Paul Krée

Transformation d'une promesure de probabilité en une vraie mesure

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 5, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A6_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 5, 10 p.

TRANSFORMATION D'UNE PROMESURE DE PROBABILITÉ EN UNE VRAIE MESURE

par Paul KRÉE

0. Introduction.

Soit (X , U) un couple d'espaces vectoriels (e. v.) réels en dualité séparante, et soit R un processus linéaire basé sur U, définissant une probabilité cylindrique μ sur X. Soit (Y , V) un autre couple d'e. v. en dualité séparante, et soit ℓ une application faiblement continue de X dans Y. Soit $\mathcal{T}'$ une tribu sur Y contenant l'algèbre de Boole des cylindres de Y. Considérons les problèmes suivants.

(0.1) Problème 1 : A quelles conditions (sur ℓ, X, Y, $\mathcal{T}'$), $\ell(\mu)$ définit-elle une vraie probabilité sur $(Y , \mathcal{T}')$?

(0.2) Problème 2 : A quelles conditions le processus $S = R \circ \ell'$ est-il décomposé par une variable aléatoire (v. a.) λ à valeurs dans l'espace mesurable $(Y , \mathcal{T}')$?

Naturellement si la variable aléatoire λ décompose S, alors λ définit une probabilité sur $\mathcal{T}'$, cette probabilité étant la loi de λ. Le premier problème concerne les classes d'isonomie de processus linéaires. Dans le cas particulier où $\ell(\mu)$ définit une probabilité de Radon sur (Y , θ'), θ' étant une certaine topologie sur Y, L. SCHWARTZ dit que ℓ est "radonifiante". Le deuxième problème concerne les processus linéaires. Dans le cas particulier où l'espace probabilisé $(\Omega , \mathcal{T} , P)$ est défini par une probabilité de Radon P sur un espace topologique Ω, et où λ est P-Lusin mesurable, L. SCHWARTZ dit que ℓ est "décomposante".

Ces problèmes sont très importants. De très nombreux points de vue peuvent être considérés pour leur résolution. Nous allons évoquer ces points de vue en faisant un bref rappel historique.

WIENER a démontré que le mouvement brownien sur $\underset{\sim}{R}$ peut être défini à l'aide d'une mesure, dite mesure de Wiener, sur l'espace des fonctions continues sur $\underset{\sim}{R}$. En termes de probabilités cylindriques, cela signifie que l'injection ℓ de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ transforme la probabilité cylindrique gaussienne canonique ν sur ${}_0H^1(I)$ en une vraie probabilité $\ell(\nu)$ sur $\mathcal{C}^0(I)$: c'est la mesure de Wiener. Suite à une question de GEL'FAND, SAZANOV et MINLOS ont donné une réponse affirmative au problème 1 dans le cas suivant : X et Y hilbertiens, ℓ de Hilbert-Schmidt, R continu. Puis ils en déduisent que toute probabilité cylindrique continue sur le dual d'un espace nucléaire est une vraie probabilité [1]. Cette théorie hilbertienne ne suffit pas dans les applications ; par exemple, elle ne permet pas de montrer l'existence de la mesure de Wiener. Leonard GROSS a fait une théorie donnant une réponse à (0.1) dans le cas où μ est la promesure normale canonique sur l'espace de Hilbert X , Y étant un espace de Banach, ℓ étant convenable. La considération de ce cas particulier est justifiée, vu l'importance considérable de la promesure normale canonique, L. GROSS appelle le triplet (X , ℓ , Y) un triplet de Wiener.

