Charles M. Marle

Quantification géométrique : théorie et exemples

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. nº 2, p. 1-35
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A2_0>

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 2, 35 p.

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE : THÉORIE ET EXEMPLES.

par Charles M. MARLE

I. Rappels sur la formulation symplectique de la mécanique classique [1]

On considère seulement le cas de systèmes conservatifs à liaisons indépendantes du temps et à un nombre fini de degrés de liberté.

(a) Equations de Hamilton.

A tout instant $t \in \mathbb{R}$, la position et la vitesse d'un système mécanique sont représentées par un point x d'une variété différentielle connexe X appelée espace des phases. X est munie d'une forme symplectique ω, c'est-à-dire d'une 2-forme différentielle fermée $(d\omega = 0)$, telle qu'en tout point x de X, l'application

$$v \in T_x X \ , \quad v \to i(v)\, \omega_x \in T_x^* X \ ,$$

($i(v)$ désignant le produit intérieur par v) soit un isomorphisme de l'espace vectoriel $T_x X$ tangent à X au point x, sur son dual $T_x^* X$. On sait qu'alors X est de dimension paire $2n$.

On a d'autre part une fonction différentiable $H : X \to \mathbb{R}$ appelée hamiltonien du système. Le mouvement du système au cours du temps est décrit par l'équation différentielle :

$$\text{(I.1)} \qquad \frac{dx(t)}{dt} = {}^{\#}dH(x(t)) \ ,$$

où ${}^{\#}dH$, appelé gradient symplectique de H, est le champ de vecteurs unique sur X tel que

$$\text{(I.2)} \qquad \forall\, x \in X \ , \quad i({}^{\#}dH(x))\, \omega_x = - dH(x) \ .$$

(b) Crochets de Poisson, intégrales premières.

On désigne par $\mathbb{R}(X)$ (resp. $\mathbb{C}(X)$) l'espace des fonctions réelles (resp. complexes) C^∞ sur X. Soient f et $g \in \mathbb{R}(X)$. On appelle crochet de Poisson de f et g la fonction, élément de $\mathbb{R}(X)$,

$$\text{(I.3)} \qquad \{f\ ,\ g\} = - i({}^{\#}dg)\, df = + i({}^{\#}df)\, dg = \omega({}^{\#}df, {}^{\#}dg) \ .$$

$\mathbb{R}(X)$, muni du crochet de Poisson, est une algèbre de Lie réelle, et l'application $f \to {}^{\#}(df)$ qui, à une fonction élément de $\mathbb{R}(X)$ fait correspondre son gradient symplectique, est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathbb{R}(X)$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{C}(X)$ des champs de vecteurs différentiables sur X (avec pour loi de composition le crochet usuel des champs de vecteurs) :

$$\text{(I.4)} \qquad {}^{\#}d(\{f\ ,\ g\}) = [{}^{\#}df\ ,\ {}^{\#}dg]$$

et le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des fonctions constantes sur X , qu'on identifiera à $\underset{\sim}{R}$.

Si d'autre part $t \to x(t)$ est une courbe intégrale de l'équation de Hamilton (1), on a, pour tout $f \in \underset{\sim}{R}(X)$,

(I.5) $$\frac{d}{dt}(f(x(t))) = \{H , f\}(x(t)) ,$$

donc f est une intégrale première du mouvement si, et seulement si, $\{H , f\} = 0$.

(c) Actions hamiltoniennes de groupes [4].

Supposons, pour simplifier, que pour toute donnée de Cauchy $x_0 \in X$, la solution $x(t)$ de l'équation de Hamilton (I.1) vérifiant $x(0) = x_0$ existe pour tout $t \in \underset{\sim}{R}$. On dit alors que le champ de vecteurs $^{\#}dH$ est complet ou, selon la terminologie de SOURIAU, que "tous les mouvements sont éternels". Le flot du champ de vecteurs $^{\#}(dH)$ est alors un groupe, à un paramètre $t \in \underset{\sim}{R}$, de difféomorphismes φ_t de X:

(I.6) $\varphi_t(x_0) = x(t)$ si $t \to x(t)$ est la solution de (1) telle que $x(0) = x_0$,

(I.7) $$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2} .$$

On voit que, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}$, φ_t laisse invariante la forme symplectique ω :

(I.8) $$\overset{*}{\varphi_t}\,\omega = \omega .$$

Cela résulte en effet de ($\mathcal{L}(^{\#}(dH))$ désignant la dérivée de Lie selon $^{\#}(dH)$):

$$\mathcal{L}(^{\#}(dH))\,\omega = i(^{\#}(dH))\,d\omega + di(^{\#}(dH))\,\omega = di(^{\#}(dH))\,\omega = -\,d(dH) = 0 .$$

φ_t est dit "groupe à un paramètre de symplectomorphismes de X ".

De même, soit $f \in \underset{\sim}{R}(X)$. Si le champ de vecteurs $^{\#}(df)$ est complet, son flot est un groupe, à un paramètre $s \in \underset{\sim}{R}$, de symplectomorphismes ψ_s de X :

(I.9) $$\frac{d}{ds}(\psi_s(x)) = {}^{\#}(df)(\psi_s(x)) ,$$

et on voit que f est une intégrale première de (1) si, et seulement si, H est constant sur les orbites de ψ_s .

Au lieu de considérer séparément différentes actions de groupes à un paramètre de symplectomorphismes de X , correspondant à différentes fonctions $f \in \underset{\sim}{R}(X)$ (dont l'une, H , est le hamiltonien), il peut être plus intéressant de considérer un groupe de Lie G , de dimension finie ≥ 1 , agissant à gauche sur X par symplectomorphismes. On notera cette action :

(I.10) $$g \in G ,\ x \in X \to g \circ x \in X .$$

Soit ξ un élément de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G . Il lui correspond un champ de vecteurs ξ_X sur X :

(I.11) $$\xi_X(x) = \frac{d}{ds}(\exp(-s\xi) \circ x)\Big|_{s=0} ,$$

et l'application $\xi \to \xi_X$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}(X)$ (espace des champs de vecteurs C^∞

sur X) est un homomorphisme d'algèbres de Lie :

(I.12) $$[\xi_X , \eta_X] = [\xi , \eta]_X .$$

On vérifie facilement que si G agit par symplectomorphismes, c'est-à-dire si

(I.13) $$\forall\, g \in G , \quad g^* \omega = \omega$$

alors la forme :

(I.14) $$i(\xi_X)\, \omega$$

est fermée (on dit que ξ_X est un champ de vecteurs localement hamiltonien). Réciproquement, si (I.14) est fermée pour tout $\xi \in \mathcal{G}$, et si G est connexe, G agit par symplectomorphismes. Si la forme (I.14) est, non seulement fermée, mais exacte, on dit que ξ_X est un champ de vecteurs hamiltonien. Si c'est le cas pour tout $\xi \in \mathcal{G}$, on dit que l'action du groupe G (désormais supposé connexe) sur X est hamiltonienne. Dans ce cas, il existe une application J de X dans le dual $\mathcal{G}^*$ de $\mathcal{G}$, appelée moment de l'action de G sur X , telle que

(I.15) $$\forall\, \xi \in \mathcal{G} , \quad \xi_X = + {}^{\#}(d(\langle J , \xi\rangle)) .$$

Si X est connexe, J est déterminé à une constante (élément de $\mathcal{G}^*$) additive près.

Considérons en particulier le cas du groupe à un paramètre φ_t , défini au moyen de l'hamiltonien H par (I.6). Dans ce cas, $G = \underset{\sim}{R}$, groupe additif , agissant sur X par

$$(t , x) \in \underset{\sim}{R} \times X \to \varphi_{-t}(x)$$

(la convention de signe, qui peut paraître peu naturelle, étant choisie pour assurer la cohérence avec I.11). L'algèbre de Lie de G est $\mathcal{G} = \underset{\sim}{R}$, avec pour convention définissant l'application exponentielle :

$$\exp(t\xi) = t\xi \quad (t \in \underset{\sim}{R} , \quad \xi \in \underset{\sim}{R} = \mathcal{G} , \quad \exp(t\xi) \in \underset{\sim}{R} = G) .$$

On a alors, en prenant $\xi = 1$,

$$(1)_X(x) = \frac{d}{dt} (\exp(- t.1)x)\,\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)\,\Big|_{t=0} = {}^{\#}dH(x) = {}^{\#}d\langle H , 1\rangle(x)$$

(en prenant pour couplage de $\mathcal{G} = \underset{\sim}{R}$ avec son dual $\mathcal{G}^* = \underset{\sim}{R}$, le produit usuel). On voit que dans cet exemple le moment de $G = \underset{\sim}{R}$ n'est autre que $H : X \to \underset{\sim}{R}$.

De même, si $f \in \underset{\sim}{R}(X)$ est tel que ${}^{\#}(df)$ soit complet, le flot de ${}^{\#}(df)$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de X , qu'on peut considérer comme une action hamiltonienne du groupe additif $\underset{\sim}{R}$ sur X , dont le moment est f .

(d) Exemple standard.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n , V^* son dual. On prend $X = V \times V^*$. On convient, chaque fois qu'on rapporte V à une base (dans laquelle les coordonnées d'un point $q \in V$ sont notées $q^1 , \dots , q^n$), de rapporter V^* à la base duale (dans laquelle les coordonnées d'un point $p \in V^*$ sont notées

$p_1 , \dots , p_n$). On prend pour forme symplectique

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$$

(on voit facilement qu'elle ne dépend pas du choix des bases ; on peut d'ailleurs la définir de manière intrinsèque très simplement).

Un hamiltonien $H : X \to \underset{\sim}{R}$ s'écrit alors $H(q^i , p_i)$. Son gradient symplectique est

$$\#(dH) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{I.16}$$

et les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = - \dfrac{\partial H}{dq^i} . \end{cases} \tag{I.17}$$

Si $f(q^i , p_i)$ et $g(q^i , p_i)$ sont deux fonctions sur X , leur crochet de Poisson est

$$\{f , g\} = + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i}\right) \tag{I.18}$$

En particulier, en prenant pour f la fonction i-ième coordonnée q^i (ou (n+i)-ième coordonnée p_i) et pour g le hamiltonien H , on peut écrire les équations de Hamilton sous la forme (déduite de (I.5)) :

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \{H , q^i\} \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \{H , p_i\} . \end{cases} \tag{I.19}$$

Les fonctions q^i et p_j $(1 \leq i , j \leq n)$ et la constante 1 vérifient les relations de commutation :

$$\begin{cases} \{q^i , q^j\} = 0 \ ; \quad \{q^i , 1\} = 0 \ ; \quad \{p_i , p_j\} = 0 \ ; \quad \{p_i , 1\} = 0 \\ \{p_i , q^j\} = \delta_i^j . 1 . \end{cases} \tag{I.20}$$

Ces fonctions constituent une base d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{N}$, de dimension $2n + 1$, dite <u>algèbre de Heisenberg</u>. Les champs de vecteurs associés à ces fonctions sont

$$\#(dq^i) = -\frac{\partial}{\partial p_i} \ ; \quad \#(dp_i) = \frac{\partial}{\partial q^i} \ ; \quad \#(d1) = 0 . \tag{I.21}$$

Ces champs étant complets, on peut définir une action hamiltonienne à gauche du groupe de Lie simplement connexe N d'algèbre de Lie $\mathfrak{N}$ sur X . N sera appelé le <u>groupe de Heisenberg</u>. Son action sur X se fait visiblement par translation, le sous-groupe engendré par q^i (resp. p_i) agissant par translation parallèlement à l'axe des p_i (resp. l'axe des q^i), et le sous-groupe engendré par 1 ayant l'action triviale. On reviendra sur ce sujet qu paragraphe III(h).

Il est facile de vérifier que N s'identifie à l'espace vectoriel $\underset{\sim}{R} \times V \times V^*$, de dimension $2n+1$, muni de la loi de groupe (λ et $\lambda' \in \underset{\sim}{R}$, g et $g' \in V$, γ et $\gamma' \in V^*$)

(I.22) $(\lambda, g, \gamma)\ ,\ (\lambda', g', \gamma') \to (\lambda + \lambda' + \frac{1}{2}(\langle \gamma, g'\rangle - \langle \gamma', g\rangle)\ ,\ g + g'\ ,\ \gamma + \gamma')$.

On peut d'ailleurs mettre cette loi de groupe sous d'autres formes : ainsi, au paragraphe III(h), on la mettra sous la forme (III. 34), qui se déduit de (I.22) par le changement de variables

$$\lambda = \beta - \frac{1}{2}\langle g\ ,\ \gamma\rangle .$$

II. Le problème de la quantification d'un système mécanique classique [2].

(a) Généralités.

On considère un système mécanique classique, défini par la donnée d'une variété symplectique (X, ω) et d'un hamiltonien $H \in \underset{\sim}{R}(X)$. On suppose le champ de vecteurs $\#(dH)$ complet : son flot est donc un groupe à un paramètre φ_t $(t \in \underset{\sim}{R})$ de symplectomorphismes de (X, ω).

Quantifier ce système, c'est définir :

1° Un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ (en général séparable).

2° Un groupe à un paramètre U_t $(t \in \underset{\sim}{R})$ d'opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$.

3° Un homomorphisme δ d'une sous-algèbre $\mathcal{R}$ de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$ des fonctions différentiables réelles définies sur X (munie du crochet de Poisson) dans une algèbre de Lie d'opérateurs anti-auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ (munie du commutateur)

$$[\delta(f)\ ,\ \delta(g)] = \delta(f)\,\delta(g) - \delta(g)\,\delta(f) = \delta(\{f\ ,\ g\})\ ,$$

tel que

– la fonction constante égale à 1 appartienne à $\mathcal{R}$, et

(II.1) $$\delta(1) = \frac{1}{i\hbar}\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$$

(h étant la constante de Planck, et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$) ;

–le hamiltonien H appartienne à $\mathcal{R}$, et

(II.2) $$U_t = \exp(-t\delta(H))\ ;$$

– un certain nombre de fonctions usuelles, correspondant à ce que les physiciens appellent "observables", appartiennent à $\mathcal{R}$.

