Paul Krée

Introduction a l'holomorphie en dimension infinie

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A6_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 6 , 12 p.

INTRODUCTION A L'HOLOMORPHIE EN DIMENSION INFINIE

par Paul KRÉE

L'étude des fonctions holomorphes sur les e. l. c. s. fait l'objet de nombreux travaux :

(a) En liaison avec la géométrie analytique : travaux de A. DOUADY, KIEHL ... , voir les références dans le Séminaire Douady-Verdier (Astérisque n° 16, 17, 36-37),

(b) Travaux généraux de P. LELONG (Séminaires publiés dans les Lecture Notes in Mathematics), l. NACHBIN et leurs élèves ...,

(c) En liaison avec la résolution de l'équation de Navier-Stockes, la valeur de la solution en un point de l'espace-temps étant considérée comme une fonction analytique des données initiales : travaux de M. VISIK-FURSIKOFF [14],

(d) En liaison avec la théorie des champs : voir les références de l'exposé 1.

L. NACHBIN a introduit la notion importante de type d'holomorphie banachique [13], qui a donné lieu à de nombreux travaux. Ainsi, GUPTA a étudié le type nucléaire [7], S. DINEEN a fait une étude générale de tous les types [5], DWYER a étudié le type Hilbert-Schmidt sur un Hilbert [6], R. ARON et M. SCHOTTENLOHER étudient ensemble le type compact ... Par ailleurs, J. P. BOLANC([2] [3] [4]) étudie les fonctions holomorphes définies sur un espace nucléaire ou à dual nucléaire. De nombreux autres travaux concernent la topologie de L. NACHBIN, les domaines d'holomorphie, les fonctions plurisousharmoniques... Le fait surprenant qu'une fonction entière sur un e. v. n. n'est pas forcément bornée sur les boules a donné lieu à une étude très détaillée de C. O. KISSELMAN [9].

Il est simplement donné ci-après une introduction générale (et partielle) à ces travaux, en insistant sur le cas nucléaire, puisqu'ils servent pour les applications (d).

1. Fonctions holomorphes scalaires de plusieurs variables complexes.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide d'un espace vectoriel complexe de dimension n . Si l'on choisit une base dans E , on a une notion naturelle d'holomorphie ;

$$f : O \to \underset{\sim}{C}$$

est holomorphe si elle est continue et si sa restriction à toute intersection avec $\mathcal{O}$ d'une droite complexe parallèle à un des axes est holomorphe. On a aussi, moyennant le choix d'une base, une notion d'analyticité : f est analytique dans O si, au voisinage de tout point z^0 de O , on a, avec la convention des multi-indices,

$$f(z^0 + \Delta z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha .$$

Le fait que ces notions sont équivalentes, et sont indépendantes du choix d'une base, résulte du théorème suivant.

(1.1) THÉORÈME. - Soit D un ouvert de l'espace vectoriel complexe E rapporté à une base, d'où $E \sim \underset{\sim}{C}^n = \{z = (z_1 \dots z_n)\}$. Soit $f(z_1 \dots z_n)$ une fonction continue sur D, qui est holomorphe séparément par rapport à chaque variable z_i. Soit $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ dans D tel que D contienne le polydisque

$$P = \{z^0 + \Delta z ; \quad |\Delta z_1| \leq r_1 \dots |\Delta z_n| \leq r_n\} .$$

(a) Alors, pour tout z dans P, on a

$$f(z_1 \dots z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{|Z_1 - z_1^0| = r_1, \, |Z_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(\zeta_1 \dots \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

(b) Pour tout z dans l'intérieur de P, on a

$$f(z^0 + \Delta z) = \sum_\alpha a_\alpha \Delta z^\alpha = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \Delta z_1^{\alpha_1} \dots \Delta z_n^{\alpha_n} ,$$

le second membre converge absolument. De plus, pour tout multi-indice α, on a

$$a_\alpha = (2\pi i)^n \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} \dots \int_{|\zeta_n - z_n^0| = r_n} \frac{f(\zeta_1 \dots \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1^0)^{\alpha_1 + 1} \dots (\zeta_n - z_n^0)^{\alpha_n + 1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

Preuve.