L. SCHWARTZ a utilisé la théorie des applications p-sommantes de Pietsch pour donner une réponse affirmative au problème 1 dans le cas où μ est une promesure de type $p > 0$, ℓ est p-sommante, X a la propriété d'approximation métrique, Y est réflexif. L. SCHWARTZ a aussi affaibli ces hypothèses, et il a prolongé ses résultats au cas où $p = 0$. Puis il en déduit une réponse au problème 2 en utilisant un théorème de Prokhorov (voir [7], exposés 1 et 13). Puis il a étudié de nombreux cas concrets (applications diagonales entre espaces de suites, injections entre espaces de Sobolev) en donnant des conditions suffisantes pour que ces applications soient p-radonifiantes. C'est cette dernière théorie que nous allons évoquer ici, en dégageant quelques théorèmes qui nous semblent importants.

1. Applications p-sommantes.

(1.3) DÉFINITION. - Soient X et Y deux espaces de Banach, $p > 0$, et ℓ une application linéaire continue de X dans Y . On dit que u est p-sommante s'il existe une constante C (positive finie) telle que :

$$(1.3.1) \quad \forall\ n\ ,\ x_1 \ldots x_n \in X\ ,\ \sum_{i=1}^n \|\ell(x_i)\|^p \leq C^p \sup_{\|x'\|\leq 1}(\Sum |(x_i , x')|^p)\ .$$

(1.4) Remarques.

(a) Il suffit que l'on ait cette inégalité pour des x_i contenus dans une partie dense de X ;

(b) Les applications p-sommantes de X dans Y forment un e. v., noté $\pi_p(X , Y)$. L' inf des constantes C , telles que l'on ait (1.3.1), est noté $\pi_p(\ell)$. L'application $\ell \longrightarrow \pi_p(\ell)$ est une norme sur $\pi_p(X , Y)$.

(c) Supposons que l'on ait quatre espacesde Banach et trois applications linéaires continues

$$Z \xrightarrow{m} X \xrightarrow{\ell} Y \xrightarrow{q} P\ .$$

Si ℓ est p-sommante, alors $q \circ \ell \circ m$ est aussi p-sommante, et l'on a :

$$\pi_p(q \circ \ell \circ m) \leq \|m\| . \pi_p(\ell) . \|q\|\ .$$

En effet, si $D = (\pi_p(\ell))^p$,

$$\Sigma \|q \circ \ell(m(z_i))\|^p \leq \|q\|^p\ \Sigma \|\ell(m(z_i))\|^p \leq \|q\|^p . D . \sup \Sigma_{\|x'\|\leq 1} |(mz_i , x')|^p\ .$$

Or

$$(mz_i \,,\, x') = (z_i \,,\, m'(x')) \quad \text{et} \quad \|m' \, x'\| \leqslant \|m\| \, \|x'\| \,.$$

D'où

$$\Sigma \, \|q \circ \ell \circ m(z_i)\|^p \leqslant \|q\|^p . D . \|m\|^p \sup_{\|z'\| \leq 1} \Sigma \, |(z_i \,,\, z')|^p \,.$$

(1.5) <u>Exemples d'applications</u> p-<u>sommantes</u>.

(a) Soit m une mesure de probabilité de Radon sur l'espace compact K, et soit $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K muni de la norme du sup. Alors, pour tout $p \geqslant 1$, l'injection de $\mathcal{C}(K)$ dans $L^p_m(K)$ est p-sommante.

En effet :

$$\Sigma \, \|\varphi_i\|^p = \Sigma \int |\varphi_i(t)|^p \, dm(t)$$

$$\sup_t \Sigma \, |\varphi_i(\delta_t)|^p < \sup_{\|n\| \leq 1} \Sigma \, |(\varphi_i \,,\, n)|^p \,.$$

(b) L'opérateur $(\alpha \,.) : \ell^\infty \longrightarrow \ell^p$, de multiplication par une suite $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_p \dots)$ de ℓ^p, est p-sommante si $1 \leqslant p < +\infty$.