Un point reste vague dans ce qui précède : quelles sont exactement les "fonctions usuelles" qui doivent appartenir à la sous-algèbre de Lie $\mathcal{R}$? Pour le moment, on se contentera de la réponse partielle suivante (voir d'autre part plus loin, paragraphe II.d). Dans le cas de l'exemple standard Id, on impose à $\mathcal{R}$ de contenir les fonctions coordonnées q^i et p_i : en d'autres termes (puisqu'on a déjà imposé à $\mathcal{R}$ de contenir la constante 1), $\mathcal{R}$ doit contenir l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{H}$. Dans le cas général, on impose à $\mathcal{R}$ d'être telle que, pour tout point x de X, il existe dans $\mathcal{R}$ $2n$ fonctions linéairement indépendantes dans un voisinage de X (qu'on peut donc prendre comme coordonnées locales dans ce voisinage).

(b) Interprétation physique. Schémas de Schrödinger et de Heisenberg.

Un "état pur" du système est un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{H}$, qu'on peut déterminer par un élément ψ de $\mathcal{H}$ de norme 1. Si, à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état pur déterminé par ψ_0 (on dira, par abus de langage, l'état ψ_0), il est à l'instant t dans l'état :

$$\psi_t = U_t(\psi_0) = \exp(-t\delta(H))(\psi_0) . \tag{II.3}$$

En dérivant par rapport à t, on obtient l'équation de Schrödinger :

$$\frac{d\psi_t}{dt} = -\delta(H)\,\psi_t . \tag{II.4}$$

Soit $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{R}$ une observable classique. Il lui correspond l'opérateur anti-autoadjoint $\tilde{A} = \delta(A)$. On a l'habitude, au lieu de $\tilde{A} = \delta(A)$, de considérer plutôt l'opérateur adtoadjoint :

$$\hat{A} = i\hbar\tilde{A} = i\hbar\delta(A) = \hat{\delta}(A) \tag{II.5}$$

et on dira que $\hat{A}$ est l'observable quantique correspondant à l'observable classique A. (On remarquera que l'ensemble $\hat{\delta}(\mathcal{R})$ des observables quantiques n'est plus une algèbre de Lie pour le commutateur usuel, car le commutateur de deux opérateurs autoadjoints, s'il existe, est antiautoadjoint). $\hat{A}$ étant autoadjoint, il lui correspond une mesure spectrale $P^{\hat{A}}$, c'est-à-dire une mesure de Borel sur $\underset{\sim}{R}$, à valeurs dans l'ensemble des projections de $\mathcal{H}$, telle que, pour tout élément ψ de $\mathcal{H}$ appartenant au domaine de $\hat{A}$,

$$(\hat{A}\psi\,|\,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d(P^{\hat{A}}\psi\,|\,\psi)(x) \tag{II.6}$$

où $(\ |\ )$ désigne le produit scalaire de $\mathcal{H}$.

L'interprétation physique est alors la suivante. Si le système est dans l'état pur représenté par $\psi \in \mathcal{H}$, de norme 1, la probabilité pour que la mesure de la grandeur physique à laquelle correspondent, d'une part l'observable classique $A \in \mathcal{R}$, d'autre part l'observable quantique $\hat{A}$, donne un résultat appartenant au borélien $E \subset \underset{\sim}{R}$, est :

$$(P^{\hat{A}}(E)\,\psi\,|\,\psi) . \tag{II.7}$$

On en déduit facilement que l'espérance mathématique de cette grandeur physique, le système étant toujours supposé dans l'état ψ, est

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, d(P^{\hat{A}}\psi\,|\,\psi)(x) = (\hat{A}\,\psi\,|\,\psi) . \tag{II.8}$$

Cette description d'un système physique, dans laquelle un état pur du système à l'instant t est représenté par un élément ψ_t de norme 1 de $\mathcal{H}$, variable au cours du temps, tandis que les grandeurs physiques sont représentées par des opé-rateurs autoadjoints (ou anti-autoadjoints, selon que l'on considère $\delta(A) = A$ ou $\hat{\delta}(A) = \hat{A}$, liés par (II.5)) invariables au cours du temps, est appelée "<u>schéma de Schrödinger</u>".

Au lieu de faire agir le groupe à un paramètre U_t sur l'espace $\mathcal{H}$, on peut le faire agir sur l'algèbre de Lie d'opérateurs $\delta(\mathcal{R})$ (ou ce qui revient au même sur l'ensemble $\hat{\delta}(\mathcal{R}) = i\hbar\delta(\mathcal{R})$, selon

$$(\text{II.9}) \qquad (\hat{A}_0 \in \hat{\delta}(\mathcal{R}), \quad t \in \underset{\sim}{R}) \to \hat{A}_t = U_t^{-1}\, \hat{A}_0\, U_t .$$

On obtient ainsi le "schéma de Heisenberg", tout à fait équivalent à celui de Schrödinger : un état pur du système est alors représenté par un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{H}$, fixe au cours du temps, qu'on peut déterminer par la donnée d'un élément ψ_0 de $\mathcal{H}$ de norme 1 (lui aussi fixe au cours du temps). Une observable quantique est une famille à un paramètre $\hat{A}_t$ d'opérateurs autoadjoints, vérifiant (II.9), ainsi que l'équation différentielle (obtenue en dérivant II.9 par rapport à t, et en tenant compte de II.2) :

$$(\text{II.10}) \qquad \frac{d\hat{A}_t}{dt} = [\delta(H), \hat{A}_t]$$

qu'on peut mettre sous la forme, si on désire faire intervenir uniquement des opé-rateurs antiautoadjoints éléments de $\delta(\mathcal{R})$:

$$(\text{II.10 bis}) \qquad \frac{d\tilde{A}_t}{dt} = [\delta(H), \tilde{A}_t]$$

où $\tilde{A}_t = \frac{1}{i\hbar}\hat{A}_t$, conformément à II.5. On notera que la forme de cette équation est identique à celle de (I.5), qui régit l'évolution d'une observable classique. Une forme plus usuelle, où n'interviennent que des opérateurs autoadjoints éléments de $\hat{\delta}(\mathcal{R})$, est :

$$(\text{II.11}) \qquad \frac{d\hat{A}_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{A}_t]$$

où on a posé, conformément à (II.5), $\hat{H} = i\hbar\delta(H)$. Les équations (II.10) à (II.11) sont des formes équivalentes de l'équation de Schrödinger (II.4), exprimée dans le schéma de Heisenberg.

L'interprétation physique se déduit facilement de celle déjà indiquée dans le schéma de Schrödinger. La probabilité pour que la mesure de la grandeur physique à laquelle correspond la famille à un paramètre d'opérateurs $\hat{A}_t$ donne, à l'ins-tant t, si le système est dans l'état pur ψ_0 ($\psi_0 \in \mathcal{H}$, ψ_0 unitaire), un résultat appartenant au borélien $E \subset \underset{\sim}{R}$, est (compte tenu de l'unitarité de U_t) :

$$(P^{\hat{A}_t}(E)\, \psi_0 | \psi_0) = (U_t^{-1}\, P^{\hat{A}_0}(E)\, U_t\, \psi_0 | \psi_0) = (P^{\hat{A}_0}(E)\, U_t\, \psi_0 | U_t\, \psi_0) = (P^{\hat{A}_0}(E)\, \psi_t | \psi_t)$$

ce qui est la formule que donne l'interprétation physique dans le schéma de Schrödinger,

(c) Cas de l'exemple standard du paragraphe I.d.

Dans le cas de cet exemple, un théorème de Stone et von Neumann permet d'affirmer qu'il existe une représentation irréductible, unique à une équivalence unitaire près, de l'algèbre de Lie de Heisenberg $\mathcal{H}$ dans une algèbre de Lie réelle d'opérateurs anti-autoadjoints sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{K}$. On la construit par le procédé classique qui consiste à prendre, pour $\mathcal{K}$, l'espace $L^2(V)$ des classes de fonctions complexes de carré intégrable-Lebesgue sur V, et pour opérateurs :

(II.12)
$$\begin{cases} \delta(1) = \frac{1}{i\hbar}\,\mathrm{Id} \\ \delta(q^j) = \frac{1}{i\hbar}\ \text{multiplication par } q^j \\ \delta(p_j) = \frac{\partial}{\partial q^j}\,. \end{cases}$$

Ou, si on préfère raisonner sur les opérateurs autoadjoints correspondants,

(II.13)
$$\begin{cases} \hat{\delta}(1) = i\hbar\delta(1) = \mathrm{Id} \\ \hat{\delta}(q^j) = i\hbar\delta(q^j) = \text{multiplication par } q^j \\ \hat{\delta}(p_j) = i\hbar\delta(p_j) = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial q^j} \end{cases}$$

(on remarquera que les opérateurs $\hat{\delta}(p_j)$ doivent être définis d'abord, par exemple sur l'espace dense des fonctions C^∞ à support compact ; il faut ensuite en prendre une extension autoadjointe convenable).

Il reste encore, pour pouvoir écrire l'équation de Schrödinger, à préciser quel est l'opérateur $\hat{\delta}(H)$, ce que les physiciens savent faire dans de nombreux cas pratiques.

(d) Quantification d'actions hamiltoniennes de groupes.

Dans les applications physiques, le système mécanique classique qu'on cherche à quantifier possède généralement un "groupe de symétries". Ce qui signifie qu'il existe un groupe de Lie G, agissant à gauche sur l'espace des phases (X, ω) par symplectomorphismes, l'action étant hamiltonienne (définition paragraphe I.c) et laissant invariant le hamiltonien H :

(II.14)
$$\forall\, x \in X\,,\ \forall\, g \in G\,,\ H(gx) = H(x)\,.$$

Si $J : X \to \mathcal{G}^*$ est un moment de cette action, on sait que, pour tout élément ξ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, la fonction $\langle J, \xi\rangle \in \underset{\sim}{R}(X)$ est une intégrale première au système mécanique classique, c'est-à-dire est constante sur les courbes intégrales de ${}^{\#}dH$. Afin de conserver au système quantique les symétries du système classique, il est donc naturel d'imposer à la sous-algèbre de Lie $\mathcal{R} \subset \underset{\sim}{R}(X)$, dont on cherche un homomorphisme δ dans une algèbre de Lie d'opérateurs antiautoadjoints sur $\mathcal{K}$, de contenir les fonctions $\langle J, \xi\rangle$, pour tout $\xi \in \mathcal{G}$.

Il faut toutefois remarquer que, pour le crochet de Poisson, l'ensemble des $\langle J , \xi \rangle$ n'est pas en général une sous-algèbre de Lie de $\underset{\sim}{R}(X)$. Soient en effet ξ_1 et ξ_2 deux éléments de $\mathcal{G}$. On trouve (voir par exemple [4]) :

$$\text{(II.15)} \qquad \{\langle J , \xi_1\rangle , \langle J , \xi_2\rangle\} = \langle J , [\xi_1 , \xi_2]\rangle + Ⓗ(\xi_1 , \xi_2) ,$$

et on voit apparaître au second membre, outre le terme attendu $\langle J , [\xi_1 , \xi_2]\rangle$, la constante $Ⓗ(\xi_1 , \xi_2)$, en général non nulle. Comme on a d'autre part imposé à $\mathcal{R}$ de contenir les fonctions constantes sur X, et à δ d'appliquer la constante 1 sur $\frac{1}{i\hbar}\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$, on voit que $\mathcal{R}$ contiendra nécessairement la sous-algèbre de Lie engendrée par les $\langle J , \xi\rangle$ $(\xi \in \mathcal{G})$ et par la constante 1. Cette sous-algèbre est (lorsque G agit effectivement sur X) une extension $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ par $\underset{\sim}{R}$, ce qui signifie qu'elle contient un idéal isomorphe à $\underset{\sim}{R}$ (l'ensemble des constantes), et que son quotient par cet idéal est isomorphe à $\mathcal{G}$.

Signalons que Ⓗ intervenant dans (II.15), est une 1-cocycle symplectique de $\mathcal{G}$ pour son action coadjointe [4], c'est-à-dire une forme bilinéaire antisymétrique sur $\mathcal{G}$, vérifiant :

$$\text{(II.16)} \quad \forall\, \xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \mathcal{G} , \quad Ⓗ([\xi_1,\xi_2],\xi_3) + Ⓗ([\xi_2,\xi_3],\xi_1) + Ⓗ([\xi_3,\xi_1],\xi_2) = 0 .$$

D'autre part, pour tout $\xi \in \mathcal{G}$, le champ de vecteurs hamiltonien $^{\#}d\langle J , \xi\rangle$ est complet ; son flot est un groupe à un paramètre de symplectomorphismes de (X , ω) (c'est en fait l'action sur X du sous-groupe de G à un paramètre

$$\{\exp(s\xi) ; \quad s \in \underset{\sim}{R}\}).$$

De même, on sait, d'après le théorème de Stone, que chaque opérateur anti auto-adjoint $\underset{\sim}{A} \in \delta(\mathcal{R})$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ engendre un groupe à un paramètre $\{\exp(-s\underset{\sim}{A}) ; \quad s \in \underset{\sim}{R}\}$ d'opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$. Il est donc naturel de poser le problème de la quantification en termes de représentations de groupes, plutôt qu'en termes de représentations d'algèbres de Lie.