(a) On identifie P avec le produit des disques

$$D_j = \{z_j \in \underset{\sim}{C} , \quad |z_j - z_j^0| \leq r_j .$$

Suppoсant z_2 fixé dans $D_{z_1} \dots, z_n$ fixé dans D_n, comme $f(\cdot , z_r \dots z_n)$ est holomorphe, on a

$$f(z_1 \dots z_n) = (2\pi i)^{-1} \int_{|\zeta_1 z_1^0| = r_1} \frac{f(\zeta_1 \ z_r \dots z_n}{(\zeta_1 - z_1)} \quad d\zeta_1 .$$

Fixons ζ_1 sur $|\zeta_1| = r_1$; z_3 dans D_3, ... z_n dans D_n. Comme $f(\zeta_1 , \cdot , z_3 , \dots, z_n)$ est holomorphe, on a

$$f(z_1 \dots z_n) = (2\pi i)^{-2} \int_{|\zeta_1 - z_1^0| = r_1} d\zeta_1 \int_{|\zeta_2 - z_2^0| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3 \dots z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_2 .$$

On continue de même. Notons que les intégrations au deuxième membre peuvent être effectuées dans un ordre arbitraire.

(b) Si $z = z_0 + \Delta z$, il vient

$$\prod \frac{1}{\zeta_j - (z_j^0 + \Delta z_j)} = \prod_{j=1}^n \sum_{\alpha_j = 0}^\infty \frac{(\Delta z_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j - z_j^0)^{\alpha_j + 1}} .$$

D'où

$$f(z^0 + \Delta z) = (2\pi i)^{-n} \int f(\zeta)\, \left(\prod_1^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\Delta z_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j - z_j^0)^{\alpha_j+1}}\right) d\zeta \; .$$

Posons

$$a_\alpha = (2\pi i)^{-n} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1^0)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n^0)^{\alpha_n+1}} d\zeta \; .$$

Si M est le maximum de f sur le produit des circonférences $|\zeta_j - z_j^0| = r_j$, il vient $|a_\alpha| \leq M r_1^{-\alpha_1} \cdots M r_n^{-\alpha_n}$. On voit alors que la série $\sum a_\alpha \Delta z^\alpha$ converge absolument à l'intérieur du polydisque P, car, si $|\Delta z_j| < r_j$ pour tout j, il vient

$$\sum |a_\alpha \Delta z^\alpha| \leq M \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \left(\frac{|\Delta z_1|}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{|\Delta z_n|}{r_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{M}{\left(1 - \frac{|\Delta z_1|}{r_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\Delta z_n|}{r_n}\right)} \; .$$

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants.

(1.2) DÉFINTION et THÉORÈME. - <u>Soit</u> D <u>un ouvert d'un e. v. complexe</u> E <u>de dimension</u> n.

(a) <u>Une application continue</u> $f : D \to \mathbb{C}$ <u>est dite holomorphe si sa restriction à l'intersection avec</u> D <u>de toute droite affine de</u> E <u>est holomorphe.</u>

(b) <u>Pour qu'une application continue</u> $f : D \to \mathbb{C}$ <u>soit holomorphe, il suffit qu'en identifiant</u> E <u>à</u> $\mathbb{C}^n$ <u>par le choix d'une base, la fonction</u> $f(z_1, \cdots, z_n)$ <u>soit holomorphe par rapport à chaque</u> z_j.

(c) <u>Si</u> f <u>est holomorphe, elle est analytique.</u>

Plus précisément, en tout point z^0 de D, la série de Taylor converge absolument et uniformément dans un voisinage de z^0.

En fait, le résultat (b) peut être amélioré. Car si une fonction $f(z_1, \cdots, z_n)$ est holomorphe par rapport à chacune des variables z_j, elle est holomorphe sur D (voir [8]).

2. Fonction Gateaux-holomorphes.

(2.1) DÉFINITION <u>de</u> $H_G(\Omega, F)$. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux e. l. c. s. complexes</u>, F <u>étant quasi complet, et soit</u> Ω <u>un ouvert de</u> E. <u>L'application</u> $u : \Omega \to F$ <u>est dite</u> Gateaux-holomorphe (<u>ou</u> G-<u>holomorphe</u>) <u>si, pour toute droite affine</u> D <u>de</u> E, <u>la restriction de</u> u <u>à</u> $D \cap \Omega$ <u>est holomorphe. L'espace de ces fonctions est noté</u> $H_G(\Omega, F)$.

(2.2) PROPOSITION. - <u>Avec les hypothèses de (2.1), soit</u> $z_0 \in \Omega$. <u>Alors il existe une suite unique</u> $P_0, P_1, \ldots$ <u>de polynômes sur</u> E <u>à valeurs dans</u> F, <u>telle que si</u> Δ <u>est un ouvert disqué de</u> E <u>tel que</u> $z_0 + \Delta \subset \Omega$, <u>on a</u>

(2.3) $$u(z_0 + h) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(h) \quad \text{pour } h \in \Delta \; .$$

De plus,

$$P_j(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(z_0+zh)}{z^{j+1}}\, dz .$$

