{j-i}(E')$, d'autre part $D^i\, a_j(x) \in \mathcal{L}(\hat{\odot}_i\, E, (P_j(E'))')$, et on peut donc définir $D^i\, a_j(x)\, (H_{j-k-i}(x)\, v)$ comme élément de

$$\mathcal{L}(\hat{\odot}_i\, E, (P_i(E'))')$$

par

$$u \in P_i(E') : \; u \to D^i\, a_j(x)\, H_{j-k-i}(x)\, (vu) ,$$

car $H_{j-k-i}\, vu \in P_j(E')$, et donc $\forall\, h\ \hat{\odot}_i\, E$, on peut définir

$$\langle D^i\, a_j(x)\, h , H_{j-k-i}\, vu\rangle_{(P_j(E'))' \times P_j(E')} ,$$

et cette application est bien continue, car

$$\sup_{h \in \hat{\odot}_i E,\, u \in P_i(E')} |\langle D^i\, a_j(x)\, h , H_{j-k-i}\, vu\rangle|$$

$$\leq \|D^i\, a_j(x)\|_{\mathcal{L}(\hat{\odot}_i E, (P_j(E'))')} \times \|v\|_{P_j(E')} .$$

Soit $\alpha v = D^i\, a_j(x)\ (H_{j-k-i}(x)\ v)$; $\alpha v \in \mathcal{L}(\hat{\odot}_i E\ ,\ (P_i(E'))')$, on définit enfin $tr_i\ \alpha$ comme la trace de l'application

$$\beta v\ :\ \beta v = \alpha v \circ \hat{\odot}_i\, j$$

$$\beta v\ :\ \hat{\odot}_i E' \xrightarrow{\hat{\odot}_i j} \hat{\odot}_i E \xrightarrow{\alpha v} (P_i(E'))' = (\hat{\odot}_i E')'' .$$

Or comme l'injection $E' \xrightarrow{j} E$ est nucléaire (comme composée de deux Hilbert-Schmidt), l'application βv est donc nucléaire, et on a

$$\beta v \in (\hat{\odot}_i E')' \hat{\otimes} (\hat{\odot}_i E')'' ,$$

et $tr_i\ \beta v$ est donc l'image de βv par la forme linéaire sur

$$(\hat{\odot}_i E')' \hat{\otimes} (\hat{\odot}_i E')''$$

correspondant à la forme bilinéaire continue de dualité entre $(\hat{\odot}_i E')'$ et $((\hat{\odot}_i E')')'$ (*). Finalement $v \to tr_i(\alpha v)$ est une forme linéaire continue sur $P_k(E')$, donc un élément de $(P_k(E'))'$ que l'on note $tr_i(D^i\ a_j(x)\ H_{j-k-i}(x))$; donc,

$$\forall\ x \in \mathcal{U}\ ,\ \ b_k(x) \in (P_k(E'))' ;$$

le fait que la dépendance en x soit analytique résulte du simple fait que l'on a composé, pour obtenir $b_k(x)$, des fonctions analytiques en x à certaines applications linéaires continues, soit $b_k(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{U}\ ,\ (P_k(E'))')$. Il faut maintenant justifier cette expression de $b_k(x)$.

Supposons choisie une base orthonormale de $X(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ comme dans [5]. On note e_δ l'élément de $P_i(E')$ associé au polynôme $k \in E' \rightsquigarrow k_1^{\delta_1} \dots k_n^{\delta_n} = k^\delta$, $|\delta| = i$ si $\delta = (\delta_1\ ,\ \dots\ ,\ \delta_n\ 0\ ,\ \dots\ 0\ \dots)$, on note que $\|e_\delta\|_{P_i(E')} \leq 1/a^\delta$. De même,

$$e_\delta \in \hat{\odot}_i E ,$$

et on note

$$(\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\ a(x) = D^i\ a(x)\ e_\delta \quad \text{pour} \quad a(x) \in C^i(E\ ,\ F) .$$

L'élément $D^i\ a_j(x) \in \mathcal{L}^1(\hat{\odot}_i E'\ ,\ (P_j(E'))')$ s'écrit :

$$D^i\ a_j(x) = \Sigma_{|\delta|=i} \frac{|\delta|!}{\delta!}\ e_\delta \otimes (\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\ a_j(x) ,$$

où la somme converge dans $P_i(E') \hat{\otimes} (P_j(E'))'$.