Voyons plus précisément de quel groupe on doit chercher une représentation. Afin de ne plus avoir à traiter séparément G et le flot du champ de vecteurs hamiltonien $^{\#}dH$, on supposera que G contient un sous-groupe à un paramètre t, dont l'action sur X est précisément le flot de $^{\#}dH$. (On peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant si nécessaire G par son produit direct avec le groupe additif $\underset{\sim}{R}$, puisque $^{\#}dH$ est supposé complet et que $\{H , \langle J , \xi\rangle\}$ est nul pour tout $\xi \in \mathcal{G}$).

Puisque $\mathcal{R}$ contient nécessairement l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_1$ engendrée par les fonctions $\langle J , \xi\rangle$ $(\xi \in \mathcal{G})$ et les constantes, on devra former une extension G_1 de G par le groupe additif $\underset{\sim}{R}$ (c'est-à-dire un groupe G_1 contenant un sous-groupe distingué isomorphe à $\underset{\sim}{R}$, le groupe quotient étant isomorphe à G) ayant précisément $\mathcal{G}_1$ pour algèbre de Lie. La quantification consistera alors à trouver une représentation unitaire de G_1 dans un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$, telle qu'à tout $s \in \underset{\sim}{R}$ (identifié au sous- groupe distingué de G_1 isomorphe à $\underset{\sim}{R}$) corresponde l'opérateur $\exp(-s\delta(1))$, c'est-à-dire la multiplication par le ccalaire de module 1 $\exp(is/\hbar)$. Du fait que $\exp(2\pi i) = 1$, on peut en fait prendre pour G_1 une extension de G , non par $\underset{\sim}{R}$, mais par le cercle S^1 (isomorphe à $\underset{\sim}{R}/2\pi\underset{\sim}{Z}$, c'est-à-dire au groupe multiplicatif des complexes de module 1 .)

Ainsi, dans l'exemple standard étudié au paragraphe I.d, G était le groupe des translations de l'espace vectoriel $V \times V^*$, isomorphe à $V \times V^*$, et G_1 le groupe de Heisenberg N .

La théorie de la quantification géométrique donne un procédé de construction de telles représentations. Sa première étape est appelée préquantification.

III. La préquantification ([3], [4], [5]).

Dans tout ce paragraphe, les variétés, fonctions, applications, etc, sont supposées C^∞ .

(a) Fibrés en droites complexes.

Soit X une variété. On appellera fibré en droites complexes de base X , un espace fibré localement trivial (L , π , X) de base X , dont la fibre-type est $\underset{\sim}{C}$, et le groupe structural $\underset{\sim}{C}^* = \underset{\sim}{C} - \{0\}$ (opérant par multiplication sur les fibres).

Rappelons que, d'après la définition, L est une variété, π une application C^∞ de L dans X ; pour tout $x \in X$, la fibre $\pi^{-1}(x)$ a une structure d'espace vectoriel complexe de dimension 1 ; $\underset{\sim}{C}^*$ agit donc sur L en laissant chaque fibre globalement invariante, par multiplication sur les fibres ; on notera cette action

$$(\lambda , \varphi) \to \lambda\varphi \qquad (\lambda \in \underset{\sim}{C}^* , \quad \varphi \in L) ;$$

enfin, il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X et, pour tout $i \in I$, un difféomorphisme σ_i de $\underset{\sim}{C} \times U_i$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ tel que

$$\pi \circ \sigma_i = \mathrm{id}_{U_i} ;$$

pour tout $x \in U_i$, $\sigma_i|_{C\times\{x\}}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels complexes) de $\underset{\sim}{C} \times \{x\}$ sur la fibre $\pi^{-1}(x)$.

On dit que (U_i , σ_i) est un atlas du fibré (L , π , X) . Si i et j sont deux éléments de I tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application c_{ij} de $U_i \cap U_j$ dans $\underset{\sim}{C}^*$ telle que

(III.1) $\qquad c_{ij}(x)\, \sigma_i(\lambda , x) = \sigma_j(\lambda , x) , \quad \forall\, \lambda \in \underset{\sim}{C} , \quad \forall\, x \in U_i \cap U_j$

est appelée fonction de transition du fibré. On voit que

(III.2) $\qquad c_{ij}\, c_{jk} = c_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ $(i , j$ et $k \in I)$.

On remarque encore qu'à chaque σ_i est associée une section de L au dessus de

U_i , c'est-à-dire une application s_i de U_i dans L telle que :

$$\pi \circ s_i = id_{U_i} .$$

Il suffit en effet de poser

(III.3) $$s_i(x) = \sigma_i(1 , x) .$$

Cette section est sans zéro (son image ne contient l'origine d'aucune fibre). La donnée de s_i détermine d'ailleurs σ_i .

L'exemple le plus simple de fibré en droites complexes de base X est le fibré trivial : on prend $L = \underset{\sim}{C} \times X$ et π = 2e projection.

Soient (L_1 , π_1 , X_1) et (L_2 , π_2 , X_2) deux fibrés en droites complexes. Un morphisme du premier dans le second est un couple d'applications

$$\tau : L_1 \to L_2 , \quad \check{\tau} : X_1 \to X_2 ,$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi_1"'] & L_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ X_1 \arrow[r, "\check{\tau}"] & X_2 \end{tikzcd}$$

et tel que la restriction de τ à chaque fibre $\pi_1^{-1}(x)$ de L_1 , soit un isomorphisme (d'espaces vectoriels complexes) de cette fibre sur la fibre correspondante $\pi_2^{-1}(\check{\tau}(x))$ de L_2 .

Deux fibrés en droites complexes de même base (L_1 , π_1 , X) et (L_2 , π_2 , X) sont dits isomorphes s'il existe un morphisme $(\tau , \check{\tau})$ du premier dans le second, avec $\check{\tau} = id_X$ (on dit "un morphisme au-dessus de l'identité").

On montre que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites complexes de base X est isomorphe (en tant que groupe, la loi de composition étant le produit tensoriel) au groupe de cohomologie $H^2(X , \underset{\sim}{Z})$. En particulier, si $H^2(X , \underset{\sim}{Z}) = 0$ tout fibré en droites complexes de base X est isomorphe au fibré trivial.

(b) Connexions.

Soit (L , π , X) un fibré en droites complexes de base X . Une connexion sur ce fibré est définie par la donnée d'une 1-forme α sur $L^* = L - \{$section nulle$\}$, à valeurs complexes, telle que

- α est invariante par l'action de $\underset{\sim}{C}^*$ sur L^* ,
- si $\sigma : \underset{\sim}{C}^* \to L^*$ est un isomorphisme de $\underset{\sim}{C}^* = \underset{\sim}{C} - \{0\}$ sur une fibre de L privée de l'origine, on a

(III.4) $$\sigma^* \alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}$$

où $z = x + iy$ est la coordonnée usuelle de $\underset{\sim}{C}$.

La donnée d'une connexion permet de définir une opération de dérivation covariante des sections de L (et réciproquement d'ailleurs), c'est-à-dire une correspondance qui associe, à tout couple d'une section $s : U \to L$ de L au-dessus d'un ouvert U de X, et d'un champ de vecteurs (éventuellement complexe)

$$\xi : U \to T_{\underset{\sim}{C}} U \text{ tangents à } U ,$$

une nouvelle section $\nabla_\xi s$ de L au-dessus de U, de telle sorte que

1° $s \to \nabla_\xi s$ et $\xi \to \nabla_\xi s$ soient $\underset{\sim}{C}$-linéaires ;

2° si $f : U \to \underset{\sim}{C}$ est une fonction complexe sur U :

$$\text{(III.5)} \qquad \begin{cases} \nabla_{f\xi} s = f \nabla_\xi s , \\ \nabla_\xi (fs) = f \nabla_\xi s + (i(\xi) df) s . \end{cases}$$

Toute section de L au-dessus de U étant de la forme fs_0, où s_0 est une section de L au-dessus de U particulière sans zéro, il suffit, d'après (III.5), pour définir l'opération de dérivation covariante associée à la connexion donnée, de définir $\nabla_\xi s_0$ dans le cas où s_0 est sans zéro. Pour cela, on pose :

$$\text{(III.6)} \qquad \nabla_\xi s_0 = 2\pi i(i(\xi)(s_0^* \alpha)) s_0 ,$$

et on vérifie que les propriétés imposées sont bien satisfaites.

Si $\gamma : I \to X$ (I intervalle de $\underset{\sim}{R}$) est une courbe paramétrée dans X, et $r : I \to L$ un rélèvement de γ (c'est-à-dire une courbe paramétrée dans L telle que $\pi \circ r = \gamma$), on peut définir la dérivée covariante ∇r de r (relativement au champ de vecteurs $\frac{d\gamma}{dt}$ tangents à la courbe γ). Dans le cas où r est sans zéro, $\nabla r : I \to L$ est définie par

$$\text{(III.7)} \qquad \nabla r = 2\pi i(i(\frac{dr}{dt}) \alpha) r$$

et, si $f : I \to \underset{\sim}{C}$ est une fonction complexe sur I, on pose

$$\nabla(fr) = \frac{df}{dt} r + f \nabla r ,$$

ce qui permet de définir la dérivée covariante d'un relèvement pouvant avoir des zéros. Si ∇r est identiquement nulle, on dit que la section r de L, au-dessus de γ, est covariante constante (ou parallèle) le long de γ.

La courbure de la connexion définie par α est la 2-forme Ω sur X, éventuellement complexe, unique, telle que

$$\text{(III.8)} \qquad \tilde{\pi}^* \Omega = d\alpha ,$$

où $\tilde{\pi}$ désigne la restriction de π à L^*. C'est une 2-forme fermée $(d\Omega = 0)$ qui intervient lorsqu'on compare les relèvements parallèles de deux chemins homotopes. Soient deux chemins $\gamma_0 : [a , b] \to X$ et $\gamma_1 : [a , b] \to X$ de même origine $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, et même extrémité $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. On les suppose homotopes : il existe $\sigma : [a , b] \times [0 , 1] \to X$ tel que, pour tout $t \in [a , b]$,

$$\sigma(t , 0) = \gamma_0(t) \text{ et } \sigma(t , 1) = \gamma_1(t) .$$

Soient $r_0 : [a , b] \to L$ et $r_1 : [a , b] \to L$ des relèvements parallèles, respectivement de γ_0 et de γ_1, de même origine $r_0(a) = r_1(a)$. On vérifie, grâce à la formule de Stokes, la relation

$$(\text{III.9}) \qquad r_0(b) = r_1(b) \exp(-2\pi i \iint_{[a,b]\times[0,1]} \sigma^* \Omega) .$$

Soient (L_1 , π_1 , X_1) et (L_2 , π_2 , X_2) deux fibrés en droites complexes, munis de connexions de formes α_1 et α_2 respectivement. Un morphisme

$$(\tau : L_1 \to L_2 , \check{\tau} : X_1 \to X_2)$$

du premier dans le second est dit compatible avec les connexions (ou morphisme de fibrés avec connexions) si $\tau^* \alpha_2 = \alpha_1$. Si les deux fibrés sont de même base X, et si $\check{\tau} = Id_X$, on dit lorsque $\tau^* \alpha_2 = \alpha_1$ que les deux fibrés avec connexions sont isomorphes.

(c) Structures hermitiennes.

Une structure hermitienne sur le fibré en droites complexes (L , π , X), est une application H de $L \times_X L$ (produit fibré, ensemble des couples de points d'une même fibre ; on peut le munir d'une structure de variété) dans $\underset{\sim}{C}$, dont la restriction à chaque fibre est une forme hermitienne positive non dégénérée. (En termes plus intuitifs, c'est la donnée, sur chaque fibre, d'une forme hermitienne positive non dégénérée, cette donnée variant différentiablement lorsqu'on fait varier la fibre). Si x et y sont deux points d'une même fibre de L on écrira $(x|y)$ au lieu de $H(x , y)$.

Supposons (L , π , X) muni d'une connexion de forme α, et d'une structure hermitienne. On dit que la structure hermitienne est α-invariante si, pour tout couple de sections $s_1 : U \to L$ et $s_2 : U \to L$ (U ouvert de X) et tout champ de vecteurs $\xi : U \to TU$, on a

$$(\text{III.10}) \qquad \xi . (s_1|s_2) = (\nabla_\xi s_1|s_2) + (s_1|\nabla_\xi s_2) .$$

(Par convention, si f est une fonction sur U, on désigne par $\xi . f$ la dérivée $i(\xi)\, df$ de f dans la direction de ξ.)

On montre facilement qu'étant donné un fibré en droites complexes avec connexion α, il existe sur ce fibré une structure hermitienne α-invariante si, et seulement si, la forme $\alpha - \bar{\alpha}$ est exacte. Lorsque c'est le cas, la structure hermitienne invariante est unique, à une constante multiplicative près (en supposant X connexe), et la courbure Ω est une 2-forme réelle.

(d) Théorème d'intégralité.

Soit X une variété, et Ω une 2-forme réelle fermée sur X. On cherche s'il existe des fibrés en droites complexes de base X, munis d'une connexion de courbure Ω, et d'une structure hermitienne invariante.

Un théorème de Kostant [3] fournit la condition nécessaire et suffisante d'existence : la classe de cohomologie $[\Omega]$ de la forme Ω doit être entière.

Si cette condition est satisfaite, l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés est un espace homogène principal, de groupe $\hat{\Pi}_1(X)$ (groupe des caractères du groupe de Poincaré $\Pi_1(X)$, i. e. groupe des homomorphismes de $\Pi_1(X)$ dans S^1). En particulier si X est simplement connexe, le fibré cherché est unique à un isomorphisme près.