Démonstration. - Dans cette dernière formule, l'intégrale est une intégrale faible. Soit $h \in \Delta$, d'où $z_0 + zh \in \Omega$ pour $|z| \leq 1 + \varepsilon$. La fonction

$$\Phi(z) = u(z_0 + zh)$$

est holomorphe dans le disque-unité fermé, à valeurs dans F. D'où

$$u(z_0 + zh) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ell_n(h)$$

avec

$$\ell_j(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{u(z_0 + \zeta h)}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta = P_j(h) .$$

En faisant $z = 1$, on obtient (2.3) et (2.4). Il reste à montrer que P_j est un polynôme homogène de degré j. Il suffit de montrer que la restriction de P_j à tout sous-espace H de dimension finie de E est un polynôme homogène de degré j. Mais alors, vu (1.1), la restriction v de $u(z_0 + H) \cap \Omega$ peut être développée en série absoluement convergente, s'écrivant après choix d'une base dans H, et avec la convention des multi-indices,

$$u(z_0 + h) = \sum_k a_k h^k \quad \text{si} \quad h \in H .$$

D'où

$$P_j(h) = \frac{1}{2\pi i}\sum_k a_k \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{|k|} h^k}{\zeta^{j+1}}\, d\zeta = \sum_{|k|=j} a_k h^k$$

pour $h \in H$. Il apparait ainsi que P_j est un polynôme (pas forcément continu) homogène de degré j.

(2.5) Définition. - La série de polynômes $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(h)$ est appelée le développement de Taylor de u au point z_0.

(2.6) Majoration de $P_j(h)$ en utilisant une majoration sur u. - Pour simplifier, supposons $\Omega = E$. Pour tout $\rho > 0$, et pour tout h

$$P_j(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{u(z_0 + zh)}{z^{j+1}}\, dz .$$

Pour toute semi-norme continue q sur F, on a

$$q(P_j(h)) \leq \rho^{-j} \sup_{|z|=\rho} q(u(z_0 + zh)) . \tag{2.7}$$

Cette majoration peut être précisée, en faisant varier ρ et en prenant l'inf du 2e membre.

(2.8) Exemple. - Suppsons u entière de type exponentiel

$$|u(z)| \leq C \exp p(z) ,$$

où p est une certaine semi-norme sur E. Alors posant

$$z_0 = 0 \ , \quad P_j(h) = D^j\, u(0\ ,\ h^j)/(j!)\ ,$$

il vient

$$|D^j\, u(z\ ,\ h^j)| \leq \inf_R Cj!\ \frac{\exp(Rp(h)+p(z_0))}{R^j} = Cj!\,(\tfrac{e}{j})^j\ p(h)^j\ e^{p(z_0)}\ .$$

3. Fonctions holomorphes.

Soit $C^0(\Omega\ ,\ F)$ l'espace des fonctions continues $\Omega \to F$.

(3.1) DÉFINITION usuelle de $H(\Omega\ ,\ F)$. – L'espace des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω de E à valeurs dans l'e. l. c. s. quasi-complet F est, par définition,

$$H(\Omega\ ,\ F) = H_G(\Omega\ ,\ f) \cap C^0(\Omega\ ,\ F)\ .$$

Dans le cas particulier où $F = \underset{\sim}{C}$, on écrit simplement

$$H(\Omega) = H_G(\Omega) \cap C^0(\Omega)\ .$$

Si $\Omega = E$, $H(E)$ est l'espace des fonctions entières sur E.

(3.2) DÉFINITION. – Soit $S = \sum P_j$ une série formelle sur l'e. l. c. s. E à valeurs dans l'e. l. c. s. quasi-complet F : $P_j \in \mathcal{P}(E^j\ ,\ F)$. Cette série formelle est dite entière si les P_j sont continus et si, pour tout voisinage ouvert disqué V de l'origine dans F, il existe un voisinage ouvert disqué U de l'origine dans E tel que $\sum P_j(x)$ converge dans $F(V)$, uniformément lorsque x décrit U :

$$\forall\ \varepsilon\ ,\ \exists\ N\ ,\ \forall\ x \in U\ ,\ m \text{ et } n \geq N \Longrightarrow \textstyle\sum_{j=m}^{n} P_j(x) \in \varepsilon V\ ,$$

ou bien

$$\forall\ \varepsilon\ ,\ \exists\ N\ ,\ (m \geq N \text{ et } x \in U) \Longrightarrow \textstyle\sum P_j(x) - \sum_1^m P_j(x) \in \varepsilon V\ .$$

Dans le cas particulier où E est normé et où F est un espace de Banach, cela signifie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\sum P_j(x)$ converge uniformément pour $|x| \leq \lambda$. Le sup de ces nombres λ est noté R : c'est le rayon de convergence uniforme.