Le fait que cette somme converge dans $P_i(E') \hat{\otimes} (P_j(E'))'$ résulte de ce que $\|e_\delta\|_{P_i(E')} \leq 1/a^\delta$, $\|(\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\ a_j(x)\|_{(P_j(E'))'} \leq C/a^\delta$, et que $\Sigma_\delta\ 1/a^{2\delta} < \infty$. La limite est bien $D^i\ a_j(x)$ car, si $k \in E'$,

$$k = \Sigma_{i=1}^q\ k_i\ e_i\ ,\quad \otimes_i\ k = \Sigma_{|\delta|=i,\ \text{son fini}} \frac{|\delta|!}{\delta!}\ k^\delta\ e_\delta ,$$

et donc

$$D^i\ a_j(x)\ k = \Sigma_{|\delta|=i,\ \text{finie}} \frac{|\delta|!}{\delta!}\ k^\delta\ (\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\ a_j(x) = \Sigma_{|\delta|=i} \frac{|\delta|!}{\delta!}\ (e_\delta\,|\otimes_i\ k)(\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\ a_j(x).$$

(*) Voir la note page 14.

βv s'écrit donc $\beta v = \sum_{|\delta|=i} \frac{|\delta|!}{\delta!} e_\delta \otimes q_\delta$, où q_δ est l'élément de $(P_i(E'))'$ déterminé par

$$u \in P_i(E') \to q_\delta(u) = (\frac{\partial}{\partial x})^\delta a_j(x) \; (H_{j-k-i}(x) \; vu) .$$

Donc

$$tr_i \; \beta v = \sum_{|\delta|=i} \frac{|\delta|!}{\delta!} (\frac{\partial}{\partial x})^\delta a_j(x) \; (H_{j-k-i}(x) \; v \; e_\delta) .$$

On remarque que lorsque $a_j(x)$ est cylindrique, ayant pour base le sous-espace vectoriel, engendré par $X_q = \{e_1, \dots, e_q\}$, σ_q projection orthogonale $X \to X_q$, $\sigma_q(x) = \sum_{i=1}^q (x|e_i) \; e_i$, $a_j(x) = \tilde{a}_j(\sigma(x))$, $\mathfrak{I}_q = \{(\delta_1, \dots, \delta_q, 0, 0, \dots)\}$, $tr_i(\beta v)$ s'écrit :

$$tr_i(\beta v) = \sum_{\delta\in\mathfrak{I}_q, |\delta|=i} \frac{|\delta|!}{\delta!} (\frac{\partial}{\partial x})^\delta \tilde{a}_j(\sigma(x)) \; (H_{j-k-i}(x) \; v \; e_\delta) .$$

Soit $x_0 \in E$, on détermine un voisinage V de x_0 tel que

$$\sup_{x\in V} \|D^i \; a_j(x)\| \leq C , \quad 0 \leq i \leq m ,$$

soit φ égale à 1 dans un voisinage de x_0 à support dans V, $\varphi \in C_b^\infty(E)$, $a_j'(x) = \varphi(x) \; a_j(x)$ vérifie $\sup_{x\in E} \|D^i \; a_j'(x)\| \leq C$, $0 \leq i \leq m$.