(e) Préquantification de $\underset{\sim}{R}(X)$.

Soit (X, ω) une variété symplectique connexe. On pose

$$\Omega = \frac{\omega}{2\pi\hbar}, \tag{III.11}$$

et on suppose la classe de cohomologie de Ω entière. Il existe alors un fibré en droites complexes (L, π, X) de base X, muni d'une connexion de 1-forme α et d'une structure hermitienne α-invariante, de courbure Ω.

Du point de vue physique, on verra (paragraphe (i)) que si (X, ω) correspond à un système mécanique classique, après réduction à une feuille d'énergie donnée, la condition d'intégralité $[\omega/2\pi\hbar]$ entière, fournit les règles de quantification des niveaux d'énergie. D'autre part, si cette condition est satisfaite, et si $\hat{\Pi}_1(X)$ est non trivial, il existe plusieurs fibrés en droites complexes avec connexion et structure hermitienne invariante, non isomorphes, ayant Ω pour courbure. Cela correspond au fait qu'un système mécanique peut admettre plusieurs quantifications non équivalentes : par exemple, un système de particules toutes identiques admet deux quantifications, correspondant aux cas des "fermions" et des "bosons".

On sait (I.4) que l'application $\Phi \to {}^{\#}d\Phi$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$ des fonctions réelles sur X, dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X. Son image est l'espace des champs de vecteurs hamiltoniens sur X, et son noyau, isomorphe à $\underset{\sim}{R}$, est l'ensemble des fonctions constantes sur X. Il est alors facile de vérifier que si, pour tout $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$ et toute section C^∞ s de L, on pose

$$\delta(\Phi)\, s = \nabla_{{}^{\#}d\Phi}\, s + \frac{1}{i\hbar}\Phi s, \tag{III.12}$$

alors δ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$ sur une algèbre de Lie d'opérateurs linéaires sur l'espace des sections C^∞ de L (avec pour crochet le commutateur). On a en effet

$$\delta(\{\Phi, \Psi\}) = \delta(\Phi)\,\delta(\Psi) - \delta(\Psi)\,\delta(\Phi). \tag{III.13}$$

De plus, on a

$$\delta(1) = \frac{1}{i\hbar}\,\mathrm{Id}. \tag{III.14}$$

On remarque aussi que l'espace des sections C^∞ de L à support compact est stable par $\delta(\Phi)$, pour tout $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$, et possède une structure naturelle d'espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire

(III.15) $$(s_1, s_2) \to (s_1|s_2)_X = \int_X (s_1(x)|s_2(x))\, \omega^n(x) \ ,$$

et on vérifie facilement que, si s_1 et s_2 sont à support compact, on a, pour tout $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$,

(III.16) $$(\delta(\Phi)\, s_1|s_2)_X = - (s_1|\delta(\Phi)\, s_2)_X \ .$$

On voit que la restriction de $\delta(\Phi)$ à l'espace préhilbertien des sections C^∞ de L à support compact est, pour tout $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$, un opérateur anti-autoadjoint. On a donc partiellement résolu le problème de la quantification, posé paragraphe II(a). Il faut toutefois remarquer que des difficultés subsistent : si on complète l'espace de représentation afin d'avoir un espace de Hilbert, il n'est pas évident que l'on puisse étendre, pour chaque $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$, $\delta(\Phi)$ en un opérateur anti-auto-adjoint sur cet espace de Hilbert, de telle sorte que δ soit encore un homomorphisme de $\underset{\sim}{R}(X)$ dans une algèbre de Lie d'opérateurs (avec pour crochet le commutateur). Il pourra être nécessaire de restreindre δ à une sous-algèbre de Lie de $\underset{\sim}{R}(X)$. De plus, on ne peut affirmer que δ soit une représentation irréductible de $\underset{\sim}{R}(X)$.

La définition de δ admet une autre interprétation géométrique intéressante, comme un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$, sur une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur L^* . Soit en effet ham(X) l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens sur X . On sait que c'est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur X , et qu'on a la suite exacte d'algèbres de Lie

(III.17) $$0 \longrightarrow \underset{\sim}{R} \xrightarrow{\ i\ } \underset{\sim}{R}(X) \xrightarrow{\#_d} \mathrm{ham}(X) \longrightarrow 0 \ .$$

(i fait correspondre à $\lambda \in \underset{\sim}{R}$ la fonction constante sur X , égale à λ).

Définissons d'autre part l'ensemble $e(L, \alpha)$ des champs de vecteurs η sur $L^* = L$ − section nulle , vérifiant les deux propriétés :

− pour tout $x \in L^*$, tout scalaire λ , on a

$$T\lambda(\eta(x)) = \eta(\lambda x)$$

(où on désigne par $\lambda : L^* \to L^*$ la multiplication par λ sur les fibres).

− la dérivée de Lie de α selon η est nulle.

On vérifie facilement que $e(L, \alpha)$ est une sous-algèbre de Lie, qui n'est autre que celle des automorphismes infinitésimaux de (L^*, α) . On va faire correspondre à tout élément Φ de $\underset{\sim}{R}(X)$, un champ de vecteurs, noté par un léger abus d'écriture $\delta(\Phi)$, élément de $e(L, \alpha)$. On verra ensuite comment retrouver, avec cette construction, l'interprétation de $\delta(\Phi)$ comme un opérateur sur un espace de sections de L^* . Posons

(III.18) $$\delta(\Phi) = \mathrm{ver}(\delta(\Phi)) + \mathrm{hor}(\delta(\Phi)) \ ,$$

$\mathrm{ver}(\delta(\Phi))$, partie verticale de $\delta(\Phi)$, est le champ de vecteurs qui, en un point

x de L^*, prend la valeur

(III.19) $$\mathrm{ver}(\delta(\Phi))(x) = \frac{d}{dt}\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,\Phi(\pi(x))\,t\right)\,x\right]\Big|_{t=0}\,,$$

$\mathrm{hor}(\delta(\Phi))$, partie horizontale de $\delta(\Phi)$, est le relèvement horizontal dans L^* du champ de vecteurs hamiltonien $^{\#}d\Phi$ sur X (c'est-à-dire le champ de vecteurs unique sur L^*, contenu dans le noyau de α, projetable sur X et ayant pour projection $^{\#}d\Phi$).

Il est facile de vérifier que $\Phi \to \delta(\Phi)$ est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$ sur l'algèbre de Lie $e(L\,,\alpha)$.

Enfin, pour interpréter le champ de vecteurs $\delta(\Phi)$ comme un opérateur sur un espace de sections de L, on remarque qu'à toute section

$$s : X \to L\,, \quad (\pi \circ s = \mathrm{id}_X)\,,$$

on peut associer une fonction $f_s : L^* \to \underset{\sim}{C}^*$ en posant :

(III.20) en $x \in L^*$, $f_s(x)$ est l'élément unique de $\underset{\sim}{C}$ tel que $f_s(x)x = s(\pi(x))$.

On écrit, par abus de notation,

$$f_s(x) = \frac{s(\pi(x))}{x}\,.$$

On remarque que f_s vérifie :

(III.21) $$\forall\,\lambda \in \underset{\sim}{C}^*\,,\ \forall\,x \in L^*\,,\ f_s(\lambda x) = \lambda^{-1}\,f_s(x)\,.$$

Réciproquement, si $f : L^* \to \underset{\sim}{C}$ est une fonction vérifiant (III.21), il existe une section $s : X \to L$ unique telle que $f = f_s$.

Soit alors $s : X \to L$ une section C^∞, f_s la fonction C^∞ sur L^* correspondante. On peut dériver la fonction f_s dans la direction du champ de vecteurs $\delta(\Phi)$:

(III.22) $$\delta(\Phi).f_s = i(\delta(\Phi)).df_s\,,$$

et on vérifie que cette fonction sur L^* vérifie (III.21) ; par conséquent, il lui correspond, comme indiqué ci-dessus, une nouvelle section de L qui, par définition, est le résultat $\delta(\Phi)\,s$ de l'action de $\delta(\Phi)$ sur s, et on vérifie qu'on retrouve bien ainsi (III.12).

(f) Préquantification d'une action hamiltonienne de groupe.

Les propriétés "infinitésimales" développées dans le paragraphe précédent, qui conduisent à une représentation de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$, ont un analogue "global" examiné ici. La variété symplectique $(X\,,\omega)$ et le fibré en droites complexes $(L\,,\pi\,,X)$ avec connexion α de courbure $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ et structure hermitienne invariante, étant comme ci-dessus, on a la suite exacte de groupes :

(III.23) $$1 \to S^1 \xrightarrow{i} E(L\,,\alpha) \xrightarrow{\nu} D(X\,,\omega)\,,$$

où S^1 est le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1, $E(L\,,\alpha)$

le groupe des morphismes $(\tau , \check{\tau})$ inversibles du fibré (L , π , X) (au-dessus d'un difféomorphisme $\check{\tau}$ de X qui n'est pas nécessairement l'identité), qui conservent la connexion et la structure hermitienne, $D(X , \omega)$ le groupe des symplectomorphismes de X. i est l'application qui, à $e^{i\varphi} \in S^1$, fait correspondre la multiplication par $e^{i\varphi}$ sur les fibres de L. ν est l'application

$$(\tau , \check{\tau}) \to \check{\tau} .$$

Cette dernière n'est pas toujours surjective (on montre qu'elle l'est si X est simplement connexe). Si on note $D_L(X , \omega)$ l'image de ν, c'est un sous-groupe de $D(X , \omega)$, et on a la suite exacte :

(III.24) $$1 \longrightarrow S^1 \xrightarrow{i} E(L , \alpha) \xrightarrow{\nu} D_L(X , \omega) \longrightarrow 1 .$$

Soit alors G un groupe de Lie connexe agissant sur X à gauche par symplectomorphismes. On a donc un homomorphisme σ_X du groupe G dans $D(X , \omega)$. Supposons qu'il existe un homomorphisme σ_L de G dans $E(L , \alpha)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E(L , \alpha) \arrow[r, "\nu"] & D(X , \omega) \\ & G \arrow[ul, "\sigma_L"] \arrow[u, "\sigma_X"'] \end{tikzcd}$$

(Une condition nécessaire évidente d'existence de σ_L est que $\sigma_X(G)$ soit contenu dans l'image $D_L(X , \omega)$ de $E(L , \alpha)$ par ν. Un théorème de Palais permet de montrer que si cette condition est remplie, et si l'homomorphisme $d\sigma_X$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie ham(X) se relève en un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans $\underset{\sim}{R}(X)$ (isomorphe à $e(L , \alpha)$), alors σ_L existe ; la seconde condition est toujours réalisée si G est semi-simple).

G agit sur le fibré L et on peut, par conséquent, le faire opérer sur les sections (en particulier, les sections de carré intégrable) de ce fibré ; on vérifie qu'on obtient ainsi une représentation unitaire de G dans l'espace de Hilbert des classes de sections de carré intégrable de L.

(g) Exemples de préquantifications de $\underset{\sim}{R}(X)$.

On revient à l'exemple standard du paragraphe I(d), ω étant exacte, sa classe est nulle, donc la condition d'intégralité est satisfaite. X étant simplement connexe, on peut sans que cela soit restrictif, supposer que le fibré en droites complexes (L , π , X) de base X est le fibré trivial :

(III.25) $$L = \underset{\sim}{C} \times X = \underset{\sim}{C} \times (V \times V^*) \ ; \qquad \pi : L \to X \ \text{2e projection} .$$

z désignant la coordonnée usuelle de $\underset{\sim}{C}$, on peut prendre pour forme de connexion :

(III.26) $$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi\hbar} \Sigma_{i=1}^{n} p_i \, dq^i$$

la structure hermitienne de L étant celle qui résulte de la structure hermitienne usuelle de $\underset{\sim}{C}$.

On va construire l'homomorphisme d'algèbres de Lie δ. A tout champ de vecteurs ξ sur X

(III.27) $$\xi = \sum_{i=1}^{n}\left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) ,$$

on associe son relèvement horizontal (champ de vecteurs sur L^* se projetant sur X suivant le champ donné, et contenu dans le noyau de α). Celui-ci est :

(III.28) $$\frac{1}{i\hbar} z\left(\sum_{i=1}^{n} a^i p_i\right) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n}\left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) .$$

Soit donc $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$. Le champ de vecteurs hamiltonien $^{\#}d\Phi$ qui lui est associé étant donné par (I.16), on a

$$\mathrm{hor}(\delta(\Phi)) = \frac{1}{i\hbar} z\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\right) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}\right)$$

et, d'après (III.19) :

$$\mathrm{ver}(\delta(\Phi)) = \frac{i}{\hbar} \Phi z \frac{\partial}{\partial z}$$

d'où

(III.29) $$\delta(\Phi) = \frac{1}{i\hbar} z\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} - \Phi\right) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}\right) .$$

Une section s de L est, dans le cas présent, une fonction complexe notée $s(q^i , p_i)$ définie sur un ouvert U de X. Sa dérivée covariante relativement à un champ de vecteurs ξ quelconque (III.27) est

(III.29 bis) $$\nabla_\xi s(q^i , p_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(a^i \frac{\partial s}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial s}{\partial p_i}\right) + \frac{i}{\hbar}\left(\sum_{i=1}^{n} a^i p_i\right) s .$$

L'action (III.12) de $\delta(\Phi)$ sur s est donc dans le cas présent

(III.30) $$\delta(\Phi)\, s = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_i} \frac{\partial s}{\partial q^i} - \frac{\partial\Phi}{\partial q^i} \frac{\partial s}{\partial p_i}\right) + \frac{i}{\hbar}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\partial\Phi}{\partial p_i} - \Phi\right) s .$$

Il est facile de vérifier (III.13) que δ est bien un homomorphisme d'algèbres de Lie. En particulier pour $\Phi = q^i , p_i , 1$ (base de l'algèbre de Heisenberg), on a

(III.31) $$\begin{cases} \delta(q_i)\, s = -\dfrac{\partial s}{\partial p_i} + \dfrac{1}{i\hbar} q^i s \\ \delta(p_i)\, s = \dfrac{\partial s}{\partial q^i} \\ \delta(1)\, s = \dfrac{1}{i\hbar} s . \end{cases}$$

(h) Exemple de préquantification d'une action hamiltonienne de groupe.