(3.3) Formule type Hadamard. – Le rayon de convergence uniforme R de la série entière $P_j(x)$ sur l'espace normé E à valeurs dans l'espace normé F est tel que

$$R^{-1} = \lim_j \|\hat{P}_j\|^{1/j}\ .$$

Démonstration. – Soit $L = \lim \|\hat{P}_j\|^{1/j}$. D'une part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a sauf pour un nombre fini d'indices j

$$\|\hat{P}_j\|^{1/j} \leq L + \varepsilon\ .$$

D'où

$$\|x\| \leq \rho \Longrightarrow \|P_j(x)\| \leq \rho^j (L+\varepsilon)^j\ .$$

Donc $\sum P_j(x)$ converge uniformément pour $|\rho| < (\varepsilon + L)^{-1}$, ce qui entraine $R \geqslant L^{-1}$. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices j tels que $\|P_j\| \geqslant (L - \varepsilon)$. Donc, il existe $x_0 \neq 0$ tel que

$$\|P_j(x_0)\| \geqslant (L - \varepsilon)^j \ (\|x_0\| - \varepsilon)^j .$$

Soit $\|x_0\| > L^{-1}$ et $\|P_j(x_0)\| \geqslant 1$.

La série $\sum P_j(x_0)$ ne peut converger, ce qui entraine $R \leqslant L^{-1}$. Finalement, $R = L^{-1}$.

(3.4) Exercice. - Soit $E = \ell^1 = \{x = (x_i)\ ,\ \sum |x_i| < \infty\}$ et $F = \underset{\sim}{C}$. Soit

$$P_j(x) = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_j .$$

Montrer

$$\lim \|P_j\|^{1/j} = 1/e \quad \text{et} \quad \lim \|P_j\| \geqslant 1 .$$

Ceci montre qu'on ne peut pas toujours enlever le chapeau dans la formule (3.3).

(3.5) Exercice. - Soit $E = \ell^p = \{x = (x_i)\ ,\ \sum |x_i|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$ et $F = \underset{\sim}{C}$. Montrer que la série $S(x) = \sum x_i^i$ converge pour tout $x \in E$, mais que son rayon de convergence uniforme est seulement $R = 1$. Montrer que $S(x)$ n'est pas borné dans la boule où $\|x\| \leq 1 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Ceci montre une différence essentielle avec la dimnension finie : S est une fonction entière sur ℓ^p, et la série de Taylor de S ne converge pas dans tout ℓ^p !!

(3.6) PROPOSITION. - Soit u holomorphe sur l'ouvert Ω de l'e. l. c. s. E à valeurs dans l'e. l. c. s. quasi complet F. Alors la serie de Taylor de u en tout point $z_0 \in \Omega$ est une série entière, dont la somme coincide avec u dans un certain voisinage de z_0.

En effet, pour tout voisinage ouvert disqué V de l'origine de F, il existe un voisinage ouvert U disqué de l'origine de E tel que $u(z_0 + U) - u(z_0) \subset V$ et $z_0 + U \subset \Omega$. Le formule (3.6) montre que, pour tout j,

$$h \in U/2 \Longrightarrow P_j(h) \in 2^{-j}\, V .$$

Vu (2.7) exposé 3, ceci montre que, pour tout j, P_j est un polynôme continu. De plus, ceci entraine

$$u(z_0 + h) - \sum_1^N P_j(h) = \sum_{N+1}^{\infty} P_j(h) \in V \sum_{N+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-N}\, V .$$

Vu la définition (3.2), $\sum P_j$ est une série entière, dont la somme est égale à $u(z_0 + h)$ dans le voisinage $z_0 + U/2$ de z_0.

Dans le cas particulier où E et F sont normés, on peut en déduire que u est indéfiniment Fréchet dérivable.

4. Nucléarité de $H(\Omega)$.

(4.1) THÉORÈME ([4] [15]). - Soit Ω un ouvert d'un e. l. c. s. E qui est conucléaire pour la bornologie compacte. Alors $H(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence compacte, est nucléaire.

Démonstration (si $\Omega = E$) .