En effet, notons m la mesure sur $\underset{\sim}{N}$ donnant la masse 1 à chaque point, et ν la mesure sur $\underset{\sim}{N}$ affectant la masse $|\alpha_n|^p (\Sigma \, |\alpha_n|^p)^{-1}$ au point n. On décompose $(\alpha \,.)$ en le produit de trois applications ;

$$\ell^\infty \xrightarrow{\text{Id}} \ell^\infty_\nu \xrightarrow{\text{Id}} \ell^p_\nu \xrightarrow{(\alpha \,.)} \ell^p$$

$$(x_1, x_2 \dots) \longrightarrow (x_1, x_2 \dots) \longrightarrow (x_1, x_2 \dots) \longrightarrow (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2 \dots) \,.$$

Les deux applications extrêmes sont continues ; on démontre comme au point (a) que l'application du milieu est p-sommante. Vu (1.4.c), l'application composée est p-sommante.

(c) Toute application continue du Banach X dans le Banach Y admettant une factorisation,

$$X \xrightarrow{\alpha} \ell^\infty \xrightarrow{(a \,.)} \ell^p \xrightarrow{\beta} Y \,,$$

où α et β sont continues, $(a \,.)$ étant l'opérateur de multiplication par une suite de ℓ^p, est p-sommante si $p \geqslant 1$.

Ceci résulte de (b) et de (1.4.c). En particulier, tout opérateur de Hilbert-Schmidt est 2-sommant. Tout opérateur nucléaire entre espaces de Banach, est 1-sommant. La remarque suivante est essentielle pour l'utilisation des opérateurs p-sommants pour étudier la transformation linéaire d'une probabilité cylindrique en une vraie probabilité.

(1.6) <u>Remarque</u> : Soit $\ell \in \mathfrak{L}(X \,,\, Y)$, X et Y étant des espaces de Banach. Alors, pour que ℓ soit p-sommante, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour toute mesure positive μ sur X à support fini,

(1.6.1) $$\int_Y \|y\|^p \, d\ell(\mu) \leqslant C^p \sup_{\|\xi\| \leq 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \, d\xi(\mu) \,..$$

En effet, soit

$$\mu = \Sigma \lambda_i \delta_{x_i} ; \quad \lambda_i \geq 0 ; \quad \Sigma \lambda_i = 1 .$$

Alors

$$\int \|y\|^p \, d\ell(\mu) = \int \|y\|^p \, d(\Sigma_i \lambda_i \delta_{\ell(x_i)}) = \Sigma_i \lambda_i \int \|y\|^p \, d\delta_{\ell(x_i)}$$
$$= \Sigma \lambda_i \|\ell(x_i)\|^p = \Sigma \|\ell(\lambda_i^{1/p} x_i)\|^p ,$$

et

$$\int |t|^p \, d\xi(\mu) = \int |t|^p \, d(\Sigma \lambda_i \delta_{\xi(x_i)}) = \Sigma \lambda_i |(\xi, x_i)|^p = \Sigma |(\xi, \lambda_i^{1/p} x_i)|^p .$$

On voit donc que l'inégalité (1.6.1) est équivalente à

$$\Sigma \|\ell(\lambda_i^{1/p} x_i)\|^p \leq C^p \sup \Sigma |(\xi , \lambda_i^{1/p} x_i)|^p ,$$

c'est-à-dire à l'inégalité (1.3.1).

(1.7) THÉORÈME (Existence d'une mesure de Pietsch). - Soit $\ell \in \mathcal{L}(X , Y)$, X et Y étant deux espaces de Banach ; soit $p > 0$. Alors, pour que ℓ soit p-sommante, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ et une probabilité de Radon m sur la boule unité B de X' faible, telle que

$$(1.7.1) \qquad \forall x \in X , \qquad \|\ell(x)\| \leq C(\int |(x , \xi)|^p \, dm(\xi))^{1/p} .$$

De plus, l' inf des C , tels que l'on ait (1.7.1), est égal à $\pi_p(\ell)$.

Preuve.