On considère toujours l'exemple standard du paragraphe précédent. $X = V \times V^*$ agit sur lui-même par translation ; à l'élément (g , γ) de $V \times V^*$ correspond le difféomorphisme de $V \times V^*$:

(III.32) $$(q , p) \in V \times V^* \to (g , \gamma).(q , p) = (q + g , p + \gamma) ,$$

et on voit que cette action est hamiltonienne. Un relèvement du difféomorphisme

(III.32) en un élément de $E(L, \alpha)$, c'est-à-dire un morphisme inversible de (L, π, X) conservant α et la structure hermitienne, est nécessairement de la forme :

$$(z, q, p) \in \underset{\sim}{C} \times V \times V^* \to (kz, q+g, p+\gamma),$$

où k est un scalaire complexe de module 1 pouvant dépendre de q, p, g et γ. En écrivant que α est conservé, on trouve :

$$k = \exp\left(\frac{1}{i\hbar}\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j q^j + \beta\right)\right),$$

où β est un scalaire réel pouvant dépendre de g et γ, mais indépendant de p et q.

Pour obtenir un relèvement dans $E(L, \alpha)$, non d'un élément particulier du groupe des translations de X, mais de tout ce groupe, il faudrait déterminer $\beta(g, \gamma)$ de telle sorte que l'associativité de la loi de groupe soit satisfaite. On voit facilement que cela n'est pas possible si l'on s'en tient au groupe des translations de $V \times V^*$. Par contre, il est possible de construire un relèvement du groupe de Heisenberg $\underset{\sim}{R} \times V \times V^*$, (déjà considéré paragraphe I(d)), extension centrale par $\underset{\sim}{R}$ du groupe des translations de $V \times V^*$, dont la loi de composition peut se mettre sous la forme :

(III.33) $(\beta, g, \gamma), (\beta', g', \gamma') \to (\beta + \beta' + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j g'^j, g + g', \gamma + \gamma')$.

Ce groupe agit sur X selon :

$$(\beta, g, \gamma).(q, p) = (q+g, p+\gamma)$$

(l'action du sous-groupe isomorphe à $\underset{\sim}{R}$, de coordonnées β, est triviale ; le passage au groupe quotient redonne l'action naturelle du groupe des translations de $V \times V^*$). Afin de relever cette action, on fait agir le groupe de Heisenberg à gauche sur $L = \underset{\sim}{C} \times V \times V^*$ selon :

(III.34) $(\beta, g, \gamma).(z, q, p) \to (\exp(\frac{1}{i\hbar}(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j q^j + \beta))\, z, q+g, p+\gamma)$.

L'action du groupe de Heisenberg sur une section de L (identifiée à une application $s : (q, p) \to s(q, p)$ de $V \times V^*$ dans $\underset{\sim}{C}^*$) s'en déduit : la transformée de $s(q, p)$ par $(\beta, g, \gamma) \in \underset{\sim}{R} \times V \times V^*$ est la fonction $\tau(q, p)$:

(III.35) $\qquad \tau(q, p) = \exp(\frac{1}{i\hbar}(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j q^j + \beta))\, s(q-g, p-\gamma)$.

On retrouve sur cet exemple ce qui avait été prévu paragraphe II(d).

(i) Condition d'intégralité et quantification de l'énergie ([7][8]).

On considère un système mécanique classique, défini par la donnée d'une variété symplectique (X, ω) de dimension $2n$ et d'un hamiltonien $H \in \underset{\sim}{R}(X)$. On sait que H est une intégrale première du mouvement, interprétée en physique comme l'énergie du système mécanique.

Soit $E \in \underset{\sim}{R}$ une valeur régulière de H (dH est par hypothèse non nulle en tout point de $H^{-1}(E)$). On sait qu'alors $H^{-1}(E)$ est une sous-variété de X, de codimension 1 . Par chacun de ses points passe une courbe intégrale unique de $\#_{dH}$, entièrement contenue dans cette sous-variété. Sous certaines hypothèses globales, le quotient de $H^{-1}(E)$ par la relation d'équivalence d'appartenance à la même courbe intégrale est une variété $\hat{X}_E$, de dimension $2n-2$, dite variété des mouvements d'énergie E ; de plus, $H^{-1}(E)$ se projette sur $\hat{X}_E$, et il existe sur $\hat{X}_E$ une forme symplectique unique $\hat{\omega}$ dont l'image réciproque par cette projection est la restriction de ω à $H^{-1}(E)$. En général, $\hat{\omega}$ n'est pas exacte, même lorsque ω l'est.

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un fibré en droites complexes de base $\hat{X}_E$ muni d'une connexion de courbure $\frac{\hat{\omega}}{2\pi\hbar}$, est, d'après le théorème de Kostant, $[\frac{\hat{\omega}}{2\pi\hbar}]$ entière. Elle n'est en général satisfaite que pour certaines valeurs discrètes de l'énergie E . Dans les applications pratiques on retrouve ainsi les règles de quantification des niveaux d'énergie bien connues des physiciens.

Prenons l'exemple du problème de Képler : $X = V \times V^*$, V étant l'espace euclidien usuel de dimension 3 , V^* son dual. La forme symplectique est

$$\omega = \textstyle\sum_{i=1}^{3} dp_i \wedge dq^i \,.$$

Une particule de masse m , se déplaçant dans un champ central coulombien, a pour hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 - \frac{K}{\|\vec{q}\|} \,. \qquad \text{(III.36)}$$

On sait que le moment cinétique $\vec{\ell}$ et le vecteur de Lenz $\vec{a}$ sont deux intégrales premières du mouvement, données par :

$$\vec{\ell} = \vec{q} \times \vec{p}$$

$$\vec{a} = \vec{\ell} \times \vec{p} + \frac{mK\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \,.$$

Soit une valeur donnée $E < 0$ de l'énergie. On pose :

$$\rho = \sqrt{-2mE}$$

$$\vec{x} = \rho\vec{\ell} + \vec{a}$$

$$\vec{y} = \rho\vec{\ell} - \vec{a} \,.$$

On vérifie alors que :

$$\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{y}\|^2 = m^2 K^2$$

de sorte que la variété $\hat{X}_E$ des mouvements d'énergie E n'est autre que le produit $S^2 \times S^2$ de deux sphères de rayon mK . En prenant, pour coordonnées locales sur la première (resp. seconde) sphère, les deux premières composantes x_1 et x_2 (resp. y_1 et y_2) de $\vec{x}$ (resp. de $\vec{y}$), on obtient pour expression de la forme $\hat{\omega}$:

$$\hat{\omega} = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{2\rho x_3} + \frac{dy_1 \wedge dy_2}{2\rho y_3}$$

(on laisse de côté l'ensemble des zéros de $x_3\, y_3$, de mesure nulle). Dire que la classe de $\frac{\hat{\omega}}{2\pi\hbar}$ est entière équivaut ici à dire que l'intégrale de $\hat{\omega}$ sur chacune des deux sphères est un multiple entier de $2\pi\hbar$. Or cette intégrale (sur l'une ou l'autre sphère) vaut :

$$\frac{2\pi mK}{\sqrt{-2mE}}$$

d'où la condition de quantification de l'énergie E

(III.37) $$E = -\frac{mK^2}{2\hbar^2 n^2} \quad \text{avec} \quad n \in \underset{\sim}{N}^*$$

formule bien connue des physiciens ([9], page 145, formule (36.10)).

IV. Polarisations et quantification ([6][7][10][11]).

La préquantification a l'énorme intérêt de donner un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}(X)$ toute entière, sur une algèbre de Lie $e(L, \alpha)$ de champs de vecteurs sur L^*. Bien qu'elle conduise à certains résultats ayant une interprétation physique intéressante, comme celui exposé paragraphe III(i), on la considère comme une première étape seulement de la quantification. En effet, elle ne conduit pas aux règles classiques (II.12) de quantification de l'algèbre de Heisenberg. On peut dire, en langage imagé, que la préquantification donne une représentation de $\underset{\sim}{R}(X)$ dans un espace de sections d'un fibré en droites complexes de base X, c'est-à-dire (si ce fibré est trivial) un espace de fonctions complexes de $2n$ variables (q^i, p_i) $(1 \leq i \leq n)$, alors que le procédé de quantification classique utilise un espace de fonctions de n variables seulement (les q^i).

Pour aller plus loin, on va restreindre les actions (de champs de vecteurs ou de groupes) précédemment définies sur l'espace de toutes les sections différentiables du fibré L, à certains sous-espaces particuliers. On doit pour cela introduire la notion de polarisation.

(a) Polarisation.

On se limitera pour simplifier aux polarisations admissibles réelles (admissibles et réelles étant dans la suite sous entendus) qu'on définira directement par la donnée d'une variété quotient.

Soit (X, ω) une variété symplectique, de dimension $2n$. Une polarisation de (X, ω) est définie par la donnée d'une submersion (i. e. une application de rang partout égal à la dimension de la variété d'arrivée Y) $f : X \to Y$, surjective, de X sur une variété Y de dimension n, telle que pour tout $y \in Y$, la feuille $f^{-1}(y)$ soit une sous-variété lagrangienne connexe et simplement connexe de X.

On appelle sous-variété lagrangienne de X, toute sous-variété W de dimension n de X telle que, en tout $x \in W$ et pour tout couple (v, w) de vecteurs tangents en x à W, on ait $\omega(v, w) = 0$. En d'autres termes, la forme induite par ω sur W est nulle.

En supposant la condition d'intégralité satisfaite, soit maintenant (L, π, X) un fibré en droites complexes de base X, muni d'une connexion α de courbure $\Omega = \frac{\omega}{2\pi\hbar}$, et d'une structure hermitienne α-invariante. Supposons donnée aussi une polarisation $f : X \to Y$. Soit $y \in Y$, x_1 et x_2 deux points quelconques de $f^{-1}(y)$. Les fibrés $\Pi^{-1}(x_i)$ de L au-dessus de x_i $(i = 1$ ou $2)$ sont deux espaces vectoriels complexes, qu'on peut identifier de la manière suivante. On prend un chemin, contenu dans $f^{-1}(g)$, joignant x_1 à x_2 (c'est possible car $f^{-1}(y)$ est une variété connexe, donc connexe par arcs) et on amène, par transport parallèle le long de ce chemin, tout élément de $\Pi^{-1}(x_1)$ en correspondance avec un élément de $\Pi^{-1}(x_2)$. $f^{-1}(g)$ étant simplement connexe, tous les chemins joignant x_1 à x_2 et contenus dans $f^{-1}(g)$ sont homotopes. Comme de plus la courbure $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ induit sur $f^{-1}(g)$ une forme nulle, l'identification de $\Pi^{-1}(x_1)$ et de $\Pi^{-1}(x_2)$ ainsi construite ne dépend pas du choix de ce chemin.

En identifiant tous les $\Pi^{-1}(x)$ pour tous les points $x \in f^{-1}(y)$ à un seul espace vectoriel complexe de dimension 1, qu'il est naturel d'attacher au point y, on voit qu'on peut construire un fibré en droites complexes de base Y, noté

$$(L^f, \pi^f, X^f = Y) .$$

On vérifie facilement qu'il existe une correspondance bijective entre l'espace des sections de ce nouveau fibré, et un certain sous-espace de l'espace des sections du fibré initial (L, π, X) : celui des sections covariantes constantes le long des feuilles de la polarisation (c'est-à-dire dont la dérivée covariante, relativement à tout champ de vecteurs tangent aux feuilles de la polarisation, est nul).

(b) Quantification d'éléments de $\underset{\sim}{R}(X)$ laissant fixe la polarisation.

La préquantification a permis d'associer à toute fonction $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$ un champ de vecteurs $\delta(\Phi)$ sur L^*, qui se projette sur la base X suivant le gradient symplectique ${}^{\#}d\Phi$ de Φ. Supposons que le flot de ${}^{\#}d\Phi$ laisse la polarisation considérée invariante, c'est-à-dire transforme chaque feuille $f^{-1}(y_1)$ de cette polarisation, en une autre feuille $f^{-1}(y_2)$. On vérifie alors facilement que l'action de $\delta(\Phi)$ sur l'espace des sections de L, définie par les formules (III.12) ou (III.22), laisse invariant le sous-espace des sections covariantes-constantes le long de la polarisation. On peut donc considérer $\delta(\Phi)$ comme un opérateur sur l'espace des sections du fibré réduit (L^f, π^f, Y).

On montre facilement que l'ensemble des $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$ tels que le flot de ${}^{\#}(d\Phi)$ laisse invariante la polarisation considérée, est une sous-algèbre de Lie $\underset{\sim}{R}^f(X)$ de $\underset{\sim}{R}(X)$, dépendant bien entendu de la polarisation choisie. On pourra donc "quantifier" les éléments de cette sous-algèbre de Lie.

Les mêmes considérations s'appliquent à la quantification d'une action hamiltonienne de groupe laissant la polarisation choisie invariante.

(c) Exemple.

Reprenons toujours l'exemple standard du paragraphe I(d), et choisissons la polarisation verticale :

$$(\text{IV.1}) \qquad \begin{cases} X = V \times V^* \ , \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i \\ Y = V \ , \quad f : X \to Y \ \text{ est la 1re projection.} \end{cases}$$

Les feuilles de cette polarisation sont les sous-espaces affines $\{q = \text{constante}\}$. Soit $\Phi \in \underset{\sim}{R}(X)$. Son gradient symplectique $^{\#}d\Phi$, donné par (I.16), a un flot qui laisse invariante la polarisation, si et seulement si la projection sur V de $^{\#}d\Phi(q , p)$ est indépendante de p, c'est-à-dire si, et seulement si, $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ est indépendant de $(p_1 , \dots , p_n)$ $(1 \leq i \leq n)$. Autrement dit, Φ doit être de la forme

$$(\text{IV.2}) \qquad \Phi = A(q^1 , \dots , q^n) + \sum_{i=1}^{n} B^i(q^1 , \dots , q^n)\, p_i \,.$$

On considère maintenant le fibré en droites complexes (L , π , X) déjà défini (III.25) muni de la forme de connexion α (III.26) et de la structure hermitienne naturelle. Une section de L covariante constante le long des feuilles de la polarisation est une fonction complexe $s(q^i , p_i)$ qui vérifie $\nabla_\xi\, s = 0$ pour tout champ de vecteurs ξ tangent aux feuilles, c'est-à-dire tel que, dans son expression (III.27), les a^i soient identiquement nuls. Compte tenu de (III.29 bis), on obtient :

$$(\text{IV.3}) \qquad \frac{\partial s}{\partial p_k} = 0 \qquad 1 \leq k \leq n \,.$$

s doit donc être fonction seulement des variables $(q^1 , \dots , q^n)$. On a alors d'après (III.30) pour Φ de la forme (IV.2) :

$$(\text{IV.4}) \qquad \delta(\Phi)\, s = \sum_{i=1}^{n} B^i(q^1 , \dots , q^n) \frac{\partial s}{\partial q^i} + \frac{1}{i\hbar} A(q^1 , \dots , q^n)\, s \,.$$

En particulier, on a pour les éléments de la base de l'algèbre de Heisenberg :

$$(\text{IV.5}) \qquad \begin{cases} \delta(q^i)\, s = \frac{1}{i\hbar} q^i\, s \\ \delta(p_i)\, s = \frac{\partial s}{\partial q^i} \\ \delta(1)\, s = \frac{1}{i\hbar}\, s \,. \end{cases}$$

On retrouve exactement les formules (II.12) du procédé classique de quantification.

Bien que ce résultat soit encourageant, une grosse difficulté subsiste : en général les hamiltoniens classiques sont des fonctions quadratiques des variables p_i, et n'appartiennent donc pas à la sous-algèbre des fonctions qu'on sait quantifier par le procédé ci-dessus. De plus le choix d'une polarisation est dans une certaine mesure arbitraire, et il est naturel de chercher si la quantification obtenue dépend effectivement de ce choix. On va pour étudier ces questions, définir plus précisément l'espace de Hilbert associé à une polarisation, et introduire la notion de couplage entre les espaces de Hilbert associés à deux polarisations différentes. Il est nécessaire de définir préalablement la notion de demi-densité.

(d) Demi-densités.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Une densité a sur E est par définition une mesure de Borel, éventuellement complexe, sur E qui, lorsque E est identifié à $\underset{\sim}{R}^n$ grâce au choix d'une base e, est proportionnelle à la mesure de Lebesgue de $\underset{\sim}{R}^n$. Désignant ce coefficient de proportionnalité par

$$a(e) \in \underset{\sim}{C} ,$$

et la mesure de Lebesgue par $|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|$, on écrira :

$$a = a(e)\ |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n| . \tag{IV.6}$$

Une base de E peut être considérée comme un isomorphisme e de $\underset{\sim}{R}^n$ sur E, $e_1 , \dots , e_n$ étant alors les images par e des éléments de la base canonique de $\underset{\sim}{R}^n$. Pour tout élément $g : \underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^n$ du groupe linéaire $GL(n , \underset{\sim}{R})$, $eg : \underset{\sim}{R}^n \to E$ est une autre base de E (on sait d'ailleurs que l'action ainsi définie de

$$GL(n , \underset{\sim}{R})$$

sur l'ensemble des bases $B(E)$ est libre et transitive) et, si a est une densité sur E, on a

$$a(eg) = a(e)\,|\text{dét}\ g| . \tag{IV.7}$$

Réciproquement, la donnée d'une application $e \to a(e)$ de $B(E)$ dans $\underset{\sim}{C}$ vérifiant (IV.7), définit une densité (IV.6) sur E.

On définira donc une demi-densité α sur E, comme une application α de $B(E)$ dans $\underset{\sim}{C}$, vérifiant :

$$\alpha(eg) = \alpha(e)\,|\text{dét}\ g|^{\frac{1}{2}} \qquad (e \in B(E) ,\ g \in GL(n , R)) . \tag{IV.8}$$

On remarque que si α et β sont deux demi-densités sur E, le produit $\alpha\bar{\beta}$ ($\bar{\beta}$ complexe conjugué de β), ainsi d'ailleurs que $\alpha\beta$, est une application de $B(E)$ dans $\underset{\sim}{C}$ vérifiant (IV.7), donc définit une densité sur E. Par convention, cette densité sera désignée aussi par $\alpha\bar{\beta}$, et appelée produit des deux demi-densités α et $\bar{\beta}$.

Soit maintenant Y une variété différentielle de dimension n. Pour tout point y de Y, on peut définir l'espace vectoriel complexe, de dimension 1 des demi-densités sur l'espace tangent $T_y Y$, noté $|\Lambda^n|^{\frac{1}{2}} T^*_y Y$. Lorsque y parcourt Y, on construit ainsi un fibré de base Y, appelé fibré des demi-densités sur Y, et noté $|\Lambda^n|^{\frac{1}{2}} T^* Y$. Une demi-densité sur Y est une section

$$\alpha : Y \to |\Lambda^n|^{\frac{1}{2}} T^* Y$$

de ce fibré. Il est facile de vérifier que si α et β sont deux telles sections, $\alpha\bar{\beta}$ est une mesure de Borel sur Y.

(e) Espace de Hilbert associé à une polarisation.

On a vu (paragraphe IV(a)) comment la donnée d'une polarisation $f : X \to Y$ permet de construire, à partir d'un fibré en droites complexes (L, π, X) ayant pour base la variété symplectique (X, ω), et muni d'une connexion de courbure $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ et d'une structure hermitienne invariante, un fibré en droites complexes réduit (L^f, π^f, Y). Les sections de ce nouveau fibré s'identifient aux sections du fibré initial covariantes constantes le long des feuilles de la polarisation. La structure hermitienne de L induit de manière naturelle une structure hermitienne sur L^f (on désignera par la même notation $(u|v)$ le produit scalaire de deux éléments u et v d'une même fibre de L, ou de L^f). Soient s_1 et s_2 deux sections de L^f. $(s_1|s_2)$ est une fonction complexe définie sur Y. Il sera en général plus commode de considérer s_1 et s_2 comme des sections de L covariantes constantes le long des feuilles de la polarisation. Alors $(s_1|s_2)$ est une fonction complexe définie sur X, et constante sur chaque feuille de la polarisation, donc qui se factorise à travers $f : X \to Y$.

Si les supports de s_1 et s_2 sont "compacts modulo f" (c'est-à-dire ont des projections par f sur Y compactes, $(s_1|s_2)$, considérée comme fonction sur Y, est à support compact, et on peut penser à l'intégrer sur Y par rapport à une mesure convenable, pour définir le produit scalaire des deux sections. Mais alors que X possède une mesure élément de volume naturelle ω^n, Y ne possède pas de mesure privilégiée. Afin d'éviter l'introduction arbitraire d'une mesure particulière sur Y, on considère, au lieu de s_1 et s_2, deux couples (s_1, α_1) et (s_2, α_2) d'une section s_i de L^f, et d'une demi-densité α_i sur Y ($i = 1$ ou 2). On pose alors

$$((s_1, \alpha_1)|(s_2, \alpha_2))_Y = \int_Y (s_1|s_2)\, \alpha_1 \bar{\alpha}_2 . \tag{IV.9}$$

On voit que cette expression ne change pas si on remplace (s_1, α_1) par

$$(fs_1, (\alpha_1/f)),$$

où f est une fonction complexe C^∞ sans zéro sur Y (et de même pour (s_1, α_2)). L'ensemble des classes d'équivalences de couples (s, α) ((s, α) étant équivalent à (s', α') s'il existe une fonction complexe C^∞ sans zéro f sur Y telle que $s' = fs$ et $\alpha' = \frac{\alpha}{f}$) peut être identifié à l'espace des sections du fibré produit tensoriel $L^f \otimes |\Lambda^n|^{\frac{1}{2}} T^* Y$. On a donc défini, sur l'espace des sections à support compact de ce fibré, une structure d'espace préhilbertien complexe. Le complété de cet espace est par définition l'espace de Hilbert associé à la polarisation considérée, qu'on notera $\mathcal{H}^f$.

(f) Le couplage des espaces de Hilbert associés à deux polarisations.

Soient $f_1 : X \to Y_1$ et $f_2 : X \to Y_2$ deux polarisations, $\mathcal{H}^{f_1}$ et $\mathcal{H}^{f_2}$ les espaces de Hilbert associés. On peut, dans un certain nombre de cas, dont on verra ci-après des exemples, définir de manière naturelle un isomorphisme unitaire :

$$U_{f_2 f_1} : \mathcal{H}^{f_1} \to \mathcal{H}^{f_2} \, . \tag{IV.10}$$

En permettant d'identifier entre eux les espaces de Hilbert relatifs à deux polarisations distinctes, ces isomorphismes $U_{f_2 f_1}$ vont permettre de "quantifier" une plus grande sous-algèbre de $\underset{\sim}{R}(X)$ que celle laissant fixe une polarisation donnée (dont on a étudié la quantification paragraphe IV(b)).

La construction de $U_{f_2 f_1}$ résulte essentiellement de la remarque suivante. Soit $x \in X$, $y_1 = f_1(x)$ et $y_2 = f_2(x)$. Supposons données deux demi-densités, η_1 sur l'espace vectoriel $T_{y_1} Y_1$ tangent en y_1 à Y_1, et η_2 sur $T_{y_2} Y_2$. On va voir qu'on peut, sous certaines hypothèses de transversalité, leur associer une densité, notée $\eta_1 \overline{\eta_2}$, sur l'espace vectoriel $T_x X$ tangent en x à X, l'application $(\eta_1 , \eta_2) \to \eta_1 \overline{\eta_2}$ étant sesquilinéaire. Les espaces tangents en x aux feuilles des deux polarisations $f_1^{-1}(y_1)$ et $f_2^{-1}(y_2)$, sont respectivement $\ker(T_x f_1)$ et $\ker(T_x f_2)$. Ce sont deux sous-espaces de dimension n de l'espace $T_x X$ de dimension $2n$. D'autre part, $T_{y_1} Y_1$ est canoniquement isomorphe à

$$T_x X/\ker(T_x f_1) \, ,$$

et $T_{y_2} Y_2$ à $T_x X/\ker(T_x f_2)$. Supposons $\ker(T_x f_1)$ et $\ker(T_x f_2)$ transverses. Alors $T_x X$ est somme directe de ces deux sous-espaces, et on peut identifier

$$T_x X/\ker T_x f_1 \, ,$$

c'est-à-dire $T_{y_1} Y_1$, avec $\ker(T_x f_2)$, et de même identifier $T_{y_2} Y_2$ avec $\ker(T_x f_1)$. On peut donc considérer η_1 comme une demi-densité sur $\ker(T_x f_2)$, et η_2 comme une demi-densité sur $\ker(T_x f_1)$. On remarque alors que $T_x X$, muni de la 2-forme $\omega_x/2\pi\hbar$, est un espace vectoriel symplectique et que $\ker(T_x f_1)$ et $\ker(T_x f_2)$ en sont deux sous-espaces lagrangiens ($\omega_x/2\pi\hbar$ induit sur chacun d'eux une 2-forme nulle). On sait que, dans ces conditions, l'application qui, à chaque $u \in \ker(T_x f_2)$, fait correspondre la forme linéaire sur

$$\ker(T_x f_1) : v \to \frac{1}{2\pi\hbar} \omega_x(u , v) \, ,$$

est un isomorphisme j de $\ker(T_x f_2)$ sur le dual de $\ker(T_x f_1)$. Soit alors e_2 une base de $\ker(T_x f_2)$. $j(e_2)$ est une base du dual de $\ker(T_x f_1)$. Prenons la base duale

$$e_1 = (j(e_2))^* \, . \tag{IV.11}$$

C'est une base de $\ker(T_x f_1)$. (e_1 , e_2) est donc une base de $T_x X$. Posons, pour définir $\eta_1 \overline{\eta_2}$,

$$\eta_1 \overline{\eta_2}(e_1 , e_2) = \eta_1(e_2) \overline{\eta_2(e_1)} \, . \tag{IV.12}$$

On doit vérifier que cette expression définit bien une densité sur $T_x X$. Si e'_2 est une autre base de $\ker(T_x f_2)$, on a

$$e'_2 = e_2 g_2 , \quad g_2 \in GL(n , \mathbb{R})$$

$$e'_1 = (j(e'_2))^* = e_1 \, {}^t g_2^{-1}$$

$$\eta_1 \bar{\eta}_2(e'_1 , e'_2) = \eta_1(e'_2) \overline{\eta_2(e'_1)} = \eta_1(e_2) \overline{\eta_2(e_1)} \, |\text{dét } g_2|^{\frac{1}{2}} \, |\text{dét } {}^t g_2^{-1}|^{\frac{1}{2}}$$

$$= \eta_1(e_2) \overline{\eta_2(e_1)} = \eta_1 \bar{\eta}_2(e'_1 , e'_2)$$

ce qui est en accord avec (IV.8) puisque le déterminant du changement de base

$$(e_1 , e_2) \to (e'_1 , e'_2)$$

de $T_x X$ est égal à 1. Par conséquent, (IV.12) définit bien une densité sur $T_x X$.