(a) La bornologie compacte est cocomplète d'après (4.4), exposé 3. Vu (5), exposé 5, elle admet une base formée par des disques compacts K , tels que les $E_K = E[K]$ soient hilbertiens séparables. Posons $H = H(E)$. La topologie de H est définie par les semi-normes $|\varphi|_K = \sup\{|\varphi(z)|\ ,\ z \in K\}$. Le quotient H_K de H par $\{\varphi\ ;\ |\varphi|_K = 0\}$ s'identifie à un espace de fonctions entières ψ sur E_K , H_K étant muni de la norme $\psi \to |\psi|_K = \sup\{|\psi(z)|\ ;\ z \in K\}$. L'e. b. c. s. E étant conucléaire, il existe un disque compact $K' > K$, $E_{K'}$ étant hilbertien séparable, l'injection α de E_K dans $E_{K'}$ étant nucléaire. Quitte à remplacer K' par son intersection avec l'adhérence de E_K dans $E_{K'}$, on peut supposer que l'image de α est dense dans $E_{K'}$. Utilisant la décomposition polaire de $\alpha = U_\alpha |\alpha|$, une base de vecteurs propres de $|\alpha| = \sqrt{\alpha^* \alpha}$, et les valeurs propres (λ_n) de $|\alpha|$, il vient

$$E_K \sim \ell^2_\lambda = \{(z_n)_n\ ;\ z_n \in \underset{\sim}{C}\ ;\ \sum \frac{|z_n|^2}{\lambda_n^2} < \infty\}$$

$$E_{K'} \sim \ell^2 = \{(z_n)_n\ ;\ z_n \in \underset{\sim}{C}\ ;\ \sum |z_n|^2 < \infty\}\ ,$$

l'injection α étant représentée par l'injection canonique de ℓ^2_λ dans ℓ^2 . Quitte à remplacer K' par un homothétique, on peut supposer $\sum \lambda_n < \frac{1}{2}$. Vu (6), exposé 5, il suffit de montrer que l'application de restriction $\beta : H_{K'} \to H_K$ est 1-sommante.

(b) Montrons d'abord qu'il exite une mesure de Radon positive m sur la boule unité faible K' de $H_{K'}$ telle que

$$(*) \qquad \forall\ \psi \in H_K\ ,\ \forall\ z \in K\ ,\quad |\psi(z)| \leq \int |\psi(u)|\ dm(u)\ .$$

Notons que la topologie induite sur K' par E , est équivalente à la trace sur K' de la topologie faible sur $H_{K'}$.

Vu la formule de Cauchy, on a, pour tout entier N et pour tout $z = (z_1\ , z_2 \dots)$ de K ,

$$\psi(z) = (2\pi i)^{-N} \int_{|u_1|=1 \dots |u_N|=1} \dots \int \frac{f(u_1\ , \dots\ , u_N\ , z_{N+1}\ , \dots)}{(u_1 - z_1) \dots (u_N - z_N)}\ du_1 \dots du_N\ .$$

D'où

$$(**) \qquad |\psi(z)| \leq \int_{K'} |\psi(u)|\ dm_N(u)\ ,$$

où m_N est la mesure suivante sur K'

$$f \to \prod_{n=1}^{N} (\lambda_n)^{-1} \int_{0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \dots 0 \leq \theta_N \leq 2\pi} \dots \int f(e^{i\theta_1}\ , \dots\ , e^{i\theta_N}\ , z_{N+1}\ , \dots)\ d\theta_1 \dots d\theta_N\ .$$

Comme le produit infini $\prod_1^\infty (1-\lambda_n)^{-1}$ converge, les mesures positives m_N ont des masses uniformément majorées ; elles appartiennent donc à une certaine boule du dual de l'espace de Banach $C(K')$ des fonctions continues sur K'. Vu le théorème Stone-Weierstrass, le sous-espace Δ des restrictions à K' des fonctions continues V-cylindriques sur $\ell^2 \simeq H_{K'}$ est dense dans $C(K')$, ces fonctions étant obtenues en composant la projection $(z_n)_n \to (z_1, \dots, z_N)$ de ℓ^2 sur $\underset{\sim}{C}^N$, avec une fonction continue sur $\underset{\sim}{C}^N$. Or, pour $f \in \Delta$, la suite des nombres

$$\int f \, dm_{N'} = m_{N'}(f)$$

converge si N' tend vers l'infini, car elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Par conséquent, il en est de même pour toute f faiblement continue sur K'. On peut donc passer à la limite $N = \infty$ dans (**), et l'on obtient ainsi (*).

(c) Comme en dimension finie (voir exposé 5), on va déduire du résultat (*) que l'opérateur de restriction $\beta : H_{K'} \to H_K$ est 1-sommant, ce qui entraine le théorème du moins pour $\Omega = E$. Pour tout $z \in K'$, la forme linéaire $\delta_z : f \to f(z)$ sur $H_{K'}$ appartient à la boule unité B du dual de $H_{K'}$. Comme l'application $z \to \delta_z$ est continue de K dans B muni de la topologie faible, l'image m' de m par cette application est définie, et est telle que

$$\forall \psi \in H_K, \quad |\psi|_K = \sup_K |\psi(z)| \leq \int_{\xi \in B} |\langle \psi , \xi \rangle| \, dm'(\xi)$$

ce qui entraine que β est 1-sommante.