La fonction $a_j'(x)$ détermine par restriction aux éléments de $\hat{\odot}_j^2 X$ une fonction de $C_b^m(E, \hat{\odot}_j^2 X)$. L'application $u \in K^m \to div_j(a_j' \; u)$ est continue de K^m dans K^{m-j} d'après [5]. Nous allons voir que $div_j(a_j' \; u)$ est donné par (*) (a' remplaçant a). Pour cela, on considère d'abord le cas où $a_j'(x)$ est une fonction cylindrique de base X_q. Soit u et v des fonctions C_b^∞ cylindriques de base X_q.

$$\int div_j(a_j' \; u) \; v \; d\nu = (-1)^j \int u(x) \; a_j'(x) \; D^j \; v(x) \; d\nu(x) .$$

Ecrivant $D^j \; v = \sum_{|\alpha|=j, \alpha\in\mathfrak{I}_q} \frac{j!}{\alpha!} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \; v(x) \; e_\alpha$, on a

$$\int div_j(a_j' \; u) \; v \; d\nu = (-1)^j \sum_{|\alpha|=j, \alpha\in\mathfrak{I}_q} \frac{j!}{\alpha!} \int u(x) \; (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \; v \; a_j'(x) \; e_\alpha \; d\nu(x)$$

$$= \sum_{|\alpha|=j, \alpha\in\mathfrak{I}_q} \sum_{\alpha=\beta+\gamma+\delta} \frac{j!}{\beta! \; \gamma! \; \delta!} \int (\frac{\partial}{\partial x})^\delta \; a_j'(x) \; e_\alpha \; (\frac{\partial}{\partial x})^\beta \; u \; (-1)^{|\gamma|} \; H_\gamma(x) \; v \; d\nu(x) .$$

Soit $|\beta| = k$, $|\gamma| = j - k - i$, $|\delta| = i$; comme

$$D^k \; u(x) = \sum_{\beta\in\mathfrak{I}_q, |\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} (\frac{\partial}{\partial x})^\beta \; u \; e_\beta$$

et que $e_\alpha = e_\beta \; e_\gamma \; e_\delta$, on a

(*') $(-1)^j \int div_j(a_j' \; u) \; v \; d\nu$

$$= \sum_{i=0}^{j-k-i} \frac{j!}{i!k!(j-k-i)!} (-1)^{k+i} \sum_{\delta\in\mathfrak{I}_q, |\delta|=i} \frac{i!}{\delta!} \int (\frac{\partial}{\partial x})^\delta \; a_j'(x) (H_{j-k-i}(x) \circ \sigma_q D^k u e_\delta) v \; d\nu,$$

où on a noté

$$H_{j-k-i}(x) \circ \sigma_q = \Sigma_{|\gamma|=j-k-i,\gamma\in\mathfrak{I}_q} \frac{|\gamma|!}{\gamma!} H_\gamma(x)\, e_\gamma = (-1)^{j-k-i} e^{\frac{1}{2}(\sigma(x))^2}\, D^j(e^{-\frac{1}{2}(\sigma(x))^2})$$

est le polynôme obtenu par

$$h \to H_{j-k-i}(x)(\sigma_q(h)) = H_{j-k-i}(\sigma_q(x))\,(\sigma_q(h)) .$$

Nous n'avons pas tout à fait obtenu (*), et on a donc

$$H_j(x) = \Sigma_{p=0}^{j} \frac{j!}{(j-p)!\,p!}\, H_{j-p}(x) \circ \sigma\, H_p(x) \circ (1-\sigma) ,$$

à cause de la formule de Leibnitz. D'où

$$H_j(x) \circ \sigma = H_j(x) - \Sigma_{p\neq 0} \frac{j!}{(j-p)!\,p!}\, H_{j-p} \circ \sigma\, H_p \circ (1-\sigma) .$$

Donc

$$\int (\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\, a_j'(x)(D^k u\, e_\delta\, H_{j-k-i}(x) \circ \sigma) v\, d\nu = \int (\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\, a_j'(x)(D^k u\, e_\delta\, H_{j-k-i}(x)) v\, d\nu$$

$$+ \Sigma_{p\neq 0} C_p \int (\tfrac{\partial}{\partial x})^\delta\, a_j'(x)(D^k u(x)\, e_\delta\, H_{j-k-i} \circ \sigma\, H_p \circ (1-\sigma)) v\, d\nu .$$