(a) La condition est suffisante, car

$$\Sigma \|\ell(x_i)\|^p \leq D^p \int \Sigma |(x_i , \xi)|^p \, dm(\xi) \leq D^p \sup \Sigma |(x_i , \xi)|^p .$$

(b) Pour montrer que la condition est nécessaire, nous prenons $\ell \in \pi_p(X , Y)$, et nous cherchons m vérifiant (1.7.1) sous forme d'un élément du dual de l'espace $\mathcal{C}(B)$ des fonctions continues bornées sur l'espace compact B . Soit $x=(x_1 \ldots x_n)$, une suite finie d'éléments de X tels que tous les $\ell(x_i)$ soient non nuls. A une telle suite, on associe l'élément suivant φ_x de $\mathcal{C}(B)$.

$$B \longrightarrow \underset{\sim}{R}$$
$$\xi \longmapsto \Sigma \|\ell(x_n)\|^p - (\pi_p(\ell))^p \, \Sigma |(x_n , \xi)|^p .$$

Lorsque x varie, ces fonctions forment un cône convexe Γ de $\mathcal{C}(B)$. Ce cône Γ est formé de fonctions atteignant un minimum ≤ 0 , donc il est disjoint du cône convexe ouvert C^+ formé par les fonctions continues strictement positives sur B . Vu le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure m' sur $\mathcal{C}(B)$ qui est positive sur C^+ et qui est négative sur Γ . Donc m' est une mesure positive. Divisant m' par sa masse, on obtient une probabilité m sur B telle que :

$$\forall N , \ \forall x_1 \ldots x_N , \qquad \Sigma_{n=1}^{N} \|\ell(x_n)\|^p \leq (\pi_p(\ell))^p \, \Sigma \int |(x_n, \xi)|^p \, dm(\xi) ,$$

d'où l'inégalité voulue en prenant $N = 1$.

(1.8) COROLLAIRE 1. - *Toute application* p-*sommante est forcément* q-*sommante si* $q > p$.

En effet, vu l'inégalité de Hölder, on a, avec $r = q/p$ et $(1/r) + (1/r') = 1$,

$$\int |(x\,,\,\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \left(\int |x\,,\,\xi)|^{p(q/p)}\right)^{p/q} \left(\int dm(\xi)\right)^{1/r'}$$

d'où

$$|u(x)| \leq \left(\int |(x\,,\,\xi)|^p \, dm(\xi)\right)^{1/p} \leq C\left(\int |(x\,,\,\xi)|^q \, dm(\xi)\right)^{1/q} .$$

(1.9) COROLLAIRE 2 (*Théorème de factorisation de Pietsch*). - *Soit* ℓ *une application* p-*sommante du Banach* X *dans le Banach* Y. *Soit* m *la mesure de Pietsch sur la boule unité* B *du dual faible de* X. *Alors on a un diagramme commutatif*

(1.9.1)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v"] \arrow[drr, "u_1"'] & \mathcal{C}^0(B) \arrow[r, hook, "j"] & L^p_m(B) \\ & & S \arrow[u, hook, "k"'] \arrow[r, "u_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

où j *est l'injection canonique de* $\mathcal{C}^0(B)$ *dans* $L^p_m(B)$,

où v *est l'application* $x \longmapsto \psi_x$ *avec* $\psi_x(\xi) = (x\,,\,\xi)$,

où S *est le sous-espace fermé de* $L^p_m(B)$, *engendré par les fonctions* $\xi \longmapsto (x\,,\,\xi)$, *et* k *son injection canonique dans* $L^p_m(B)$,

où u_2 *est telle que* $u_2(\psi_x) = u(x)$ *pour tout* x.

Notons que $u_2(\psi_x)$ est défini d'après l'inégalité (1.7.1). Cette même inégalité montre que u_2, défini comme indiqué sur le sous-espace de L^p engendré par les ψ_x, est continue à valeurs dans Y ; donc u_2 est défini sur S par prolongement continu.

(1.10) *Remarque.*

(a) On ne peut pas dire que toute application p-sommante se factorise à travers une injection de $\mathcal{C}^0$ dans L^p, car on ne sait pas en général prolonger u_2, définie sur S, en un opérateur continu de L^p dans Y.

(b) Ce corollaire 2 montre cependant que l'injection de $\mathcal{C}^0$ dans L^p est l'exemple typique d'application p-sommante.

2. Lemmes d'approximation.

(2.11) LEMME. - *Soit* R_i *un processus linéaire de type* (≥ 1), *basé sur le dual d'un espace de Banach* X, *et décomposé par une v. a.* Φ_i *à valeurs dans un sous-espace vectoriel* $\tilde{X}_i$ *de dimension finie de* X. *On suppose que* $\|R_i\|^*_p \leq A$. *Alors il existe une suite* Φ^n_i *de v. a. étagées* $\Omega \longrightarrow \tilde{X}_i$ *telle que les processus*

$R_i^n = (\Phi_i^n\,,\,.)$ vérifient

$$\|R^n\|_p^* \leq A$$
$$\|R_i^n - R_i\|_p^* \leq (2A)/n\ .$$

Démonstration. - Comme Φ_i est à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de X , on a $\Phi_i \in L^p(\Omega\,,\,X)$. On approche Φ_i par une fonction étagée Φ_i^n telle que

$$(\int |\Phi_i - \Phi_i'^n|^p\ dP)^{1/p} \leq A/n\ .$$

On pose $\Phi^n = \Phi_i'^n/(1 + (1/n))$, et l'on introduit les processus linéaires

$$R_i'^n = (\Phi_i'^n\,,\,.) \quad \text{et} \quad R_i^n = R_i'^n/(1 + (1/n))\ .$$

On a

$$\|R_i^n\|_p^* = \frac{1}{1+(1/n)}\ \|R_i'^n\|_p^* \leq \frac{1}{1+(1/n)}(\|R_i'^n - R_i\|_p^* + \|R_i\|_p^*) \leq \frac{1}{1+(1/n)}((A/n)+A) = A$$

et

$$\|R_i^n - R_i\|_p^* \leq \|R_i^n - R_i'^n\|_p^* + \|R_i'^n - R_i\|_p^*$$
$$\frac{1}{n}\,\|R_i^n\|_p^* + \frac{A}{n} = (2A)/n\ .$$

(2.12) LEMME. - Soit X un espace de Banach tel que le dual $X' = U$ ait la propriété d'approximation métrique :

Il existe une famille filtrée $(\ell_j)_{j\in J}$ d'opérateurs de rang fini de U tels que

$$\sup \|\ell_j\| \leq 1\ ,$$

pour tout u de U

$$\ell_j(u) \longrightarrow u\ .$$

Soit R un processus linéaire basé sur U tel que $\|R\|_p^* = A$. Alors il existe une famille filtrée (Φ_ℓ) de v. a. étagées à valeurs dans X telles que les processus $R_\ell = (\Phi_\ell\,,\,.)$ vérifient

$$\|R_\ell\|_p^* \leq A\ ,$$

pour tout u de U

$$R_\ell(u) \longrightarrow Ru \ \text{dans}\ L^p\ .$$

Démonstration : Le processus linéaire $S_j = R \circ \ell_j$ est représenté par une v. a. à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de X . En effet, la restriction R_j de R à U_j étant décomposée par une v. a. p_j à valeurs dans $X_j = X/U_j^\perp$, il en résulte que le processus $R \circ \ell_j$ est décomposé par la v. a. $\ell_j' \circ p_j$. Vu le lemme, il existe une suite $(R_j^n)_n$ de processus linéaires décomposés par des v. a. étagées et

$$\sup \|R_j^n\|_p^* < \varepsilon$$
$$\|R_j^n - S_j\|_p^* \leq (2A)/n\ .$$

Il nous suffit alors de montrer que, pour tout $u \in U$, $(R_j^n u)_{jn}$ tend vers R_u dans L^p selon le filtre imagé du filtre produit sur $J \times N$. Ceci résulte de la convergence de $(R_j^n u)_n$ vers $S_j u$, cette convergence étant uniforme par rapport à j .

3. Un théorème typique.

(3.13) THÉORÈME. - Soient X et Y deux espaces de Banach, et $\ell \in \pi_p(X , Y)$ avec $1 < p < \infty$. On suppose que X' a la propriété d'approximation métrique. Soit R un processus linéaire de type p basé sur X' . Alors $S = R \circ \ell'$ est décomposé par une variable aléatoire ψ d'ordre p à valeurs dans Y , et

$$(3.13.1) \qquad (\int |\psi|^p \, dP)^{1/p} \leqslant \pi^p(\ell).\|R\|_p^* .$$

Démonstration : On note d'abord que le théorème (3.13) est évident si R est décomposé par une v. a. étagée λ à valeurs dans X : S est alors décomposée par $\ell \circ \lambda$, et (3.13.1) résulte de (1.6.1). Dans le cas général, vu le lemme d'approximation (2.12), il existe un ensemble d'indices I muni d'un filtre F , et une famille (R_i) de processus linéaires décomposés par des v. a. étagées Φ_i avec

$$\|R_i\|_p^* \leqslant \|R\|_p^*$$
$$(R_i \, u)_i \longrightarrow Ru \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega) .$$

Alors les v. a. $\psi_i = \ell \circ \Phi_i$ vérifient

$$(\int |\psi_i|^p \, dP)^{1/p} \leqslant \pi^p(\ell).\|R_i\|_p^* \leqslant \pi_p(\ell).\|R\|_p^* .$$

Elles décrivent donc un borné de $L^p(\Omega , Y)$.

(a) Si Y est réflexif, la boule unité de $L^p(\Omega , Y)$ est faiblement compacte. Donc il existe un filtre plus fin F' sur I , et ψ dans $L^p(\Omega , Y)$, tel que

(1.13.2) $\quad \forall\ v \in V = Y'$, $(\psi_i , v) \to (\psi , v)$ selon F' dans $L^p(\Omega)$ faible.

Or les processus $R_i \circ \ell' = S_i$ sont tels que, pour tout v de V ,

$$(1.13.3) \qquad (S_i , v) = (\psi_i , v) = R_i(\ell' v) \longrightarrow R(\ell' v) = Sv$$

suivant F dans $L^p(\Omega)$ fort. En comparant (1.13.2) et (1.13.3), on voit que $S(v) = (\psi , v)$, et S est décomposé par ψ .

(b) Dans le cas où Y n'est pas réflexif, on utilise la factorisation de Pietsch (1.9.1) pour l'application p-sommante ℓ . Comme le sous-espace S de $\mathcal{C}^0(B)$ est réflexif, on peut appliquer ce qui vient d'être démontré à l'application $u_2 \circ j$. Donc $R_2 = Ru_2' \, j'$ est décomposé par une v. a. ψ_2 à valeurs dans S . Il en résulte que $R \circ \ell' = R_1 \circ u_1'$ est décomposé par la v. a. $u_1 \circ \psi_2$.

(3.14) Applications.

(a) Un opérateur de Hilbert-Schmidt est 2-sommant. Un tel opérateur décompose donc tout processus linéaire de la classe d'isonomie de la promesure normale canonique.

(b) Le théorème (3.13) permet de montrer l'existence de la mesure de Wiener. A cet effet, on introduit :

- pour tout réel α , l'opérateur G_α de $\mathcal{S}'(\underset{\sim}{R})$ de convolution par la distribution G_α de T. F.

$$G_\alpha(\xi) = (1 + \xi^2)^{-\alpha/2}$$

[Rappel : s réel, et G_α est une isométrie $H^s(\underset{\sim}{R}) \longrightarrow H^{s+\alpha}(\underset{\sim}{R})$] ;

- l'opérateur $(1 + x^2)^{1/p}$ de multiplication par la fonction $(1 + x^2)^{1/p}$;

- la mesure de probabilité ϖ sur $\underset{\sim}{R}$ telle que $d\varpi(t) = dt/\pi(1 + t^2)$;

- un opérateur d'extension $e : H^1(I) \longrightarrow H^1(\underset{\sim}{R})$ avec $I = [0 , 1]$;

- l'opérateur r de restriction à I des distributions définies sur $\underset{\sim}{R}$.

On rappelle que G_α est une isométrie de $L^p(\underset{\sim}{R})$ sur l'espace des potentiels de Bessel $L^{p,\alpha}(\underset{\sim}{R})$ et que, d'après le lemme de Sobolev, on a une injection continue de $L^{p,\alpha}(\underset{\sim}{R})$ dans $\mathcal{C}^0_b(\underset{\sim}{R})$ si $\alpha > 1/p$.

Dans ces conditions, on factorise de la manière suivante l'injection de ${}_0H^1(J)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$:

$$
\begin{aligned}
{}_0H^1(I) \hookrightarrow H^1(I) \xrightarrow{e} H^1(R) \xrightarrow{G_{(-1/2)+\varepsilon}} H^{(1/2)+\varepsilon}(\underset{\sim}{R}) \\
\xrightarrow{(1 + x^2)^{1/p}} \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}) \hookrightarrow L^p_\varpi(\underset{\sim}{R}) \xrightarrow{(1 + t^2)^{-1/p}} L^p(\underset{\sim}{R}) \\
\xrightarrow{G_{(1/2)-\varepsilon}} L^{p,(1/2)-\varepsilon}(\underset{\sim}{R}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R}) \xrightarrow{r} \mathcal{C}^0(I) .
\end{aligned}
$$

Comme la promesure gaussienne ν est de type p pour tout $p > 0$, on peut réaliser la condition $\frac{1}{2} - \varepsilon > \frac{1}{p}$ pour tout ε tel que $0 < \varepsilon < 1$. L'injection de $\mathcal{C}^0(\underset{\sim}{R})$ dans $L^p_\varpi(\underset{\sim}{R})$ est p-sommante d'après (1.4.a). Vu (1.4.c), il résulte que l'injection k de ${}_0H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(I)$ est p-sommante. Vu le théorème (3.13), tout processus linéaire de la classe d'isonomie de ν donne, par composition avec k', un processus décomposé par une v. a. à valeurs dans $\mathcal{C}^0(I)$. La loi de cette v. a. est la mesure de Wiener.

(3.15) <u>Remarque</u>.

(a) Le lemme de Sobolev donne aussi une injection continue de $L^{p,\alpha}(\underset{\sim}{R})$ dans l'espace $\mathcal{C}^\beta$ des fonctions holdériennes d'exposant β si $0 < \beta < 1$, et $\alpha > 1/p + \beta$.

Le raisonnement précédent peut donc être modifié en remplaçant $\mathcal{C}^0(I)$ par $\mathcal{C}^\beta(I)$ si $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Le raisonnement d'existence de la mesure de Wiener, classique en théorie des probabilités, est plus simple que le raisonnement précédent. L'intérêt de la présente démonstration est qu'elle s'applique à des cas beaucoup plus généraux (voir [3], [4]).

4. Un théorème de dualité.

La figure est la suivante :

$$\begin{tikzcd} & & Y & \Omega \arrow[l, "\lambda"'] \\ L^p(\Omega) & U \arrow[l, "R"'] & V \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, dotted, dash] \end{tikzcd}$$

(4.16) THÉORÈME.