Voir d'autres démonstrations, si $\Omega = E$, dans [3] [11]. Le théorème admet une réciproque. Si Ω est un ouvert non vide d'un e. l. c. s. E, tel que $H(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence compacte est nucléaire, alors E muni de la bornologie compacte est conucléaire. En effet, $H(\Omega)$ induit sur E' la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de E. Vu (15) exposé 5, l'espace E'_c ainsi topologisé est nucléaire. Vu (3) exposé 3 et le théorème de Mackey, cela signifie que E est conucléaire.

5. Transformation de Laplace (ou de Borel).

Soit E un e. l. c. s.. L'espace $H(E)$ est muni de la topologie de la convergence compacte.

(5.1) DEFINITION d'une fonctionnelle analytique sur E. - C'est une forme linéaire continue sur $H(E)$. L'espace $H'(E)$ de ces formes est muni de la topologie de dual fort de $H(E)$.

Vu le théorème de Hahn-Banach, toute fonctionnelle analytique sur E est représentable par une mesure à support compadt sur E ; mais cette représentation n'est pas unique.

(5.2) Fonctions entières de type exponentiel sur un e. l. c. s. F. - Une fonction $\Phi \in H(F')$ est dite de type exponentiel s'il existe un voisinage disqué U

de l'origine de F tel que

$$|\Phi|_U = \sup \Phi(\zeta) \exp(- j_U(\zeta)) < \infty .$$

L'espace vectoriel formé par ces fonctions est noté $\operatorname{Exp} F$.

On peut dire que $\operatorname{Exp} F = \varinjlim_U \operatorname{Exp}_U F$, où $\operatorname{Exp}_U(F)$ est l'espace normé fermé par les $\Phi \in H(F)$ telles que $|\Phi|_U$ soit fini. L'espace vectoriel $\operatorname{Exp} F$ est muni de la topologie localement convexe, limite inductive des $\operatorname{Exp}_U F$.

(5.3) EXERCILE. - Chaque e. v. n. $\operatorname{Exp}_U(F)$ est complet.

(5.4) EXERCICE. - Soit G un e. l. c. s. ayant la propriété d'approximation. Alors le sous-espqce $\operatorname{Pol}_{cyl}(G)$ des fonctions polynomiales cylindriques continues sur G est dense dans $H(G)$.

(5.5) DÉFINITION de la transformation de Laplace. - Pour tout $\zeta \in E'$, $\exp \zeta$ désigne l'exponentielle $z \to \exp \zeta z$. Soit $T \in H'(E)$. La transformée de Laplace $\hat{T}$ de T est la fonction numérique suivante définie sur E'

$$\hat{T}(\zeta) = T(\exp \zeta) .$$

(5.6) THÉORÈME.

(a) Soit E un e. l. c. s. ayant la propriété d'approximation, E'_c étant nucléaire. Alors la transformation de Laplace β est bijective de $H'(E)$ sur $\operatorname{Exp} E'$.

(b) Si, de plus, $H(E)$ est complet, alors β est bicontinue.

Preuve.

(a) (Variante de [2]) : Soit Φ l'application $\zeta \to \exp \zeta$ de E' dans $H(E)$. Elle est analytique et

$$(D^k \Phi)(\zeta ; h^k) = e^{\zeta} h^k \quad \text{pour} \quad h \in E' .$$

Composant Φ avec $T \in H'(E)$, on obtient la fonction analytique $\hat{T} : E' \to \underset{\sim}{C}$ telle que

(5.7) $$(D^k \hat{t})(\zeta ; h^k) = T(e^{\zeta} h^k) .$$

Comme $\sum_1^N \frac{\zeta^j}{j!} \to \exp \zeta$ dans $H(E)$ si $N \to \infty$:

(*) $$\hat{T}(\zeta) = T(\textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\zeta^j}{j!}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T(\zeta^j)}{j!} .$$

Or il existe un disque compact K de E tel que

$$|T(\varphi)| \leq C \, |\varphi|_K \quad \text{avec} \quad |\varphi|_K = \sup_K |\varphi(x)| .$$

Lorsque K varie, leurs polaires forment un système fondamental de voisinages de E' . En particulier :

$$|T(\zeta^{\ell})| \leq C|\zeta^{\ell}|_K = C(\sup_K |\zeta(x)|)^{\ell} = C\, j(\zeta)^{\ell} ,$$

où j est la jauge de K^0 . Vu (*), il vient

$$|\hat{T}(\zeta)| < \sum \frac{T(\zeta^\ell)}{\ell!} \leq C \sum \ell!^{-1}\, j(\zeta)^\ell = C \exp j(\zeta)$$

et $\hat{T}$ est de type exponentiel.

