Paul Krée

# Espaces nucléaires

*Séminaire Paul Krée*, tome 2 (1975-1976), exp. n° 5, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A5_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 5, 13 p.



# ESPACES NUCLÉAIRES

par Paul KRÉE

Jusqu'ici l'analyse en dimension infinie s'est surtout développée dans un cadre banachique. Les considérations suivantes montrent qu'en fait, les <u>espaces nucléaires ou conucléaires jouent un rôle privilégié en analyse de dimension infinie</u>. Si l'on veut faire de l'analyse sur un e. l. c. s. , $E$ , il est naturel d'introduire un espace $F$ de fonctions $f$ numériques $C^\infty$ définies sur $E$ . Pour munir $F$ d'une topologie, du moins si la définition de $F$ ne fait pas intervenir de majorations reliant entre elles les dérivées, il est naturel de considérer le plongement $f \to (f , Df , D^2 f \ldots)$ de $F$ dans un produit $\prod_{j=1}^{\infty} F_j$ d'e. l. c. s. $F_j$ contenant les dérivées successives, $F_j$ étant considéré comme un espace d'applications de $E$ , muni d'une certaine bornologie $B$ (telle que

$$\forall f \in F , \ \forall b \in B , \ \forall j , \ D^j f \text{ soit borné sur } b )$$

à valeurs dans un certain complété $C_j$ de $\odot_j E'$ . Ainsi à chaque chois de $B$ et d'une suite $(C_j)_j$ , il correspond un calcul différentiel sur $E$ , et une théorie des "distributions".

<u>Cas où $E$ est un Banach de dimension infinie</u> [2]. – La bornologie des bornés de $E$ et la bornologie des parties compactes de $E$ donnent déjà des situations très différentes. De plus, de nombreux choix sont possibles pour les espaces $C_j$ , car pour tout $j$ , il existe de nombreuses normes tensorielles sur $\odot_j E'$ . Pour la même raison, dans le cas complexe, il y a de nombreux types d'holomorphie banachiques.

<u>Cas où $E$ , muni de la bornologie compacte, est conucléaire</u>. – Cette condition équivaut d'après [3] à la nucléarité de $E'_c$ , i. e. de $E'$ muni de la topologie de la convergence compacte. Alors il y a une seule topologie localement convexe "raisonnable" sur $\odot_j E'_c$ pour tout $j$ . Si, de plus, l'e. l. c. s. est de Montel, ceci entraîne l'existence dans ce cas d'une seule topologie naturelle sur $F$ . D'ailleurs c'est le cas en particulier de l'analyse en dimension finie (où $\dim E < \infty$ ).

Le cadre nucléaire a d'autres avantages : théorème de Minlos en théorie de la mesure, possibilité de disposer d'espaces de fonctions d'épreuve nucléaires ou conucléaires (voir par exemple l'exposé suivant), ... L'exposé n° 5 suit [1] et [3].

1. Espaces localement convexes séparés nucléaires et espaces bornés convexes séparés conucléaires.

(1) DÉFINITION. - Un e. l. c. s. E est dit nucléaire si, et seulement si, à tout voisinage disqué V de l'origine, on peut en associer un autre U, absorbé par V, et tel que l'application canonique $\Pi_{VU} : E(U) \to E(V)$ soit nucléaire.

On obtient une définition équivalente en supposant seulement que $\Pi_{VU}$ est quasi-nucléaire, ou 1-sommant. Si la topologie de E est définie par une famille fondamentale $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes, il revient au même de supposer que, pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $p_j > \lambda p_i$ pour un certain $\lambda > 0$, et tel que l'application canonique de $E_j = E/p_j^{-1}(0)$ sur $E_i$ soit nucléaire. Un voisinage disqué V de l'origine est dit préhilbertien si l'espace normé E(V) est préhilbertien.

La définition des e. b. c. s. conucléaires se déduit de la définition précédente, en inversant le sens des flèches :

(2) DÉFINITION d'un e. b. c. s. conucléaire. - L'e. b. c. s. E est dit conucléaire si à tout disque borné B de E, on peut en associer un autre C qui absorbe B, et tel que l'application canonique $\Pi[B, C] : E[B] \to E[C]$ soit nucléaire.

Mêmes remarques que précédemment. Voici une proposition reliant ces deux définitions.

(3) PROPOSITION. - Soit E un e. l. c. s.; son dual E' est muni de la bornologie équicontinue (voir exposé 3, point 39). Alors E est nucléaire si, et seulement si, E' est conucléaire.

En effet, si V décrit un système fondamental de voisinages disqués de l'origine de E, son polaire $V^0$ parcourt un système fondamental de disques bornés de E'. De plus, la transposée de toute application canonique $\Pi_{VU} : E(U) \to E(V)$ est l'injection canonique $\Pi'_{VU} : E'[V^0] \to E'[U^0]$. Supposons E nucléaire. Pour tout $V^0$, on peut trouver un voisinage disqué U de l'origine de E, absorbé par V, tel que $\Pi_{VU}$ soit nucléaire. Donc $\Pi'_{VU}$ est nucléaire ; ce qui montre que E' est conucléaire. Réciproquement, la conucléarité de E' entraine la nucléarité de E car si $\Pi'_{VU}$ est nucléaire, alors $\Pi_{VU}$ est quasi-nucléaire d'après l'exposé 4, n° 25.