On dira que les deux polarisations considérées sont <u>complètement transverses</u> si, pour tout $x \in X$, $\ker(T_x f_1)$ et $\ker(T_x f_2)$ sont transverses, et si, de plus, l'application $(f_1 , f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ est propre. En supposant cette condition satisfaite, soit (s_i , α_i) un couple d'une section s_i de L covariante constante le long des feuilles de f_i et à support compact modulo f_i, et d'une demi-densité α_i sur Y_i ($i = 1$ ou 2). (s_i , α_i) définit un élément de $\mathcal{H}^{f_i}$. Afin de définir $U_{f_2 f_1} : \mathcal{H}^{f_1} \to \mathcal{H}^{f_2}$, posons :

$$(U_{f_2 f_1}(s_1 , \alpha_1) | (s_2 , \alpha_2))_{Y_2} = \int_X (s_1 | s_2) \, \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \tag{IV.13}$$

ce qui est possible puisque, d'après ce qui précède $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$ est une densité sur X, et $(s_1 | s_2)$ une fonction complexe définie sur X, à support compact, car (f_1 , f_2) est propre. (IV.13) définit une application linéaire d'un sous-espace dense de $\mathcal{H}^{f_1}$ dans $\mathcal{H}^{f_2}$. On dira que les deux polarisations considérées sont <u>unitairement couplées</u> si cette application linéaire se prolonge en un isomorphisme unitaire $U_{f_2 f_1}$ de $\mathcal{H}^{f_1}$ sur $\mathcal{H}^{f_2}$. On verra que c'est le cas dans divers exemples traités ci-dessous. Toutefois, les conditions pour que deux polarisations complètement transverses soient unitairement couplées, ne semblent pas entièrement élucidées.

(g) <u>Premier exemple de couplage.</u>

On considère l'exemple standard déjà étudié paragraphes I(d), II(c), III(g) et IV(c) :

$$X = V \times V^* , \qquad L = \mathbb{C} \times V \times V^* .$$

Les deux polarisations étudiées sont :

$$\begin{cases} f_1 : V \times V^* \to V , \text{ 1re projection,} \\ f_2 : V \times V^* \to V^* , \text{ 2e projection} \end{cases} \tag{IV.14}$$

dites respectivement polarisation verticale et horizontale.

On a vu qu'une section de L covariante-constante le long des feuilles de f_1, était une fonction $s_1(q^1, \ldots, q^n)$ des coordonnées $(q^1, \ldots, q^n)$ dans V, indépendante des coordonnées $(p_1, \ldots, p_n)$ dans V^*. On montre de même qu'une section de L covariante-constante le long des feuilles de f_2 est une fonction $s_2(q^1, \ldots, q^n p_1, \ldots, p_n)$ de la forme :

(IV.15) $s_2(q^1, \ldots, q^n p_1, \ldots, p_n) = \exp(\frac{1}{i\hbar} \sum_{k=1}^n p_k q^k)\, \sigma_2(p_1, \ldots, p_n)$,

où σ_2 est une fonction des $(p_1, \ldots, p_n)$, indépendante de $(q^1, \ldots, q^n)$.

Toute demi-densité sur V est le produit, par une fonction arbitraire des q^i, de la demi-densité $|dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|^{\frac{1}{2}}$. Lorsqu'on définit un élément a de $\mathcal{H}^{f_1}$ par la donnée d'un couple d'une section s_1 de L covariante constante le long des feuilles de f_1 et à support compact modulo f_1 et d'une demi-densité sur V, on peut, en utilisant la relation d'équivalence définie paragraphe IV(e), intégrer dans s_1 le facteur multiplicatif de $|dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|^{\frac{1}{2}}$, donc supposer ce couple de la forme :

(IV.16) $$a = (s_1(q^1, \ldots, q^n),\ |dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|^{\frac{1}{2}}).$$

De même, on peut supposer le couple d'une section s_2 de L covariante constante le long des feuilles de f_2 et à support compact modulo f_2, et d'une demi-densité sur V^*, définissant un élément b de $\mathcal{H}^{f2}$, de la forme

(IV.17) $b = (\exp(\frac{1}{i\hbar} \sum_{k=1}^n p_k q^k)\, \sigma_2(p_1, \ldots, p_n),\ |dp_1 \wedge \ldots dp_n|^{\frac{1}{2}})$.

On vérifie facilement que le produit de ces deux-demi densités $|dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|^{\frac{1}{2}}$ sur V et $|dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n|^{\frac{1}{2}}$ sur V^*, tel qu'il a été défini paragraphe précédent, est :

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{n/2} |dq^1 \wedge \ldots dq^n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n|$$

(le coefficient $(2\pi\hbar)^{-n/2}$ provient du fait que c'est la forme $\frac{\omega}{2\pi\hbar}$ qui est utilisée pour définir l'isomorphisme d'un des deux sous-espaces lagrangiens sur le dual de l'autre). On a donc :

(IV.18) $$(U_{f_2 f_1} a | b)_{V^*} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{V \times V^*} s_1(q^1, \ldots, q^n)\, \overline{\sigma_2(p_1, \ldots, p_n)}\, \exp(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n p_k q^k) \times |dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n|.$$

On remarque que $\mathcal{H}^{f_1}$ n'est autre que l'espace $L^2(V, |dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|)$ (en convenant de représenter l'élément a (IV.16) par la fonction $s_1(q^1, \ldots, q^n)$), tandis que $\mathcal{H}^{f2}$ peut être identifié à $L^2(V^*, |dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n|)$, à condition de représenter b (IV.17) par la fonction $\sigma_2(p_1, \ldots, p_n)$. On voit alors en utilisant le théorème de Fubini que $U_{f_2 f_1}$, interprété comme application de $L^2(V, |dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n|)$ dans $L^2(V^*, |dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n|)$ n'est autre que la transformation de Fourier (avec toutefois des coefficients faisant intervenir la constante de Planck $\hbar$ un peu inhabituels) :

$$(\text{IV}.19)\ (\mathcal{F}s_1)(p_1,\dots,p_n) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_V s_1(q^1,\dots,q^n) \exp(\tfrac{i}{\hbar} \textstyle\sum_{k=1}^n p_k q^k) \ |dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n| .$$

On sait que la tranformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une isométrie. $U_{f_2 f_1}$ est donc bien un isomorphisme unitaire de $\mathcal{H}^{f_1}$ sur $\mathcal{H}^{f_2}$, et on peut dans le présent exemple affirmer que les deux polarisations sont unitairement couplées.

(h) Deuxième exemple de couplage.

On se limite maintenant au cas où V est de dimension 1. (q , p) désignant les coordonnées d'un point de $V \times V^*$, on considère la famille, à un paramètre $t \in \mathbb{R}$, de polarisations :

$$(\text{IV}.20) \qquad f_t : V \times V^* \to Y_t = \mathbb{R} , \qquad (q , p) \to y_t = q - \frac{t}{m} p$$

où m est une constante > 0 (qu'on interprétera comme étant une masse dans le paragraphe suivant). On va construire un isomorphisme unitaire entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^{f_0}$ et $\mathcal{H}^{f_t}$ $(t \neq 0)$.

On vérifie facilement qu'une section de $\mathbb{L} = \mathbb{C} \times V \times V^*$ covariante constante le long des feuilles de f_t, est une fonction $s(q , p)$ de la forme

$$(\text{IV}.21) \qquad s(q , p) = \exp(-\frac{itp^2}{2\hbar m}) \, \sigma(q - \frac{t}{m} p)$$

où σ est une fonction arbitraire de $y_t = q - \frac{t}{m} p$.

Soient donc s_1 et s_2 deux sections, covariantes constantes respectivement le long des feuilles des polarisations f_0 et f_t, et à support compact respectivement modulo f_0 et f_t :

$$(\text{IV}.22) \qquad \begin{cases} s_1 = \sigma_1(q) \\ s_2 = \exp(-\dfrac{itp^2}{2\hbar m}) \, \sigma_2(q - \dfrac{t}{m} p) , \end{cases}$$

σ_1 et σ_2 étant à support compact. On considère les couples

$$(\text{IV}.23) \qquad \begin{cases} a_1 = (s_1 , |dq|^{\frac{1}{2}}) \\ a_2 = (s_2 , |dy_t|^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

qui définissent des éléments, respectivement de $\mathcal{H}^{f_0}$ et de $\mathcal{H}^{f_1}$. Le produit des demi-densités $|dq|^{\frac{1}{2}}$ et $|dy_t|^{\frac{1}{2}}$ est :

$$\left|\frac{t}{2\pi m\hbar}\right|^{\frac{1}{2}} |dq \wedge dp| = \left|\frac{m}{2\pi\hbar t}\right|^{\frac{1}{2}} |dq \wedge dy_t| ,$$

et on est conduit à poser pour définir $U_{f_t f_0} \, a_1$:

$$(\text{IV}.24) \quad (U_{f_t f_0} \, a_1 | a_2)_{Y_t} = \left|\frac{m}{2\pi\hbar t}\right|^{\frac{1}{2}} \iint \sigma_1(q) \, \overline{\sigma_2(y_t)} \, \exp(\frac{im(q - y_t)^2}{2\hbar t}) \, |dq \wedge dy_t| .$$

On prend comme nouvelles variables q et $z = q - y_t$, et on utilise le produit de convolution, défini ainsi (le facteur $(2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}$ est mis là pour conserver la propriété de la transformation de Fourier, de transformer le produit de convolution en produit usuel, avec la définition (IV.28) ci-après de la transformation de Fourier) :

(IV.25) $$(\sigma_1 * \check{\sigma}_2)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(q)\, \check{\sigma}_2(z-q)\, dq \;,$$

où on a posé

(IV.26) $$\check{\sigma}_2(z) = \overline{\sigma_2(-z)} \;.$$

On a alors

(IV.27) $$(U_{f_t f_0}\, a_1 | a_2)_{Y_t} = \left|\frac{m}{t}\right|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{imz^2}{2\hbar t}\right)(\sigma_1 * \check{\sigma}_2)(z)\, dz \;.$$

En accord avec (IV.19), on définit la transformation de Fourier d'une fonction $f(x)$ (d'une variable réelle x) par :

(IV.28) $$(\mathfrak{F}f)(z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \exp\left(\frac{ixz}{\hbar}\right) dx$$

la formule d'inversion s'écrivant alors :

(IV.29) $$f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{F}f)(z)\, \exp\left(-\frac{ixz}{\hbar}\right) dz \;.$$

On sait que la transformée de Fourier de la fonction :

$$x \to \exp\left(\frac{imx^2}{2\hbar t}\right) \qquad (t \text{ réel } \neq 0)$$

est la fonction

$$z \to \exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,t\right) \left|\frac{t}{m}\right|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{iz^2 t}{2m\hbar}\right) ,$$

Utilisant cela et la formule d'inversion, on obtient :

(IV.30) $$(U_{f_t f_0}\, a_1 | a_2)_{Y_t} = \exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar}\right)(\mathfrak{F}\sigma_1)(\xi)\,\overline{(\mathfrak{F}\sigma_2)(\xi)}\, d\xi$$

(on a tenu compte de $(\mathfrak{F}\check{\sigma}_2)(\xi) = \overline{\mathfrak{F}\sigma_2(\xi)}$).

Ayant fixé les demi-densités $|dq|^{\frac{1}{2}}$ sur $Y_0 = V$, $|dy_t|^{\frac{1}{2}}$ sur Y_t , on peut identifier les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_{f_0}$ et $\mathcal{H}_{f_t}$ respectivment, à $L^2(V, |dq|)$ et $L^2(Y_t, |dy_t|)$ (tous deux isomorphes à $L^2(\underset{\sim}{R})$, pour la mesure de Lebesgue usuelle). On voit alors que $U_{f_t f_0}$ se compose d'une transformation de Fourier $\mathfrak{F}$, suivie d'une multiplication par la fonction de module 1 :

$$\xi \to \exp\left(i\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,t\right) \exp\left(-\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar}\right) ,$$

puis par une transformation de Fourier inverse. $U_{f_t f_0}$ est bien un isomorphisme unitaire, et on voit que les polarisations f_0 et f_t sont unitairement couplées pour tout $t \neq 0$.

(i) Interprétation physique.

Toujours dans les hypothèses du paragraphe précédent, on considère l'hamiltonien d'une particule libre, dans un espace à une dimension ;

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{IV.31}$$

(m masse de la particule). On a

$$\#_{dH} = \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial q}$$

dont le flot est

$$\varphi_t(q\,,\,p) = (q + \frac{t}{m}\,p\,,\,p)\;. \tag{IV.32}$$

Ce flot est un groupe à 1 paramètre de symplectomorphismes de X. La théorie de la préquantification permet de lui associer un groupe à 1 paramètre d'automorphismes du fibré $L^* = \underset{\sim}{C}^* \times X$, qui n'est autre que le flot du champ de vecteurs $\delta(H)$. Celui-ci est, d'après (III.29),

$$\delta(H) = \frac{1}{2i\hbar m}\,p^2\,z\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{p}{m}\,\frac{\partial}{\partial q}\;. \tag{IV.33}$$

Son flot est

$$\psi_t(z\,,\,q\,,\,p) = (\exp(\frac{p^2 t}{2i\hbar m})\,z\,,\,q + \frac{tp}{m}\,,\,p)\;. \tag{IV.34}$$

Une feuille de la polarisation verticale est une droite q = constante. Elle est transformée par le flot φ_t, qui applique $(q\,,\,p)$ en $(q' = q + \frac{t}{m}\,p\,,\;p' = p)$, en une droite $q' - \frac{t}{m}\,p'$ = constante. φ_t transforme donc la polarisation verticale f_0, en la polarisation notée f_t dans le paragraphe précédent.