Notons que l'on a, vu (*),

$$\mathbb{T}(e^\zeta) = \sum_{j=0}^\infty \frac{T(\zeta^j)}{j!} = \sum_{j=0}^\infty \frac{(D^j \hat{\mathbb{T}})(0\ ;\ \zeta^j)}{j!} = \sum \frac{\langle D^j \hat{\mathbb{T}}(0)\ ,\ \otimes_j \zeta\rangle}{j!}\ ,$$

la dualité étant celle existant entre $(\otimes_j E')'$ et $\otimes_j E'$. Pour toute φ contenu dans le sous-espace Δ des combinaisons linéaires finies d'exponentielles, il vient

$$(**) \qquad T(\varphi) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\langle D^j \hat{T}(0)\ ,\ D^j \varphi(0)\rangle}{j!}\ .$$

L'application $T \to \hat{T}$ est injective car, si $\hat{T} = 0$, alors vu (5.7), $\mathbb{T}$ s'annule sur tous les monômes h^k, donc sur $\mathrm{Pol}_{cyl}(E)$. Vu (5.4), T s'annule sur $H(E)$, et $T = 0$. Il en résulte aussi que Δ est dense dans $H(E)$. Il reste à montrer la surjectivité de la transformation de Laplace. A toute $\Phi \in \mathrm{Exp}\, E'$, on associe la formule linéaire

$$\varphi \xrightarrow{T} \sum_{j=0}^\infty \frac{\langle D^j \Phi(0)\ ,\ D^j \varphi(0)\rangle}{j!} \quad \text{sur } \Delta\ .$$

Vu (**), il suffit de démontrer que T est définie et continue. Or, vu (2.8), on on a

$$|D^k \Phi(0\ ,\ h^k)| \leq C\ k!\left(\frac{e}{k}\right)^k |h|^k_{K^0}\ .$$

Vu l'identité de polarisation, $(D^k \Phi)(0)$ définit une forme multilinéaire sur $\prod_k E'(K^0)$, de norme $\leq C\, e^n$. Donc

$$(***) \qquad \forall\ \theta \in \otimes_k E'\ ,\quad |\langle D^k \Phi(0)\ ,\ \theta\rangle| \leq C\, e^k\, \|\theta\|_{\pi(K^0)}\ ,$$

la dernière norme étant la norme de l'image canonique de θ dans $\otimes_\pi E'(K^0)$.

Par ailleurs,

$$\sup_{u \in K} |D^k \varphi(0\ ;\ u^k)| \leq k!\ \rho^{-k}\ |\varphi|_{\rho K} \quad \text{pour tout } \rho > 1\ ,$$

d'après les inégalités de Cauchy.

Vu l'identité de polarisation et la définition de la norme $\varepsilon(K)$ sur $\otimes E'$,

$$|D^k \varphi(0)|_{\varepsilon(K)} = \sup_{h_j \in K} |D^k \varphi(0\ ;\ h_1\ ,\ \dots\ ,\ h_k)| \leq k^k\ \rho^{-k}\ |\varphi|_{\rho K}\ .$$

Comme E' est nucléaire, il existe un disque compact $K' \supset K$ de E et $C' > 0$ tels que

$$\forall\ \theta \in \otimes E'\ ,\quad |\theta|_{\pi(K^0)} \leq C'^k |\theta|_{\varepsilon(K')}\ .$$

Donc $\forall\ \varphi \in \Delta$,

$$|D^k \varphi(0)|_{\pi(K^0)} \leq C'^k\ k^k\ \rho^{-k}\ |\varphi|_{K'}\ .$$

En reportant dans la somme exprimant $T(\varphi)$ et utilisant (***), il vient finalement

$$|t(\varphi)| \leq C\ |\varphi|_{K'}\ \Sigma_{k=0}^{\infty}(\frac{eC'}{\rho})^k \frac{k^k}{k!}\ ,$$

et cette somme converge si ρ est assez grand. Ainsi T est continue, et la transformation de Laplace est bijective.

(b) Il reste à montrer que $T \to \hat{T}$ est continue ainsi que son inverse [10]. La démonstration ci-dessus montre que la transformation de Laplace β est bornée ainsi que son inverse. Vu la propriété universelle des topologies localement convexes limites inductives, β est bicontinue lorsque $H'(E)$ est muni de la topologie de dual ultrafort : voir exposé 3. Comme $H(E)$ est nucléaire complet, la topologie ultraforte coincide avec la topologie de dual fort. Donc β est bicontinue.

(5.8) THÉORÈME [10]. - Les hypothèses sont celles de (5.6,b). Munissons $Exp'(E')$ de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de l'e. b. c. s. $Exp(E)$. Alors la transformation de Laplace réalise une bijection bicontinue de $Exp'(E')$ sur $H(E)$.