Comme

$$H_\ell(x) \circ \sigma = H_\ell(\sigma(x)) \circ \sigma \quad \text{et} \quad H_{\ell'}(x) \circ (1-\sigma) = H_{\ell'}((1-\sigma)(x)) \circ (1-\sigma) .$$

Pour passer de (*') à (*), il suffit de voir que si $p \neq 0$ et si

$$x \to \lambda_p(\sigma(x)) \in (P_p(E'))' ,$$

où λ_p fonction régulière de x à valeurs dans $(P_p(E'))'$, alors

$$\int \lambda_p(\sigma(x))\, (H_p(x) \circ (1-\sigma))\, d\nu(x) = 0 ,$$

vu la remarque ci-dessus, cela est équivalent, via FUBINI, à prouver que

$$\int \lambda_p\, H_p(x)\, d\nu(x) = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq 0 , \quad \lambda_p \in (P_p(E'))' .$$

Cela résulte des faits suivants : soit σ_n, suite de projecteurs orthogonaux sur $\{e_1, \dots, e_n\}$, $H_p(x^n) \to H_p(x)$ dans $P_p(E')$ à cause du lemme 1, $x^n = \sigma_n(x)$, et de plus $\|H_p(x)\|_{P_p(E')} \leq C(1 + \|x\|^2)^{p/2}$; il résulte du théorème de Lebesgue que

$$\int \lambda_p\, H_p(x)\, d\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \lambda_p\, H_p(x^n)\, d\nu(x) .$$

Comme

$$H_p(x^n) \circ \sigma_n = \Sigma_{\gamma\in\mathfrak{I}_n, |\gamma|=p} \frac{|\gamma|!}{\gamma!} H_\gamma(x^n)\, e_\gamma ,$$

il est clair que $\int \lambda_p . H_p(x^n) \circ \sigma_n\, d\nu(x) = 0$, car $p \neq 0$. Mais

$$\int \lambda_p . H_p(x^n)\, d\nu$$

$$= \int \lambda_p . H_p(0)(1-\sigma_n)\, d\nu + \Sigma_{\ell=1}^{p} \frac{p!}{(p-\ell)!\,\ell!} \underbrace{\int (\lambda_p . H_p . p(0)(1-\sigma_n)\, H_\ell(x^n)\, \sigma_n)\, d\nu}_{0}$$

comme

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbb{H}_p(0) \circ (\mathbb{1} - \sigma_m)\|_{P_p(E')} = 0 ,$$

et donc $\int \lambda_p \mathbb{H}_p(x)\, d\nu(x) = 0$. On a donc obtenu (*) pour $a_j^!(x)$ avec u, v et $a_j^!$ cylindriques.

Soit maintenant $a_j^!(x) \in C_b^m(E, (P_j(E'))')$ quelconque, considérant les

$$a_j^{!n}(x) = a_j^!(\sigma_n(x)) , \quad D^i a_j^n(x) = (D^i a_j)(x^n) \circ \sigma_n ,$$

on voit que

$$D^i a_j^{!n}(x) = \Sigma_{|\delta|=i,\delta\in\mathfrak{I}_n} \frac{|\delta|!}{\delta!} e_\delta \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\delta a_j^! (x^n)$$

et donc

$$\forall x \in E , \quad \|D^i a_j^{!n}(x)\|_{P_i(E')\hat{\otimes}(P_j(E'))'} \leq \|D^i a_j^!(x^n)\|_{P_i(E')\hat{\otimes}(P_j(E'))'}$$

puis que

$$\|D^i a_j^{!n}(x) - D^i a_j^!(x)\|_{P_i(E')\hat{\otimes}(P_j(E'))'}$$

$$\leq C\left(\Sigma_{\delta\notin\mathfrak{I}_n} \frac{1}{a^{2\delta}} + \|D^i a_j^!(x) - D^i a_j^!(x^n)\|_{\mathcal{L}(\hat{\odot}_i E, (P_j(E'))')}\right) .$$