De même, considérons une section $s(q\,,\,p)$ du fibré L. En faisant agir sur son grapne le flot ψ_t, on obtient une nouvelle section qu'on notera

$$\hat{\psi}_t(s)\;(q\,,\,p)\;,$$

donnée par

$$\hat{\psi}_t(s)\;(q\,,\,p) = \exp(\frac{p^2 t}{2i\hbar m})\;s(q - \frac{t}{m}\,p\,,\,p)\;. \tag{IV.35}$$

On voit que si s est covariante constante le long des feuilles de la polarisation s_0, c'est-à-dire si s est fonction seulement de la variable q, alors $\hat{\psi}_t(s)$ est covariante constante le long des feuilles de la polarisation f_t (formule (IV.21)). En identifiant, comme précédemment, $\mathcal{H}^{f_0}$ et $\mathcal{H}^{f_t}$ avec les espaces $L^2(V\,,\,|dq|)$ et $L^2(Y_t\,,\,|dy_t|)$, on voit que $\hat{\psi}_t$ détermine un isomorphisme unitaire du premier sur le second. Afin de construire un opérateur unitaire sur un espace de Hilbert fixe, indépendant de t, on pose :

$$\tilde{\psi}_t = (U_{f_t f_0})^{-1} \circ \hat{\psi}_t : \mathcal{H}^{f_0} \to \mathcal{H}^{f_0}\;. \tag{IV.36}$$

Afin d'expliciter $\tilde{\psi}_t$ on considère deux sections $s_1(q)$ et $s_2(q)$, éléments d'un sous-espace dense de $\mathcal{H}^{f_0}$ (par exemple C^∞ à support compact). On a, compte tenu de (IV.30) :

$$(U_{f_t f_0}\, s_1 | \hat{\psi}_t\, s_2)_{Y_t} = (s_1 | (U_{f_t f_0})^{-1} \circ \hat{\psi}_t\, s_2)_V = (s_1 | \tilde{\psi}_t\, s_2)_V$$

$$= \exp(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar})(\mathfrak{F} s_1)(\xi)\, \overline{\mathfrak{F} s_2(\xi)}\, d\xi$$

$$= \exp(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t) \int_{-\infty}^{\infty} s_1(q)\, \overline{(\bar{\mathfrak{F}}(\exp(\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar})(\mathfrak{F} s_2)(\xi)))(q)}\, dq \,.$$

On a donc

$$(\tilde{\psi}_t\, s_2)(q) = \overline{\exp(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t)}\, (\bar{\mathfrak{F}}(\exp(\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar})(\mathfrak{F} s_2)(\xi)))(q) \,. \tag{IV.37}$$

On voit que $\tilde{\psi}_t$ n'est pas un groupe à un paramètre, à cause du facteur

$$\overline{\exp(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t)} \,,$$

qui passe de $\exp(\frac{i\pi}{4})$, pour $t < 0$ à $\exp(-\frac{i\pi}{4})$ pour $t > 0$. La famille d'opérateurs unitaires $\tilde{\psi}_t$ ne répond donc pas exactement aux conditions imposées à U_t dans le paragraphe II(a).

On remarque que la variation du facteur $\overline{\exp(i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t)}$ se fait précisément pour $t = 0$, c'est-à-dire lorsque les deux polarisations f_0 et f_t cessent d'être transverses. On donnera en conclusion quelques indications (surtout bibliographiques) sur les moyens de surmonter cette difficulté.

Si l'on admet momentanément qu'il faut ignorer le facteur $\exp(- i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t)$ et écrire :

$$(U_t\, s)(q) = \bar{\mathfrak{F}}(\exp(\frac{i\xi^2 t}{2m\hbar})\, \mathfrak{F} s(\xi))(q) \,, \tag{IV.38}$$

on vérifie que $U_t\, s$ est la solution de l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_t\, s) = - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2}(U_t\, s) \tag{IV.39}$$

correspondant à la donnée initiale $U_0\, s = s$.

On peut traiter de manière analogue ([6] par exemple), le cas de l'oscillateur harmonique, avec pour hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \,.$$

V. Quelques indications sur les développement de la théorie.

La difficulté rencontrée dans l'exemple précédent (obtention d'une famille à un paramètre $\tilde{\psi}_t$ d'opérateurs unitaires qui n'est pas un groupe, du fait de son comportement à la traversée de la valeur $t = 0$) peut être résolue, grâce à une modification de la définition des opérateurs de couplage $U_{f_t f_0}$ entre les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^{f_0}$ et $\mathcal{H}^{f_t}$ relatifs à deux polarisations f_0 et f_t . Cette modification consiste à utiliser des demi-formes (variant lors d'un changement de base suivant une formule analogue à (IV.8) , mais avec $(\text{dét } g)^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $|\text{dét } g|^{\frac{1}{2}}$)

au lieu de demi-densités. On voit alors que le facteur $\exp(-\frac{i\pi}{4}\,\mathrm{sgn}t)$ disparait dans (IV.37).

Cette modification nécessite l'introduction d'un certain nombre de notions nouvelles, que nous ne mentionnons que brièvement ; le lecteur désireux de les approfondir en trouvera l'étude détaillée dans les références citées.

Tout d'abord, la racine carrée étant une fonction multivoque, on est amené afin de donner un sens précis à la formule (IV.8) modifiée, à définir sur l'espace vectoriel considéré une structure métalinéaire ([6], [7]). En termes intuitifs, cela consiste à munir cet espace, non plus de bases usuelles, mais de bases métalinéaires, consistant en un couple d'une base usuelle et d'un nombre égal à ± 1, ce dernier indiquant si on doit choisir l'une ou l'autre des deux déterminations de $(\det g)^{\frac{1}{2}}$ (g étant la matrice de changement de base à partir d'une base de référence). Le groupe agissant librement et transitivement sur l'ensemble des bases métalinéaires est le groupe métalinéaire, revêtement à deux feuillets du groupe linéaire.

Etant donnée une polarisation $f : X \to Y$, on est amené à munir, de manière cohérente, l'espace vectoriel tangent en chaque point de Y d'une structure métalinéaire. On dit alors qu'on munit la variété Y d'une structure métalinéaire. Cela est possible si Y vérifie certaines conditions topologiques, satisfaites notamment lorsque Y est orientable.

On est amené aussi à munir de structures métalinéaires les feuilles de la polarisation f. On peut aussi être amené à utiliser plusieurs polarisations différentes, de sorte qu'on souhaite finalement pouvoir, de manière cohérente, munir d'une structure métalinéaire tout sous-espace lagrangien de l'espace vectoriel tangent en tout point de X. Cela peut se faire en munissant X d'une structure métaplectique (définition et construction assez analogues à celles d'une structure métalinéaire, le groupe symplectique remplaçant le groupe linéaire ; le revêtement à deux feuillets du groupe symplectique qu'on est amené à introduire est dit groupe métaplectique). On peut, grâce à ces notions, obtenir une définition plus satisfaisante du couplage de deux polarisations.

MASLOV [12] avait introduit, dans les calculs de solutions asymptotiques de l'équation de Schrödinger, un indice (dit de Maslov) permettant de corriger la solution lorsqu'on la prolonge au delà d'un "point focal". Dans l'exemple traité au paragraphe précédent, c'est grâce à cet indice qu'on corrige le facteur $\exp(\pm\frac{i\pi}{4})$ apparaissant dans (IV.37) (selon le signe de t). Les notions géométriques mentionnées ci-dessus (groupe métalinéaire et groupe métaplectique), ont permis à plusieurs auteurs de préciser la définition de cet indice et d'en étudier les propriétés ([13] à [21]). Son intervention dans la théorie des opérateurs intégraux de Fourier a été analysée par HÖRMANDER et DUISTERMAAT ([22][23]), et son emploi dans la recherche de solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles notamment par LERAY ([14] à [17]) et VOROS [24]. Une interprétation utilisant les revêtements spinoriels du groupe symplectique est due à CRUMEYROLLE [25]. L'utilisation, pour la quantification, de fibré spinoriels a été étudiée par TIMBEAU [26]. Enfin, d'autres exemples et développements intéressants dus à divers auteurs, notamment SIMMS, BLATTNER, KOSTANT, ELHADAD, SOURIAU, WEINSTEIN, GUILLEMIN, GAWEDZKI, ... se trouvent dans les volumes des deux colloques de Rome et d'Aix en Provence, cités en références ([16] et [17]).

BIBLIOGRAPHIE

Les références [1] à [11] correspondent aux questions exposées ici. Les référen [12] à [26], qui concernent des développements débordant le présent exposé, sont signalées au lecteur désireux d'approfondir l'étude du sujet, et de se mettre au courant des contributions recentes.

[1] GODBILLON (C.). - Géométrie différentielle et mécanique analytique. - Paris, Hermann, 1969 (Collection "Méthodes". Mathématiques).

[2] MACKEY (G. W.). - The mathematical foundations of quantum mechanics. - New York, W. A. Benjamin, 1963 (The mathematical Physics Monographs Series).

[3] KOSTANT (B.). - Quantization and unitary representation. Part I : Prequantization, "Lectures in modern analysis and applications, III",p. 87-207. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 170).

[4] SOURIAU (J.-M.). - Structure des systèmes dynamiques. - Paris, Dunod, 1970 (Collection Dunod Université. Département mathématique).

[5] KIRILLOV (A.). - Eléments de la théorie des représentations. - Moscou, Editions MIR, 1974.

[6] BLATTNER (R. J.). - Quantization and representation theory, "Harmonic analysis on homogeneous spaces", p. 145-165. - Providence, American mathematical Society, 1973 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 26).

[7] GUILLEMIN (V.) and STERNBERG (S.). - Manuscrit du chapitre 5 de "Differential operators on manifolds and symplectic geometry" (à paraître).

[8] SIMMS (D. J.). - Bohr-Sommerfeld orbits and quantizable symplectic manifolds, Proc. Camb. Phil. Soc., t. 73, 1973, p. 489-491.

[9] LANDAU (L.) et LIFCHITZ (E.). - Mécanique quantique. 2e édition. - Moscou, Editions MIR, 1967.

[10] BELLAÏCHE (A.). - Exposés au séminaire de Géométrie symplectique (Mlle Libermann), 1976, Université de Paris-7.

[11] RENOUARD (P.). - Variétés symplectiques et quantification, Thèse, Université Paris-Sud, Orsay, 1969.

***

[12] MASLOV (V. P.). - Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Traduit par J. Lascoux et R. Seneor. - Paris, Dunod-Gauthier-Villars, 1972 (Etudes mathématiques).

[13] ARNOL'D (V. I.). - Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, "Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, par V. P. Maslov", Complément I, p. 341-361. - Paris, Gauthier-Villars, 1972 (Etudes mathématiques).

[14] LERAY (J.). - Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du traité de V. P. Maslov), "Convegno internazionale metodi valutativi nelle fisica matematica", Academia nazionale dei Lincei [1972. Roma].

[15] LERAY (J.). - Solutions asymptotiques et groupe symplectique, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1973/74, fascicule III, 25 p.

[16] LERAY (J.). - Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov, "Geometria simplettica e fisica matematica", [1973. Roma], p. 33-51. - London, New York, Academic Press, 1974 (Symposia mathematica, 14).

[17] LERAY (J.). - Solutions asymptotiques et physique mathématique, "Colloques internationaux du CNRS, n° 237 : Géométrie symplectique et physique mathématique [1974. Aix en Provence]", p. 253-275. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1975.

[18] SOURIAU (J.-M.). - Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications (Preprint).

[19] DAZORD (P.). - La classe de Maslov-Arnold, suivi de : L'opérateur canonique de Maslov, Séminaire de Géométrie, Université Claude Bernard [Lyon-I], 1975/76.

[20] DOUADY (A.). - Classe de Maslov, Exposé au Séminaire sur le fibré cotangent, Orsay, 1976.

[21] DEMAZURE (M.). - Classe de Maslov, II, Exposé au Séminaire sur le fibré cotangent, Orsay, 1976.

[22] HÖRMANDER (L.). - Fourier integral operators, Part I., Acta Math., Uppsala, t. 127, 1971, p. 79-183.

[23] DUISTERMAAT (J. J.) and HÖRMANDER (L.). - Fourier integral operators, Part II., Acta Math., Uppsala, t. 128, 1972, p. 183-269.

[24] VOROS (A.). - The WKB-Maslov method for nonseparable systems, "Colloques internationaux du CNRS, n° 237 : Géométrie symplectique et physique mathématique [1974. Aix en Provence], p. 277-287. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1975.

[25] CRUMEYROLLE (A.). - Algèbres de Clifford symplectiques, suivi de : Revêtements spinoriels du groupe symplectique et indice de Maslov, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1975/76 (à paraître), et Séminaire de Géométrie différentielle (Mlle Libermann), Université de Paris-7, 1975/76.

[26] TIMBEAU (J.). - Quantification des systèmes sur les variétés pseudoriemanniennes, Thèse de 3e cycle, Toulouse, 1976.

Charles MARLE
27 avenue du 11 novembre
92190 MEUDON