(4) PROPOSITION. - Tout e. l. c. s. nucléaire E admet un système fondamental de voisinages préhilbertiens.

En effet, pour tout voisinage disqué U de l'origine de E il en existe un autre V tel que l'application canonique $\alpha : E(V) \to E(U)$ soit 1-sommante. Donc il existe une mesure de Pietsch $\mu$ sur la boule unité de E(V)', identifiée à $V^0$, munie de la topologie faible, telle que

$$j_U(x) \leq \int_{V^0} |\langle x , \xi\rangle| \, d\mu(\xi) .$$

Posant

$$p(x) = (\mu(V^0) \int_{V^0} |\langle x , \xi\rangle|^2 \, d\mu(\xi))^{\frac{1}{2}} \text{ pour tout } x \in E ,$$

on obtient une semi-norme continue $p$ sur $E$ telle que $p \leq \mu(V^0)\, j_V$. Cette semi-norme peut être déduite du semi-produit scalaire

$$(x , y) = \mu(V^0) \int \langle x , \xi\rangle \, \overline{\langle y , \xi\rangle} \, d\mu(\xi) .$$

Par conséquent, $E_p = E/p^{-1}(0)$ est un espace préhilbertien.

Autre démonstration. — Pour tout disque équicontinu faiblement fermé $A$ de $E'$, il en existe un autre $B \supset A$ tel que $\Pi[A , B] : E'[A] \to E'[B]$ soit nucléaire. On sait que $\Pi[A , B]$ admet une factorisation $E'[A] \xrightarrow{\alpha} \ell^2 \xrightarrow{\beta} E'[B]$. Si $A_0$ est l'image de la boule unité de $\ell^2$ par $\beta$, $A_0$ est équicontinu, et contient $A$ à une homothétie près ; et $E'[A_0]$ est un espace de Hilbert car isomorphe à un quotient de $\ell^2$. Si $V$ est le polaire de $A^0$, $\widehat{E(V)}$ est un espace de Hilbert car son dual $E'[A_0]$ est hilbertien. On termine en notant que les $V$ et leurs homothétiques forment un système fondamental de voisinages de l'origine de $E$.

Cette deuxième démonstration permet d'énoncer la proposition suivante qui est l'analogue de (4) pour les espaces bornologiques.

(5) PROPOSITION. - Soit $E$ un e. b. c. s. conucléaire. Soient $B$ et $C$ deux disques tels que $B \subset C$, $E[B]$ et $E[C]$ complets, l'injection $E[B] \to E[C]$ étant nucléaire. Alors il existe un disque borné $D$ tel que $B \subset D \subset C$, $E[D]$ étant hilbertien séparable.

(6) PROPOSITION. — Pour qu'un e. l. c. s. $E$ soit nucléaire, il faut et il suffit que, pour tout voisinage ouvert disqué $V$ de l'origine, il en existe un autre $U \subset V$ tel que l'application canonique $\Pi(U , V) : E(U) \to E(V)$ soit 1-sommante; c'est-à-dire qu'il existe une mesure positive $\mu$ sur $U^0$ faible telle que

$$(*) \qquad \forall\, x \in E , \quad j_V(x) \leq \int_{\xi \in U^0} |\langle x , \xi\rangle| \, d\mu(\xi) .$$

En effet, la transposée de $\Pi(U) : E \to E/j_U^{-1}(0)$ est l'injection canonique $\Pi(U)'$ de $E'[U^0]$ dans $E'$, cette injection identifiant l'e. l. c. s. $E'[U^0]$ à un sous-espace de $E'$. De plus, pour tout $x \in E$, la norme de $\Pi(V)x$ dans $E(V)$ est égale à $j_V(x)$. Identifiant $U^0$ à la boule unité fermée faible de

$$E(U)' = E'[U^0] ,$$

la relation (*) signigie donc que $\Pi(U , V)$ est 1-sommante.

(7) ILLUSTRATION. - Pour tout ouvert $\Omega$ de $\underset{\sim}{C}$, l'espace $H$ des fonctions holomorphes sur $\Omega$, muni de la topologie de la convergence compacte, est nucléaire.

(a) On prend d'abord un voisinage $V$ de l'origine de $H$ du type

$$V = \{\varphi \ ; \ p_K(\varphi) = C^{-1} \sup_K |\varphi(z)| < 1\}$$

où $K$ est un disque compact de $\Omega$ où $|z - z_0| \leq r_0$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que le disque $K'$, où $|z - z_0| < r_0 + \varepsilon$, soit contenu dans $\Omega$.

Posons $U = \{\varphi \ ; \ p_{K'}(\varphi) < 1\}$.