Preuve. - Dans ce qui suit, $H'(E)$ est muni de la bornologie équicontinue, et $Exp\ E'$ de la bornologie $\varinjlim Exp_U(E')$. Le codual de $H'(E)$ coincide avec l'e. l. c. s. $H(E)$ d'après (4.12) exposé 3. Tandis que le codual de l'e. b. c. s. $Exp\ E$ est l'e. l. c. s. $Exp'(E')$. Vu (5.6,b), β réalise un isomorphisme d'e. b. c. s. et d'e. l. c. s. de $H'(E)$ sur $Exp\ E$. Donc la transposée β' de β réalise un isomorphisme de l'e. l. c. s. $Exp'(E')$ sur $H(E)$. Cet isomorphisme coincide avec β car, pour toute $T \in Exp'(E')$ et tout $\theta \in H'(E)$,

$$\langle \beta' T\ ,\ \theta\rangle = \langle T\ ,\ \hat{\theta}\rangle\ .$$

En particulier, si $\theta = \delta_z$ avec $z \in E$, $\hat{\theta}(\zeta) = \exp(\zeta z)$.

D'où

$$(\beta' T)(z) = \langle T\ ,\ e^z\rangle = \hat{T}(z)\ .$$

On dispose ainsi des propriétés de nucléarité nécessaires pour étendre l'exposé 1 en dimension infinie.

Complément à [12]. - A l'e. l. c. s. complexe E est associé le système projectif usuel $(E_i\ ,\ s_{ij})$ d'e. v. de dimension finie. Une profonctionnelle analytique T de type exponentiel sur E est un système cohérent $(T_i)_i$ de $T_i \in Exp'(E_i)$. Leur ensemble est noté $Exp'_{cyl}(E)$, car T définit une forme linéaire sur l'espace $Exp_{cyl}(E)$ des fonctions entières cylindriques de type exponentiel sur E . On pose

$$\hat{T}(\zeta) = T(\exp \zeta) \quad \text{pour tout} \quad \zeta \in E'\ .$$

De (5.8) particularisé à la dimension finie, il résulte que la transformation de Laplace $T \to \hat{T}$ est bijective de $Exp'_{cyl}(E)$ sur $H_G(E)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARON (R.) and SCHOTTENLOHER (M.). - Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property, J. funct. Anal., t. 21, 1976, p.7-30.

[2] BOLAND (P. J.). - Malgrange theorem for entire functions on nuclear spaces, "Proceedings of the international conference on infinite dimensional holomorphy [1973. Lexington]", p. 135-144. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 364).

[3] BOLAND (P. J.). - Holomorphic functions on nuclear spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 209, 1975, p. 275-280.

[4] BOLAND (P. J.). - An example of a nuclea space in infinite dimensional holomorphy (à paraître).

[5] DINEEN (S.). - Holomorphy types on a Banach space, Studia Math., Warszawa, t. 39, 1971, p. 241-288.

[6] DWYER (T., III). - Partial differential equations in Fisher-Fock spaces for the Hilbert-Schmidt holomorphy types, Bull. Amer. math. Soc., t. 77, 1971, p. 725-730.

[7] GUPTA (C.). - Convolution operators and holomorphic functions on a Banach space, Séminaire d'analyse moderne, n° 2, Sherbrooke.

[8] HÖRMANDER (L.). - An introduction to complex analysis in several variables. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1973 (University Series in higher Mathematics).

[9] KISSELMAN (C. O.). - Geometric aspects of the theory of bound for entire functions in normed spaces, "Proceedings of the Symposium on infinite dimensional holomorphy [1975. Campinas]" (à paraître).

[10] KREE (P.). - Calcul symbolique et seconde quantification des fonctions sesquiholomorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 25-28.

[11] KREE (P.). - Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infine, Séminaire Lelong : Analyse, 1975/76 (à paraître).

[12] KREE (P.). - Théorie des distributions et holomorphie en dimension infinie, "Proceedings of the symposium on infinite dimensional holomorphy [1975. Campinas]" (à paraître).

[13] NACHBIN (L.). - Topology on spaces of holomorphic mappings. - New York, Springer-Verlag, 1969 (Ergebnisse der Mathematik, 47).

[14] VIŠIK (M. I.) et FURSIKOV (A. V.). - Intégrales premières analytiques des équations paraboliques non linéaires et leurs applications [en russe], Mat. Sbornik, t. 92 (134), 1873, p. 347-372 ; et Math.-USSR Sbornik, t. 21, 1973, p. 339-369.

[15] WAELBROECK (L.). - Travail non publié.

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS