Séminaire Paul Krée

Peter Sjögren

Un contre-exemple pour le noyau reproduisant de la mesure gaussienne dans le plan complexe

Séminaire Paul Krée, tome 2 (1975-1976), exp. n° 10, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1975-1976__2__A10_0>

© Séminaire Paul Krée
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Paul Krée » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire Paul KRÉE
(Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie)
2e année, 1975/76, n° 10, 2 p.

UN CONTRE-EXEMPLE POUR LE NOYAU REPRODUISANT DE LA MESURE GAUSSIENNE DANS LE PLAN COMPLEXE

par Peter SJÖGREN

Dans le plan complexe, nous considérerons la mesure gaussienne

$$d\nu(z) = \pi^{-1} \exp(-|z|^2)\, dx\, dy \ , \quad z = x + iy \ .$$

Soit F^p , $0 < p < \infty$, l'espace des fonctions entières appartenant à L^p_ν , muni de la quasi-norme induite par L^p_ν . On sait que le noyau reproduisant de ν est

$$\exp(w\bar{z}) \ ,$$

au sens que la transformation

$$Tf(w) = \int \exp(w\bar{z})\, f(z)\, d\nu(z)$$

est l'identité sur chaque F^p , $p > 1$. Si $f \in L^p_\nu$, $p > 1$, la fonction Tf est entière, et à l'aide de l'inégalité de Hölder, on montre que

$$Tf(w) = O(\exp(p' |w|^2/4)) \ , \quad w \to \infty \ ,$$

et donc que $Tf \in L^{4/p'}_{\nu,\text{faible}}$. Ici $p' = p/(p-1)$. Nous allons démontrer que l'image TL^p_ν n'est contenu dans aucun L^q_ν avec $q > 4/p'$. Comme corollaire, nous verrons que $F^{p'}$ n'est pas le dual de F^p si $1 < p < \infty$ et $p \neq 2$. Ce dernier résultat subsiste en dimension quelconque, finie ou infinie, si on définit F^p à l'aide de la (pro-)mesure gaussienne.

THÉORÈME. - <u>Soient</u> $1 < p \leq \infty$ <u>et</u> $q > 4/p'$. <u>Alors il existe une fonction</u> $f \in L^q_\nu$ <u>telle que</u> $Tf \notin L^q_\nu$.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. <u>Le dual de</u> F^p <u>n'est pas</u> $F^{p'}$, <u>au sens suivant : Il existe des fonctionnelles linéaires et continues sur</u> F^p <u>qui n'admettent pas la représentation de la forme</u> $f \to \int f\bar{g}\, d\nu$ <u>avec</u> $g \in F^{p'}$.

<u>Démonstration du théorème</u>. - Avec $0 < b \leq 1$, on pose

$$f(z) = \chi \exp((1-b)\, |z|^2) \ ,$$

où χ est la fonction caractéristique du demi-plan $\{x > 0\}$. Après quelques calculs élémentaires, on trouve

$$Tf(w) = (\pi b)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma_w} \exp(-bz^2)\, dz \ ,$$

où Γ_w est la courbe $\tau \to \tau - w/2b$, $\tau \geq 0$. Notant $w = s + it$, on a donc

$$\partial Tf(w)/\partial s = (4\pi b^3)^{-\frac{1}{2}} \exp(-w/4b) \ .$$

Si $t > 1$ et $|s| < b/t$, il suit

$$\operatorname{Re} \partial T f(w)/\partial s \geqslant c_1 \exp(t^2/4b) .$$

Les constantes $c_i > 0$, $i = 1 , 2 , 3$, ne dépendent que de b . Mais alors on a, pour chaque $t > 1$,

$$|\operatorname{Re} Tf(s + it)| \geqslant c_2 t^{-1} \exp(t^2/4b)$$

dans au moins la moitié de l'intervalle $|s| < b/t$. Par conséquent, $Tf \notin L^q_\nu$ pour $q > 4b$. Puisque $f \in L^p_\nu$ pour $p < 1/(1 - b)$, et $f \in L^\infty_\nu$ pour $b = 1$, la démonstration est terminée.

<u>Démonstration du corollaire</u>. – Toute fonction $g \in L^{p'}_\nu$ définit une fonctionnelle continue $f \to \int f\bar{g}\, d\nu$ sur F^p . En supposant que $F^{p'}$ soit le dual de F^p , on déduit l'existence d'une $h \in F^{p'}$ telle que

$$\int f\bar{g}\, d\nu = \int f\bar{h}\, d\nu , \quad f \in F^p .$$

Choisissant $f(z) = e^{\overline{w}z}$ pour w complexe quelconque, on trouve $h = Tg$. Il en résulte que T applique L^p_ν dans F^p . Mais ceci est en contradiction avec le théorème, car $p > 4/p'$ dès que $p \neq 2$. Le corollaire est démontré.

<u>Remarque</u>. - Puisque F^2 est un espace de Hilbert, et donc son propre dual, la démonstration du corollaire prouve que T applique L^2_ν dans F^2 . Par contre, pour $1 < p \leqslant 2/\sqrt{3}$, T n'applique pas L^p_ν dans $F^{4/p'}$, comme on peut le montrer en considérant la fonction

$$f(z) = \chi(1 + y^2)^{-\frac{1}{2}p} (\log(2 + y^2))^{-\varepsilon-1/p} \exp(|z|^2/p) .$$

Ici $\varepsilon > 0$ est petit, et χ est la fonction caractéristique de la bande

$$\{0 < x < 10\, p'\} .$$

Pour les autres valeurs de p , nous ne savons pas si T applique L^p_ν dans $F^{4/p'}$.

Peter SJÖGREN
Department of Mathematics
University of Uppsala
Sysslomansg. 8
S-75223 UPPSALA (Suède)