Je dis que $\Pi(U, V)$ est 1-sommante. En effet, la formule de Cauchy donne

$$\forall\, z \in K, \ \forall\, \varphi \in H(\Omega), \ \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\, du .$$

D'où

$$(**) \qquad p_K(\varphi) \leq \frac{r_0 + \varepsilon}{2\pi\varepsilon C}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta .$$

Pour tout $w \in K'$, soit $\delta_w$ la forme linéaire $\varphi \to \varphi(w)$ de norme $C$ sur $H(U)$. Donc $C^{-1}\delta_w$ appartient à la boule unité de $H(U)'$ identifiée à $U^0 \subset H'$. La relation (**) peut s'écrire

$$p_K(\varphi) \leq \frac{r_0 + \varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} |\langle f, \delta_{z_0+re^{i\theta}}\rangle|\, d\theta .$$

On définit alors la mesure $\mu$ sur $V^0$ par

$$\forall\, g \in C(V^0), \ \int_{V^0} g\, d\mu = \frac{r_0 + \varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} \langle g, \delta_{z_0+re^{i\theta}}\rangle\, d\theta .$$

On a ainsi prouvé (*).

(b) Soit $L$ un compact quelconque de $\Omega$. Il existe des disques compacts

$$K_1, \dots, K_n \text{ de } \Omega$$

qui recouvrent $L$.

Soit $V = \{\varphi \in H \ ; \ p_L(\varphi) = C^{-1}\sup|\varphi(z)| < 1\}$. Vu (a), il existe des voisinages de l'origine $U_1, \dots, U_n$ et des mesures positives $\mu_1, \dots, \mu_n$ sur $U_1^0, \dots, U_n^0$ telles que

$$\forall\, \varphi, \ \forall\, z \in L, \ \exists\, i, \ C^{-1}|\varphi(z)| \leq \int_{U_1^0} |\langle\varphi, \xi\rangle|\, d\mu_i(\xi) .$$

Le polaire de $U = \bigcap_i U_i$ est $\overline{\Gamma}(U_1^0, \dots, U_n^0) = U^0$. La mesure $\mu = \sum \mu_i$ sur $U^0$ est donc telle que

$$\forall\, \varphi, \ p_L(\varphi) = \sup_L C^{-1}|\varphi(z)| \leq \sum \int_{U_i^0} |\langle\varphi, \xi\rangle|\, d\mu_i(\xi) = \int_{U^0} |\langle\varphi, \xi\rangle|\, d\mu(\xi) .$$

Par conséquent, $\Pi(U, V)$ est 1-sommante. Vu la proposition (6), $H$ est nucléaire.

(8) Remarque. - On démontre de la même manière que, pour tout ouvert $\Omega$ de $\underset{\sim}{R}^n$, l'espace $HAR(\Omega)$ des fonctions harmoniques sur $\Omega$ est nucléaire.

(9) PROPOSITION. - Un e. l. c. s. $E$ est nucléaire si, et seulement si, son complété $\hat{E}$ est nucléaire.

En effet, $E$ et $\hat{E}$ ont même dual $E'$ et, de plus, une partie $P$ de $E'$ est équicontinue si, et seulement si, elle est équicontinue dans le dual $(\hat{E})'$ de $\hat{E}$. Il suffit alors d'appliquer (3).

(10) PROPOSITION. - Toute partie bornée $B$ d'un e. l. c. s. nucléaire $E$ est précompacte.

En effet, soit $V$ un voisinage ouvert disqué de l'origine de $E$. Il existe $U$ du même type, contenu dans $V$, tel que $\Pi(U, V) : E(U) \to E(V)$ soit nucléaire, donc précompacte. Notant $\dot{V}$ et $\dot{B}$ les images de $V$ et $B$ par $\Pi(V)$, il existe une partie finie $x_1 \dots x_n$ de $E$ telle que

$$\dot{B} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \dot{x}_j + \dot{B} .$$

Donc

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{n} x_j + B .$$

(11) COROLLAIRE.

(a) Tout e. l. c. s. $E$ nucléaire quasi-complet est semi-réflexif.

(b) La topologie forte de $E'$ coincide avec la topologie de Mackey.

(a) En effet, vu (10), tout borné $B$ de $E$ est précompact. On sait que dans un e. l. c. s. quasi complet, toute partie précompacte est relativement compacte ; donc $B$ est relativement compact, et a fortiori faiblement relativement compact. Comme tout borné de $E$ est faiblement relativement compact, $E$ est semi-réflexif.

(b) est vraie, plus généralement, si $E$ est semi-réflexif. En effet, il y a alors identité entre la famille des bornés de $E$, et la famille des parties faiblement relativement compactes. Les $\mathfrak{S}$-topologies associées à ces deux familles coïncident.

La proposition suivante est banale en analyse dd dimension finie ; mais elle est peut-être importante en analyse de dimension infinie.

(12) PROPOSITION. - Un e. v. n. $E$ est nucléaire si, et seulement si, $E$ est de dimension finie.

En effet, $E$ est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte. Il suffit alors d'appliquer (10).

(13) THÉORÈME admis (voir [1] ou [3]). - Soit $E$ un espace de Fréchet. Alors $E$ est nucléaire si, et seulement si, son dual fort est nucléaire.

(14) Exemple. - Vu (7) et (8), l'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega$ de $\underset{\sim}{C}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte est nucléaire. Cet espace est de Fréchet. Donc l'espace $H'(\Omega)$ des fonctionnelles analytiques

sur $\Omega$ est nucléaire.

Rappel. - Toute $T \in H'(\Omega)$ est rpprésentable par une mesure $\mu$ à support compact sur $\Omega$.

## 2. Propriétéq de permanence des espaces nucléaires.

(15) THÉORÈME.

(a) Tout sous e. l. c. s. d'un e. l. c. s. nucléaire est nucléaire.