La continuité de $a_j^!(x)$ et le théorème de Lebesgue permettant de passer à la limite, et on a

$$\int \mathrm{div}_j(a_j^! u) v\, d\nu(x) = \Sigma_{i=0}^{j-k-i} \frac{j!\,(-1)^{k+i}}{k!\,i!\,(j-k-i)!} \int \mathrm{tr}_i(D^i a_j^!(x)\, \mathbb{H}_{j-k-i}(x)\, D^k u(x)) v\, d\nu(x)$$

pour u et v cylindriques.

On en déduit aisément que si $u \in K^m(X)$, $0 \leq j \leq m$,

(*) $$\mathrm{div}_j(a_j^! u) = \Sigma_{k=0}^{j} b_k^!(x)\, D^k u ,$$

où l'égalité a lieu dans L^2 pourvu que

$$a_j^!(x) \in C_b^m(E, (P_j(E'))') , \quad \mathrm{supp}\, a_j^!(x) \subset \text{partie bornée de } E ,$$

car dans ces conditions les deux membres de (*) représentent des applications continues de K^m dans L^2.

On en revient maintenant à $a_j(x) \in \mathfrak{A}(\mathcal{U}, (P_j(E'))')$. Soit $x_0 \in E$, on détermine $x_0 \in V$ comme plus haut, $\varphi \equiv \mathbb{1}$ au voisinage de $x_0 \in W$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset V$, soit $u \in K^m(W)$.

Pour un prolongement $\tilde{u}$ quelconque de u à $K^m(X)$, on a :

$$\mathrm{div}_j(a_j^! \tilde{u}) = \Sigma_{k=0}^{j} b_k^!(x)\, D^k \tilde{u} \quad \text{dans } L^2(E) ;$$

par restriction à W, on obtient

$$\mathrm{div}_j(a_j u) = \Sigma_{k=0}^{j} b_k(x)\, D^k u \quad \text{dans } L^2(W) .$$

D'où la proposition suivante.

PROPOSITION. Si $P(x\,,\,D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x)\, D^j\, u$ avec $a_j(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{U}\,,\,(P_j(E'))')$, alors

$$^tP(x\,,\,D) = \sum_{k=0}^{m} b_k(x)\, D^k\, u \quad \text{avec} \quad b_k(x) \in \mathcal{A}(\mathcal{U}\,,\,(P_k(E'))')\,,$$

et on a

$$b_k(x) = \sum_{i=0}^{j-k} \frac{j!}{k!\,i!\,(j-k-i)!}(-1)^{k+i}\, tr_i(D^i\, a_j(x)\, H_{j-k-i}(x)) \quad (b_m(x) = (-1)^m\, a_m(x))\,.$$

La proposition montre que, moyennant une restriction sur les coefficients de P (on impose en fait que P agit sur les fonctions qui sont seulement E-différentiables), alors l'opérateur P^* est de la même forme que P .

On peut maintenant énoncer, et démontrer, le théorème d'Holmgreen.

THÉORÈME 2. - Soit S une hypersurface de classe C^{m+1} de E . Soit P un opérateur à coefficients analytiques dans $\mathcal{U}$, voisinage de $x_0 \in S$,

$$P = \sum_{j=0}^{m} a^j(x)\, D^j \quad \text{avec} \quad a^j \in \mathcal{A}(\mathcal{U}\,,\,(P_j(E'))')\,,$$

on suppose que S est non caractéristique pour P en x_0 . Alors si $u \in K^m(\mathcal{U})$ vérifie

$$\begin{cases} P(x\,,\,D)\,u = 0 & \text{dans } \mathcal{U} \\ u = 0 & \text{dans } S^- \cap \mathcal{U} \end{cases}$$

alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de zéro tel que $u = 0$ dans $\mathcal{V}$.

Démonstration. - La démonstration étant classique, nous nous contenterons d'en donner les arguments principaux. Quitte à restreindre $\mathcal{U}$ et à remplader S par une surface osculatrice x_0 à un ordre assez élevé, on peut supposer que S est une hypersurface analytique, l'application

$$\Phi : E \to E \quad \text{définie par} \quad \begin{cases} t = \varphi(x) - \varphi(0) - \|x'\|^2 \\ y' = x' \end{cases}$$

est un difféormorphisme analytique qui transforme E en un produit $E = \underset{\sim}{R} \times E_1$, et S est tranformée en la surface $t = \|x'\|^2$, où l'on a choisi $E_1 = \ker \varphi'(0)$ et $x = x_1\, e_1 + x'$ avec $\varphi'(0)\, e_1 = 1$. On peut supposer également que le coefficient du terme en $(\frac{\partial}{\partial t})^m$ de P est égal à 1 , que u est nulle dans $V \cap \{t \leq \|x'\|^2\}$, et que $Pu = 0$ dans V . D'après la remarque à la suite de la démonstration du théorème 1, et d'après la proposition, on sait que $\exists\, h_0 > 0$ tel qu'il existe W , voisinage de zéro, où le problème de Cauchy

$$\begin{cases} {}^tP\varphi = 0 \\ D_t^j\, \varphi = 0\,, \quad 0 \leq j \leq m-1\,, \quad D_t^{m-1}\, \varphi = \psi \quad \text{pour} \quad t = h \end{cases}$$

a une solution analytique dans W , pour tout $h \leq h_0$, et pour tout ψ , fonction entière. On sait, d'après [6], que $\{\|x'\|^2 - t\}$ est localement une $X_1 - C^\infty$ surface. Si

$$\mathcal{O}_h = \{x \in E \; ; \; \|x'\|^2 \leq t \; , \; t \leq h\} \; ,$$

$$\partial_{\mathcal{O}_h} = \underbrace{\{\|x'\|^2 = t \; , \; t < h\}}_{\Gamma'_h} \cup \underbrace{\{t = h\}}_{\Gamma_h} \; ,$$

$\partial_{\mathcal{O}h}$ a une mesure de surface "gaussienne", qui sur Γ_h est la mesure gaussienne de l'hyperplan $t = h$. On a $u \in K^m(V)$, mais de l'hypothèse $u = 0$ dans

$$V \cap \{t \leq \|x'\|^2\} \; ,$$

on a

$$\int_{\mathcal{O}_h} Pu \, \varphi \, d\mu - \int_{\mathcal{O}_h} u \, {}^tP\varphi \, d\mu = \int_{\Gamma_h} \psi(y) \, u(y' \, , h) \, d\Gamma = 0 \, ,$$

car les traces de u et de ses dérivées sont nulles sur Γ'_h, et que, sur Γ_h seule, $D^m_t \varphi$ est $\neq 0$. Prenant pour $\psi(y')$ les fonctions $\psi_\gamma(y') = \frac{1}{a^\gamma} y^\gamma$ qui sont telles que $|\psi_\gamma(y)| \leq \|y\|^\ell$ $\ell = |\gamma|$, les problèmes de Cauchy

$$Q_{\gamma,h} : \begin{cases} {}^tP\varphi = 0 \\ D^j_t \varphi = 0|_{t=h} \quad j = 0 \, , \ldots , m-2 \, , \quad D^{m-1}_t \varphi = \psi_\gamma(y) \quad \text{sur} \quad t = h \end{cases}$$

ont une solution obtenue en résolvant

$$Q'_{\gamma,h} \begin{cases} {}^tP(t + h \, , x' \, , D_t \, D_{x'}) \, v_h(t \, , x') = 0 \\ D^j_t \, v_h(t \, , x') = 0 \, , \quad 0 \leq j \leq m-2 \, , \quad D^{m-1}_t \, v_h(t \, , y) = \psi_\gamma(y) \quad \text{sur} \quad t = 0 \, . \end{cases}$$