(a) Soit (Y , V) un couple d'espaces de Banach en dualité, et $0 < p < \infty$. Soit S un processus linéaire de V dans $L^p(\Omega)$ qui est décomposé par une v. a. λ d'ordre p de Ω dans Y. Alors S est (Y , p)-sommante car

$$\begin{aligned} \|Sv_i\|^p &= \int \quad |(\lambda(w) , v_i)|^p \, dP(w) \\ &= \int \|\lambda(w)\|^p \, \Sigma \, \left|\left(\frac{\lambda(w)}{\|\lambda(w)\|} , v_i\right)\right|^p dP(w) \qquad (4.16.1) \\ &\leq \int \|\lambda(w)\|^p \, dP \, \sup_{\|y\|\leq 1} \, |(y,v_i)|^p = C \sup \Sigma |(y,v_i)|^p \end{aligned}$$

(b) Soit U un autre espace de Banach. Si S est obtenu en composant l'application linéaire $\alpha : V \longrightarrow U$ avec un processus linéaire R sur U de cotype p, alors α est (Y , p)-sommante.

En effet,

$$\|Sv_i\| = \|R(\alpha v_i)\| \geq C \|\alpha v_i\| .$$

En reportant cette minoration de Sv_i dans (4.16.1), on voit que α est p-sommante.

Ce théorème de L. SCHWARTZ est appelé "théorème de dualité" pour la raison suivante : Soient deux couples d'espace de Banach en dualité et deux applications linéaires continues α et β

$$\mu \text{ sur } X \xrightarrow{\beta} Y \xleftarrow{\lambda} \Omega$$

$$U \xleftarrow{\alpha} V$$

avec $\beta' = \alpha$. Supposons que l'on connaisse une probabilité cylindrique particulière μ sur X de cotype p telle que l'on sache, par exemple en appliquant le théorème (3.13) que $\beta(\mu)$ est décomposée par une v. a. d'ordre p à valeurs dans Y. Alors le théorème (4.16) montre que α est p-sommante. Par une nouvelle application du théorème (3.13), on peut déduire que l'image par α d'une probabilité cylindrique ν de type p, quelconque sur V, est une vraie probabilité sur U.

(4.17) Exemple : Soient X et Y deux espaces de Hilbert, et ℓ un opérateur de Hilbert-Schmidt de X dans Y. Soit R un processus linéaire sur X de TF : $\hat{R}(u) = \exp(-\frac{1}{2}\|u\|^2)$. Par application du théorème (3.13), $S = R\ell'$ est décomposé par une v. a. à valeurs dans Y . Comme R est de cotype p pour tout $p > 0$, le théorème de dualité montre que ℓ' est p-sommante pour tout $p > 0$. Et une nouvelle application du théorème (3.13) permet de voir que le composé d'un processus de type $p > 1$, avec un opérateur de Hilbert-Schmidt est décomposé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GEL'FAND (I. M.) et VILENKIN (N. Ja). - Les distributions. Vol. 4 : Applications à l'analyse harmonique. Traduit [du russe : Fonctions généralisées. Tome 4] par G. Rideau. - Paris, Dunod, 1967 (Collection universitaire de Mathématiques, 23).

[2] GROSS (L.). - Abstract Wiener measure and infinite dimensional potential theory, "Lectures in modern analysis and applications, II", p. 84-116. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 140).

[3] KRÉE (P.). - Equations linéaires à coefficients aléatoires, "Symposia Mathematica", Vol. 7, p. 515-546. - London, Academic Press, 1971 (Istituto nazionale di alta Matematica).

[4] KRÉE (P.). - Exemple d'utilisation de la théorie des applications radonifiantes, Séminaire Maurey-Schwartz, 1973/74, n° 9, 16 p.

[5] KWAPIEŃ (S.). - On a theorem of Laurent Schwartz and its applications to absolutely summing operators, "Proceedings of the international colloquium on nuclear spaces and ideals in operator algebras [1969. Warszawa]", Studia Math., Warszawa, t. 38, 1970, p. 193-201.

[6] PIETSCH (A.). - Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math., Warszawa, t. 28, 1967, p. 333-353.

[7] Séminaire Laurent Schwartz : Applications radonifiantes, 1969/70. - Paris, Ecole Polytechnique, 1970.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13