(b) Tout quotient d'un e. l. c. s. nucléaire est nucléaire.

(c) Tout produit ou toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire.

(d) Toute somme directe d'une famille dénombrable d'e. l. c. s. nucléaires est nucléaire. Toute limite inductive d'une famille dénombrable d'e. l. c. s. nucléaires est nucléaire.

Démonstration.

(a) Soit $E$ nucléaire et $F$ un sous-espace de $E$. Pour tout voisinage fermé disqué $U$ de $E$, il en existe un autre $V \subset U$ tel que $\Pi(V, U) : E(V) \to E(U)$ soit nucléaire. La famille $\mathcal{V}(F_0)$ des traces sur $F$ des éléments d'une base disquée $\mathcal{V}(F)$ de voisinages de zéro de $E$ est une base de voisinages disqués de l'origine de $F$. Posant

$$U_0 = F \cap U \quad \text{et} \quad V_0 = F \cap V ,$$

il suffit donc de montrer que $\Pi(V_0, U_0) : F(V_0) \to F(U_0)$ est quasi nucléaire. Or $F(V_0)$ et $F(U_0)$ s'identifient respectivement à des sous-espaces normés de $E(U)$ et $F(V)$, et $\Pi(V_0, U_0)$ est induite par l'application nucléaire $\Pi(V, U)$. Il suffit donc d'appliquer (24) exposé 4.

(b) Soit $Q = E/F$ le quotient d'un e. l. c. s. nucléaire $E$. La transposée de la surjection canonique $s$ de $E$ sur $Q$ est l'injection $s'$ de $F^0$ dans $E'$. Lorsque $U$ décrit $\mathcal{V}(E)$, l'ensemble des disques $\dot{U} = \{s(u) ; u \in U\}$ est un système fondamental $\mathcal{V}(F)$ de voisinages disqués de l'origine de $F$. De plus, de la relation $(\dot{U})^0 = (sU)^0 = U^0 \cap F^0$, il résulte que l'e. v. n. $Q(\dot{U}^0)$ est le sous-espace normé $F^0 \cap E'(U^0)$ de $E'(U^0)$. Tout $U \in \mathcal{V}(E)$ contient $V$ dans $\mathcal{V}(E)$ tel que $\Pi(V, U)' : E'(U^0) \to E'(V^0)$ soit quasi nucléaire. Or $\Pi(\dot{V}^0, \dot{U}^0)$ est induite par $\Pi(V, U)'$. Donc vu (24) exposé 4, $\Pi(\dot{V}^0, \dot{U}^0)$ est quasi nucléaire. Donc $Q$ est nucléaire.

(c) Montrons d'abord qu'un produit fini d'e. l. c. s. nucléaires $E_i$ est nucléaire. Pour simplifier l'écriture montrons seulement que $P = E_1 \times E_2$ est nucléaire. Pour tout $i$, pour tout $U_i \in \mathcal{V}(E_i)$, il existe $V_i \subset U_i$, $V_i \in \mathcal{V}(E_i)$ tel que $\Pi_i(V_i, U_i) : E_i(V_i) \to E_i(U_i)$ soit nucléaire. Posons

$$U = U_1 \times U_2 , \quad V = V_1 \times V_2 .$$

Alors l'application $P(V, U)$ :

$$P(V) = E_1(V_1) \times E_2(V_2) \xrightarrow{P(V,U)} P(U) = E_1(U_1) \times E_2(U_2)$$

est le produit de deux applications nucléaires. Elle est donc nucléaire, et $P$ est nucléaire. Soit maintenant $I$ un ensemble quelconque, et $P = \prod_{i\in I} E_i$. Pour montrer que $P$ est nucléaire, on voit tout de suite qu'on est ramené au cas où $I$ est fini car l'origine de $P$ admet pour système fondamental disqué les parties du type $\prod_{i\in I} U_i$, avec $U_i \in \mathcal{V}(E_i)$, avec $U_i = E_i$, sauf au plus pour un nombre fini d'indices $i$. Comme toute $\varinjlim$ d'e. l. c. s. $E_i$ s'identifie à un sous-espace de $\prod E_i$, il résulte de (a) que toute $\varinjlim$ d'e. l. c. s. nucléaires est nucléaire.

(d) Soit $S = \coprod_{n=1}^{\infty} E_n$, les espaces $E_n$ étant nucléaires. Pour tout $n$, pour tout $U_n \in \mathcal{V}(E_n)$, il existe $V_n$ absorbé par $U_n$, tel que l'application canonique $C_n : E_n(V_n) \to E_n(U_n)$ soit quasi nucléaire de norme plus petite que $2^{-n}$. Donc il existe des éléments $e_n'^1$, $e_n'^2$, ... de $E_n'$ tels que

$$\forall\, x_n \in E_n(V_n), \quad |C_n\, x_n| \leq \sum \langle e_n'^j , x_n\rangle \,;\quad \sum_{j=1}^{\infty} |e_n'^j| \leq 2^{-n} .$$

Si $U$ est un voisinage disqué de l'origine de $S$, $U_n$ désigne sa trace sur $E_n$. On a une injection isométrique $E_n'[U_n^0]$ dans $E'[U^0]$ ; et $f_n^0$ désigne l'image de $e_n'^j$ par cette injection. Alors $V = \coprod V_n$ est un voisinage disqué de l'origine de $S$. De plus, $\Pi(V , U) = \prod_1^{\infty} C_n$ est quasi nucléaire car

$$\sum_{n,j} |f_n^j| \leq \sum_n 2^{-n} < \infty$$

et, pour tout $x \in E(V)$,

$$|Cx| = \sup_n |C_n\, x_n| \leq \sum_{j,n} |\langle f_n^j , x\rangle| .$$

Par conséquent, $S$ est nucléaire. Il en résulte que toute limite inductive d'une famille dénombrable d'e. l. c. s. nucléaires est nucléaire.

## 3. Nucléarité et produit tensoriel topologique.

(16) PROPOSITION. - Soient $E$ et $F$ deux e. l. c. s. Si $E$ est nucléaire

$$E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F .$$

Démonstration. - Comme $\pi > \varepsilon$, il suffit de montrer l'inclusion inverse. Soient $U$ et $W$ deux voisinages ouverts convexes disqués de l'origine dans $E$ et $F$ respectivement. On peut trouver un voisinage convexe disqué $V$ de l'origine dans $E$ tel que $V \subset U$, l'application canonique $E(V) \to E(U)$ étant nucléaire. Il résulte alors de (14) exposé 4, que l'application canonique

$$E(V) \otimes_\varepsilon F(W) \to E(V) \otimes_\pi F(W)$$

est continue, ce qui prouve que $\varepsilon$ est plus fine que $\pi$.

(17) Plus généralement, en appliquant (15), exposé 4, on obtient le résultat sui-

vant.

Si l'on a $n$ e. l. c. s. $E_j$ $(1 \leq j \leq n)$, les espaces $E_2, \dots, E_n$ étant nucléaires, alors les topologies $\pi$ et $\varepsilon$ coincident sur $\bigotimes_{j=1\dots n} E_j$.

(18) On a encore :

Si $E$ est un e. l. c. s. nucléaire, alors les topologies $\pi$ et $\varepsilon$ coincident sur $\bigodot_n E$ et $\Lambda_n E$.

(19) PROPOSITION. - Si les e. l. c. s. $E_j$ sont nucléaires $(1 \leq j \leq n)$, alors le produit tensoriel $T = \bigotimes_{1 \leq j \leq n} E_j$ muni de la topologie $\pi = \varepsilon$, est nucléaire.

En effet, pour tout $j$, soit $U_j$ un voisinage disqué ouvert de l'origine dans $E_j$. Il existe $V_j$ disqué ouvert $\subset U_j$ tel que $\alpha_j : E(V_j) \to E(U_j)$ soit nucléaire. Alors vu la propriété (16) de l'exposé précédent, $\alpha = \bigotimes \alpha_j$ est nucléaire de $\bigotimes_{j,\pi} E(V_j)$ dans $\bigotimes_{j,\pi} E(U_j)$. Ceci prouve que l'e. l. c. s. $(T, \Pi)$ est nucléaire.

(20) COROLLAIRES.

(a) Le complété de $T$ est nucléaire.

(b) Si $E$ est un e. l. c. s. nucléaire, alors pour tout $n \geq 1$, les e. l. c. s. $\bigotimes_n E$, $\hat{\bigotimes}_n E$, $\bigodot_n E$, $\Lambda E$, $\hat{\bigodot} E$, $\hat{\Lambda} E$ sont nucléaires.

(21) PROPOSITION. - Soient $n$ e. l. c. s. nucléaires $E_j$, $1 \leq j \leq n$. L'espace $L(E_1, \dots, E_n)$ des formules multilinéaires continues sur $E_1 \times \dots \times E_n$ est muni de la bornologie équicontinue. Chaque dual $E'_j$ est muni de la bornologie équicontinue. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathfrak{U}_j$ désigne un système fondamental de voisinages disqués de l'origine. On note $\check{\bigotimes} E'_j$ la limite inductive bornologique des espaces de Banach $\hat{\bigotimes} E'[U_j^0]$, $U_j$ décrivant $\mathfrak{U}_j$. Alors, on a un isomorphisme bornologique.

$$L(E_1, \dots, E_n) \simeq \check{\bigotimes} E'_j .$$

(a) On peut d'abord préciser le système inductif des $\hat{\bigotimes} E'_{U_j^0}$. Pour $U_j \subset V_j$, $U_j$ et $V_j \in \mathfrak{U}_j$, on a des applications canoniques

$$E_j(U_j) \to E_j(V_j) \quad \text{et} \quad E'_j[V_j^0] \to E'_j[U_j^0] ;$$

d'où, par tensorisation, une application $\bigotimes E'_j[V_j^0] \to \bigotimes E'_j[U_j^0]$, qui se prolonge par continuité aux produits $\pi$ complétés.

(b) Soit $H$ une partie équicontinue de $L(E_1, \dots, E_n)$. Pour tout $j$, il existe un voisinage disqué $V_j$ de l'origine de $E_j$ tel que tous les éléments de $H$ soient uniformément bornés sur $V_1 \times \dots \times V_n$. Par passage au quotient, $H$ définit une partie équicontinue $\tilde{H} \subset L(E_1(V_1), \dots, E_n(V_n))$. Par application de (17) exposé 4, $\tilde{H} \in \hat{\bigotimes} E'[U_j^0]$.

(c) Réciproquement, soit $\tilde{H}$ une partie bornée de ce produit tensoriel complété. Ceci définit canoniquement une partie bornée de $L(E(U_1) \times \dots \times E(U_n))$, donc une partie équicontinue de $L(E_1 , \dots , E_n)$.

## 4. Exemples d'espaces nculéaires.

On commence d'abord par une proposition très simple due à A. GROTHENDIECK (prop. 8, chap. II de [1]) montrant que les espaces usuels de suites numériques sont nucléaires.

Un poids $a^h = (a_0^h , a_1^h , \dots)$ sur un ensemble dénombrable $D$ est une suite de nombres $a_i^h > 0$. Soit $(a^h)_h$ une suite croissante de poids, indexée dans $\underset{\sim}{N}$ par exemple : $h \geq k \Longrightarrow a_i^h \geq a_i^k$ pour tout $i$.

(22) PROPOSITION. - <u>On suppose que, pour tout</u> $n$, <u>il existe</u> $m > n$ <u>tel que</u>

$$\Sigma_{i \in D} \, a_i^n / a_i^m < \infty .$$

<u>Alors l'espace</u> $S$ <u>des suites numériques</u> $\lambda = (\lambda_0 , \lambda_1 \dots)$ <u>telles que</u>

$$\forall \, n , \quad |\lambda_n| = \Sigma_{i \in D} \, a_i^n \, |\lambda_i| < \infty$$

<u>est nucléaire</u>.

En effet, le dual de l'espace $E_n = E$ muni de la norme $|\cdot|_n$ est l'espace $E'_n$ des suites $\xi = (\xi_0 , \xi_1 , \dots)$ telles que $\sup|\xi|$ soit borné, la dualité étant donnée par $\sum_i x_i \, \xi_i \, a_i^n$. Soit $e_i$ la suite numérique dont tous les termes sont nuls sauf le i-ième, égal à $1$. L'application identique $I : E_m \to E_n$ peut s'écrire

$$I = \Sigma \frac{e_i}{a_i^m} \otimes e_i .$$

Cette application est nucléaire car

$$\Sigma \, \left|\frac{e_i}{a_i^m}\right|_{E'_m} \, |e_i|_{E_n} = \Sigma \, a_i^n / a_i^m < \infty .$$

(23) <u>Exemple</u>. - Soit $s_n$ l'espace des suites numériques $u = (u_\alpha)_\alpha = (u_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ indexées dans $\underset{\sim}{Z}^n$, à décroissance rapide. Cet espace est muni usuellement de la topologie définie par la famille fondamentale de semi-normes

$$u \to \sup(1 + |\alpha|)^k \, |u_\alpha| , \quad k = 1 , 2 \dots$$

Cette famille est équivalente à la famille fondamentale $u \to \Sigma(1 = |\alpha|)^k \, |u_\alpha|$. On peut appliquer la proposition (22) aux poids $a_i^k = (1 + |i|)^k$. Donc $s$ est nucléaire.

(24) <u>Exercice</u>. - L'espace des fonctions entières sur $\underset{\sim}{C}^n$ de type exponentiel est nucléaire.

(25) COROLLAIRE. – "Tous" les espaces localement convexes de l'analyse en dimension finie sont nucléaires, réflexifs, ainsi que leurs duals.

Plus précisément, les espaces suivants sont nucléaires :

Espace $C^\infty(\mathbb{R}^n/2\pi\lambda\mathbb{Z}^n)$ des fonctions $C^\infty$ sur tout tore $\Pi^n = (\mathbb{R}/2\pi\lambda\mathbb{Z})^n$ pour tout $\lambda > 0$. En effet, toute $\varphi$ de cet espace peut être développée en série de Fourier

$$\varphi(\theta) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \exp i\lambda^{-1}\langle\alpha, \theta\rangle .$$

On obtient ainsi un homéomorphisme de cet espace sur $s_n$.

Espace $\mathcal{D}_K(\Omega)$ des fonctions $C^\infty$ sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ à support contenu dans une partie compacte $K$ de $\Omega$. En effet, soit $\lambda$ suffisamment grand pour que

$$\max_i |x_i| \leqslant \Pi\lambda \quad \text{pour tout} \quad x = (x_i)_i \in K .$$

Alors $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est isomorphe à un sous-espace de l'e. l. c. s. $\mathcal{D}(\Pi^n)$. Il suffit alors d'appliquer (15).

Espace $\mathcal{D}(\Omega) = \varinjlim \mathcal{D}_K(\Omega)$, d'après (15-d).

Espace $\mathcal{E}(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, on a une application $m_\alpha : \varphi \to \alpha\varphi$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}_K(\Omega)$. En faisant varier $\alpha$ et $K$, il apparait que $\mathcal{E}(\Omega)$ est la limite projective des $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K$ décrivant la famille des compacts de $\Omega$. Il suffit alors d'appliquer (15-c).

Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En développant toute $\varphi \in \mathcal{S}$ en fonctions d'Hermite, il apparait que l'e. l. c. s. $\mathcal{S}$ est isomorphe à $s_n$. On peut aussi construire un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur un sous-espace de $\mathcal{D}(\Pi^n)$ ou de l'espace $\mathcal{D}$ de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

## 5. Théorème général des noyaux.

(26) PROPOSITION. – L'application identique d'un espace nucléaire $E$ est limite uniforme sur tout compact $K$ de $E$, d'opérateurs linéaires continus de rang fini.

En effet, soit $U$ un disque ouvert contenant l'origine ; il s'agit de trouver un opérateur $\ell$ continu de rang fini tel que $x - \ell x \in U$ pour tout $x \in K$. Soit $V$ un disque ouvert contenant l'origine tel que $V \subset U$, l'application canonique $E(V) \to E(U)$ étant nucléaire. On a

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(V) & \xrightarrow{\alpha} & E(U) \end{array}$$

avec $\alpha = \sum \lambda_k x'_k \otimes y_k$, les $x'_k$ appartenant à la boule unité de $E'[V^0]$, les $y_k$ appartenant à la boule unité de $E(U)$, $(\lambda_k) \in \ell^1$. Comme $K$ est borné, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon K \subset V$. On peut trouver $N$ tel que

$$x - \sum_1^N \lambda_k x'_k \otimes y_k \in \varepsilon U \quad \text{pour tout} \quad x \in V .$$

Ceci entraine $x - \sum_1^N \lambda_k x'_k \otimes y_k \in U$ pour $x \in K \subset \varepsilon^{-1} V$ .

(27) THÉORÈME <u>général des noyaux</u>. – <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux e. l. c. s. complets</u>, E <u>étant nucléaire</u>. <u>Alors</u>

$$E \hat{\otimes} F \simeq L_\varepsilon(E'_b , F) .$$

Vu (11-b), la topologie forte et la topologie de Mackey coincident sur E : soit $E'_b = E'_\tau$ . Vu (1.57) et (1.58) exposé 3, il suffit de montrer que $E \otimes F$ est dense dans $L_\varepsilon(E'_\tau , F)$ . Ce dernier espace est isomorphe à $L_\varepsilon(F'_\sigma , E_\sigma)$ : voir preuve de (1.55) exposé 3. Soit $v \in L_\varepsilon(F'_\sigma , E_\sigma)$ . Si B est une partie équicontinue de $F'_\sigma$, son adhérence faible $\overline{B}$ l'est aussi, donc $\overline{B}$ est faiblement compacte. Comme v est continue, $v(\overline{B})$ est aussi faiblement compacte. Vu (10), $v(\overline{B})$ est compact dans E . Vu (26), pour tout voisinage U de l'origine de E , il existe un opérateur $u : E \to E$ continu de rang fin tel que $v(f') - u(vf') \in U$ , pour tout f' de B . On a donc trouvé $u \circ v : F'_\sigma \to E_\sigma$ , continu de rang fini, approchant arbitrairement l'élément u de $L_\varepsilon(E'_\sigma , F)$ .

(28) COROLLAIRE 1. – <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux e. l. c. s.</u>. <u>On suppose</u> E <u>réflexif</u>, $E'_b$ <u>nucléaire et complet</u>, F <u>complet</u>.

<u>Alors</u>

$$E'_b \hat{\otimes} F \simeq L_b(E , F) .$$

En effet,

$$E'_b \otimes F \simeq L_\varepsilon(E'' , F) \simeq L_\varepsilon(E , F) .$$

Or comme E est réflexif, E' l'est aussi. Donc toute partie bornée de E est équicontinue. Donc

$$L_\varepsilon(E , F) = L_b(E , F) .$$

(29) COROLLAIRE 2. – <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>des Fréchets</u>, E <u>étant nucléaire</u>. <u>Alors</u>

$$E \hat{\otimes} F \simeq L(E'_b , F)$$

$$E'_b \hat{\otimes} F \simeq L(E , F)$$

$$E'_b \hat{\otimes} F'_b \simeq L(E , F'_b) \simeq B(E , F) \simeq (E \hat{\otimes} F)' .$$

## 6. Exemples de produits tensoriels complétés.

Soient E et F deux e. l. c. s., E étant nucléaire.

(30) La méthode générale pour montrer que $E \hat{\otimes} F$ est égal à un e. l. c. s. complet donné G , de topologie t , consiste

(a) à montrer que $E \otimes F$ est dense dans G ,

(b) puis à montrer que $t \subset \pi$ et $\varepsilon \subset t$ .

Comme les topologies $\pi$ et $\varepsilon$ coincident sur $E \otimes F$, il en résulte que

$$t = \pi = \varepsilon \text{ .}$$

(31) Exemple.

$$H(\underset{\sim}{C}^m) \hat{\otimes} H(\underset{\sim}{C}^n) \simeq H(\underset{\sim}{C}^m \times \underset{\sim}{C}^n) \text{ .}$$

En effet, la formule de Taylor montre que $E \otimes F$ est dense dans l'e. l. c. s. $G$ avec

$$E = H(\underset{\sim}{C}^m) \text{ , } F = H(\underset{\sim}{C}^n) \text{ , } G = H(\underset{\sim}{C}^m \times \underset{\sim}{C}^n) \text{ .}$$

Soit $t$ la topologie de la convergence compacte sur $G$. Pour montrer $t \subset \pi$, il suffit, vu la propriété universelle de $\pi$ de montrer que l'application bilinéaire canonique $(f , g) \to f.g$ de $E \times F$ dans $G$ est continue, ce qui est clair. Montrons $\varepsilon \subset t$. Soit $(f_j)_j$ une suite de $E \otimes F$ qui tend vers zéro pour $t$. Alors elle converge uniformément sur toute partie équicontinue de $G'$. Or si $A'$ et $B'$ sont respectivement des parties équicontinues de $E'$ et $F'$, $A' \otimes B'$ est équicontinu dans $G'$. Donc $\varepsilon_{A',B'}(f_j) \to 0$ si $j \to \infty$.

Vu (30), la formule (31) est montrée.

(32) Exercice.

$$s \hat{\otimes} s \simeq s_2$$

$$s' \hat{\otimes} s' \simeq (s_2)' \text{ .}$$

Soient $K$ et $L$ deux compacts d'intérieur non vide, de $\underset{\sim}{R}^m$ et de $\underset{\sim}{R}^n$ respectivement. Alors

$$C_K^\infty(\underset{\sim}{R}^m) \hat{\otimes} C_L^\infty(\underset{\sim}{R}^n) \simeq C_{K\times L}^\infty(\underset{\sim}{R}^{m+n}) \text{ .}$$

(33) THÉORÈME (A. GROTHENDIECK [1] (admis ici)). - Soient $E$ et $F$ deux Fréchets. Alors tout compact de $E \hat{\otimes}_\pi F$ est contenu dans l'enveloppe fermée disquée de $A \otimes B$, où $A$ et $B$ sont des compacts de $E$ et $F$ respectivement.

(34) LEMME. - Soient $\Omega_1$ un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, et soit $\Omega_2$ un ouvert de $\underset{\sim}{R}^p$. Alors on a un isomorphisme topologique :

$$\mathcal{D}'(\Omega_1) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\Omega_2) \simeq \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) \text{ .}$$

En effet, $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ étant bornologique, $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est complet. Comme $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ est nucléaire, les topologies $\pi$ et $\varepsilon$ coincident sur

$$T = \mathcal{D}'(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}'(\Omega_2) \text{ .}$$

Comme $T$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$, il suffit de montrer que $\varepsilon$ coincide avec la trace $\theta$ sur $T$ de la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. La topologie $\varepsilon$ est définie par les semi-normes

$$t \to p_{AB}(t) = \sup\{|\langle t , \varphi \otimes \psi\rangle| \text{ ; } \varphi \in A \text{ ; } \psi \in B\}$$

où $A$ et $B$ sont respectivement des bornés de $\mathcal{D}(\Omega_1)$, et $\mathcal{D}(\Omega_2)$. La topologie $\theta$ est définie par les semi-normes

$$t \to p_C(t) = \sup\{ |\langle t , f\rangle| \; ; \; f \in \text{borné } C \text{ de } \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)\} .$$

Donc $\varepsilon \subset \theta$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que tout borné $C$ de $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est contenu dans l'enveloppe fermée disquée du produit tensoriel $A \otimes B$, pour $A$ et $B$ convenable. Comme $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est une limite inductive stricte, $C$ est contenu dans un espace de Fréchet $\mathcal{D}_K(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 33. Ce lemme et le théorème général des noyaux (27) entrainent le théorème suivant.

(35) THÉORÈME <u>des noyaux de</u> L. SCHWARTZ. - <u>On a des isomorphismes topologiques</u>

$$L(\mathcal{D}(\Omega_1) , \mathcal{D}'(\Omega_2)) \simeq \mathcal{D}'(\Omega_1) \hat{\otimes} \mathcal{D}'(\Omega_2) \simeq \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2) .$$

Enoncés analogues en remplaçant la lettre $\mathcal{D}$ par $\mathcal{E}$, ou $\mathcal{S}$, ...

Commentons ce théorème, qui est à l'origine de la théorie des espaces nucléaires. Un grand intérêt de la théorie des distributions est qu'elle fournit un cadre commode, où l'on peut faire des opérations sur des fonctions, ou des mesures généralisées. De la même manière, un grand intérêt du théorème des noyaux (35) est qu'il fournit un cadre pour étudier certaines classes d'oparateurs linéaires continus $L : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{S} \to \mathcal{S}'$. En effet, il est ainsi associé à un être "abstrait" $L$, une distribution $T(x , y)$ sur $\Omega_2 \times \Omega_1$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1) , \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega_2) , \quad \langle L\varphi , \psi\rangle = \langle T , \psi \otimes \varphi\rangle .$$

Ceci peut s'écrire formellement

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1) , \quad (L\varphi)(x) = \int_{\Omega_1} \varphi(y) \, dT(x , y) .$$

Dans le cas particulier où $T$ est définie par une fonction $K(x , y)$ localement intégrable, $K$ est appelé usuellement le noyau de la transformation intégrale $\varphi \to \int K(x , y) \varphi(y) \, dy$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (A.). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[2] KRÉE (P.). - Calculs différentiels et théories des distributions sur un espace de Banach, Séminaire Pierre Lelong : Analyse, année 1974/75. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 524).

[3] PIETSCH (A.). - Nuclear locally convex spaces. - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Ergebnisse der Mathematik, 66).

Paul KRÉE
32 rue Miollis
75015 PARIS