Comme les coefficients $b^h(t \, , x) = b(t + h \, , x)$ de l'opérateur ${}^tP$ vérifient :

$$\|b^h_{\ell,p}\| = \frac{1}{\ell ! p!} \|(\frac{\partial}{\partial t})^p D^\ell_{x'} \, b(h \, , 0)\| \leq L^{\ell+p} \, , \quad \forall \; h \leq h_0 \, .$$

Donc $v_{h,\gamma}(t \, , y) = \sum_{\ell,q} v^{h,\gamma}_{\ell,q}(y) \, t^q$ où $\|v^{h,\gamma}_{\ell q}\| \leq M^{\ell+q}$, $\forall \; h \leq h_0$, $\forall \; \gamma$, donc φ solution de $Q_{\gamma h}$, $\varphi(t \, , y) = v_{h\gamma}(t - h \, , y)$ est analytique dans un voisinage de zéro indépendant de h, γ, ses coefficients en zéro vérifiant des majorations indépendantes de γ et de h pour $h \leq h'_0$. Il existe donc W voisinage de 0 dans lequel tous les $\varphi \in K^m(W)$, et on obtient pour densité des polynômes $u = 0$ dans W'.

NOTE ajoutée à la correction des épreuves. - Comme on ne connait pas le noyau de l'application canonique $P_j(E') \hat{\otimes} (P_j(E'))' \to \mathcal{L}^1(\hat{\bigodot}_j E' \, , (P_j(E'))')$ ($\mathcal{L}^1(E' \, , F)$ espaces des opérateurs nucléaires $E \to F$), il faut définir explicitement ce que nous entendons par tr_j. L'injection $\lambda : E' \to E$ est nucléaire, $\lambda = i \circ i'$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dr, "\ell'"'] & X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "j"] & E \\ & X \arrow[ur, "\ell"'] & \end{tikzcd}$$

où j est Hilbert-Schmidt positive et où ℓ et ℓ' sont isométriques. Utilisant la décomposition spectrale de j^*j, on détermine des projecteurs orthogonaux dans X. $P_k : X \to V_k$, V_k est de dimension finie, et contenu dans E'. Si λ_n désigne la valeur propre associée à P_k, on a $1 = \sum_k P_k$, $P_k \in E \otimes E$, $\sum_k \lambda_k \dim V_k < +\infty$. Mais $\sum_k P_k$ converge dans $E \hat{\otimes} E$, et représente donc $\lambda = i \circ i'$.

$$\hat{\bigotimes}_j \lambda = \sum_{k_1,\dots,k_j} P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}$$

dans $\mathcal{L}(\hat{\bigotimes}_j E', \hat{\bigotimes}_j E)$, mais $P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}$ est un opérateur de rang fini $\hat{\bigotimes}_j E' \to \hat{\bigotimes}_j E$, et donc $P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}$ est représenté d'une manière unique par un élément de $(\hat{\bigotimes}_j E')' \otimes \hat{\bigotimes}_j E$. Exprimant par exemple $P_k = \sum_{i \in \mathfrak{I}_k} e_i \otimes e_i$, on obtient que $P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}$ est représenté par

$$\sum_{\ell_1 \in \mathfrak{I}_{k_1},\dots,\ell_j \in \mathfrak{I}_{k_j}} (e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j}) \otimes (e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j}),$$

or :

$$\| e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j} \|_{\hat{\bigotimes}_j E'} = \lambda_1^{\frac{1}{2}} \dots \lambda_j^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\| e_{\ell_1} \otimes \dots \otimes e_{\ell_j} \|_{(\hat{\bigotimes}_j E')'} = \sup_{x_1,\dots,x_j} \left| \frac{(x_1(e_{\ell_1})) \dots (x_j(e_{\ell_j}))}{\|x_1\|' \dots \|x_j\|'} \right| \leq \lambda_1^{\frac{1}{2}} \dots \lambda_j^{\frac{1}{2}},$$

d'où $\|P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}\|_{(\hat{\bigotimes}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigotimes}_j E} \leq \lambda_1 \dots \lambda_j \; (\dim V_1) \dots (\dim V_j)$, et soit :

$$\hat{\bigotimes}_j \lambda = \sum_{k_1,\dots,k_j} P_k \otimes \dots \otimes P_{k_j} \text{ converge dans } (\hat{\bigotimes}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigotimes}_j E.$$

Par les tenseurs symétriques, on note $P_\alpha = \frac{\alpha!}{j!} \sum_{k_1,\dots,k_j \in I_\alpha} P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}$ où

$I_\alpha = \{(k_1, \dots, k_j) \in \underset{\sim}{N}^j$ tel qu'il y en ait α_1 égaux à 1, α_2 égaux à 2, etc.$\}$ P_α est un opérateur de rang fini : $\hat{\bigodot}_j E' \to \hat{\bigodot}_j E$ et est donc représenté uniquement par un $\tilde{P}_\alpha \in (\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} (\hat{\bigodot}_j E)$ et $\tau = \sum_{|\alpha|=j} j!/\alpha!\, \tilde{P}_\alpha$ converge dans $(\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j E$, car

$$\|\tilde{P}_\alpha\|_{(\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j E} \leq \|P_{k_1} \otimes \dots \otimes P_{k_j}\|_{(\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j E} \quad \text{si } (k_1, \dots, k_j) \in I_\alpha,$$

de plus τ représente l'opérateur $\hat{\bigodot}_j \lambda$, et s'écrit d'ailleurs

$$\tau = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} e_\alpha \otimes e_\alpha \quad (e_i \text{ base hilbertienne associée aux } P_i).$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\hat{\bigodot}_j E, F)$, F espace de Banach,

$$\mathrm{Id}_{(\hat{\bigodot}_j E')'} \hat{\otimes} u \in \mathcal{L}((\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} \hat{\bigodot}_j E, (\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} F)$$

et donc $(\mathrm{Id} \hat{\otimes} u)(\tau) \in (\hat{\bigodot}_j E')' \hat{\otimes} F$. Si $F = (P_j(E'))'$,

$$(\mathrm{Id} \hat{\otimes} u)(\tau) \in P_j(E') \hat{\otimes} (P_j(E'))',$$

on pourra ainsi poser $tr_j\, u = tr((Id \hat{\otimes} u)(\tau))$, où tr est associé à la forme hilbertienne de dualité $P_j(E') \times (P_j(E'))'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GOODMAN (V.). - A divergente theorem for Hilbert spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 164, 1972, p. 411-426.

[2] GOULAOUIC (C.). - Voie d'approfondissement en équations aux dérivées partiel- tielles, Cours professé à l'Ecole Polytechnique, 1973 (multigraphié).

[3] KREE (P.). - Application des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur espace de Hilbert, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, Série A, p. 753-755.

[4] LASCAR (B.). - Propriétés d'espaces de Sobolev en dimension infinie, Comm. in part. diff. Equations, 1976.

[5] LASCAR (B.). - Théorème de Cauchy-Kovalewsky et théorème d'unicité d'Holmgren pour des fonctions d'une infinité de variables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 691-694.

[6] LASCAR (B.). - Invariance par difféomorphisme d'espaces de Sobolev. Espaces de Sobolev d'une variété. Applications, Séminaire Krée, 1975/76, n° 7.

[7] NACHBIN (L.). - Topology on spaces of holomorphic mappings. - Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Ergebnisse der Mathematik, 47).

Bernard LASCAR
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 PALAISEAU