Paul Krée

Utilisation de limites inductives généralisées d'espaces localement convexes

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A2_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 1, 9 p.

UTILISATION DE LIMITES INDUCTIVES GÉNÉRALISÉES D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par Paul KRÉE

0. Introduction.

(0.1) Rappelons d'abord la notion classique de limite inductive d'espaces localement convexes [1].

Soit $(E_\alpha , i_{\alpha\beta} , \alpha$ et $\beta \in A)$ un système inductif d'espaces vectoriels sur le corps $\Lambda = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. Soit E la limite inductive de ce système ; l'injection canonique de E_α dans E est notée i_α . On suppose que chaque E_α est muni d'une topologie localement convexe t_α compatible avec sa structure d'espace vectoriel. Alors $t = \varinjlim t_\alpha$ est la topologie localement la plus fine sur E rendant continues les applications t_α .

On a aussi la notion de limite inductive stricte. Ces notions sont utiles dans la théorie des distributions [6] et dans la théorie des mesures de Radon sur les espaces localement compacts.

(0.2) Dans [3], GARLING a généralisé la définition ci-dessus de $\varinjlim t_\alpha$ en imposant aux applications i_α d'être seulement continues sur des parties fixées des espaces E_α . Puis dans un deuxième article [2], FREMLING, GARLING et HAYDON ont utilisé cette généralisation pour faire apparaître l'ensemble des mesures de Radon bornées sur un espace complètement régulier X comme le dual topologique de l'espace des fonctions continues bornées sur X muni d'une topologie adéquate.

Dans [5], les résultats de GARLING sont utilisés pour définir les vraies distributions sur un espace de Banach. Ces applications motivent cet exposé des résultats de GARLING.

1. Limites inductives généralisées (ou S-limites inductives).

Tous les espaces vectoriels (e. v.) considérés sont pris sur le corps $\Lambda = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$.

(1.3) DÉFINITION. - Soit $(E_\alpha , i_{\alpha\beta} , \alpha$ et $\beta \in A)$ un système inductif d'e. v. Chaque E_α est muni d'une topologie localement convexe t_α et, pour tout α , on donne une partie S_α non vide de E_α ; on pose $S = (S_\alpha)$. On note j_α la restriction de i_α à S_α . La S-limite inductive des t_α est la topologie localement convexe la plus fine t sur $E = \varinjlim E_\alpha$ qui rende continues les applications j_α .

On pose

$$t = S \varinjlim t_\alpha \ .$$

L'ensemble des topologies localement convexes sur E qui rendent continues les j_α est non vide. Il suffit alors de prendre pour t la borne supérieure de ces topologies. Donc la topologie, définie dans la définition ci-dessus, existe, et est unique.

(1.4) La topologie t a la propriété universelle usuelle des topologies limites inductives :

Si v est une application linéaire de E, dans l'espace localement convexe F, alors v est continue si, et seulement si, vj_α est continue pour tout α dans A.

Pour pouvoir développer une théorie, GARLING fait quelques hypothèses restrictives sur les S_α, ces hypothèses étant vérifiées dans l'étude des applications visées.

(1.5) Dans la suite, on suppose que :

(a) La réunion des $i_\alpha(S_\alpha)$ engendre algébriquement E ;

(b) Quels que soient α et β dans A, il existe γ dans A tel que

$$j_\alpha(S_\alpha) + j_\beta(S_\beta) \subset j_\gamma(S_\gamma) \ ;$$

(c) Si $j_\alpha(S_\alpha) \subset j_\beta(S_\beta)$, alors $j_{\alpha\beta} = j_\beta^{-1}\, j_\alpha$ est continue ;

(d) Chaque S_α est disqué, c'est-à-dire que quels que soient x et y dans S_α, quels que soient les scalaires λ et μ tels que $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$, alors

$$\lambda x + \mu y \in S_\alpha \ .$$

(1.6) On déduit de ces restrictions :

(e) $\forall\, a > 0$, $\forall\, \alpha \in A$, $\forall\, \beta \in A$; $j_\alpha(S_\alpha) \subset a j_\beta(S_\beta)$;

(f) La réunion des $j_\alpha(S_\alpha)$ est égale à E.

Notons que (e) est évidente si $a \geqslant 1$, car il suffit alors de prendre $\beta = \alpha$. Si $a < 1$, on introduit n entier tel que $n \leqslant 1/\alpha < n + 1$; puis on applique la propriété (1.5 (b)) $n + 1$ fois, avec $\alpha = \beta$.

La propriété (f) résulte des propriétés (a) et (e).

Le lemme suivant, énoncé dans A. GROTHENDIECK [4], simplifie l'étude de la continuité des applications j_α intervenant dans la définition de t. En effet, ce lemme permet de remplacer la condition de continuité de j_α par la condition plus simple de continuité à l'origine de j_α :

(1.7) LEMME. - <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces localement convexes</u>, <u>et</u> A <u>une</u>

partie convexe équilibrée de E. Soit i une application linéaire $E \longrightarrow F$ (ou une semi-norme si F est égal au corps de base $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$). Soit $j = i \restriction A$ la restriction de i à A. Alors j est uniformément continue sur A si, et seulement si, j est continue à l'origine.

Démonstration. - L'uniforme continuité entraîne évidemment la continuité en tout point. Réciproquement, supposons j continue à l'origine, et soit V un voisinage de l'origine dans F. On cherche un voisinage U de l'origine de E tel que

$$x \text{ et } y \in A \,;\; x - y \in U \Longrightarrow j(x) - j(y) \in V \,.$$

(a) Si i est linéaire, on cherche donc U tel que

$$x \text{ et } y \in A \,,\quad x - y \in U \Longrightarrow i(x - y) \in V \,.$$

Or A étant convexe équilibré, on a

$$x - y \in A - A = 2A \,.$$

Il suffit donc de trouver U tel que

$$i(2A \cap U) \subset V \,,$$

et cette condition s'écrit encore

$$i(A \cap \tfrac{1}{2} U) \subseteq \tfrac{1}{2} V \,.$$

Or l'existence de U vérifiant cette condition résulte de la continuité de j à l'origine.

(b) On fait un raisonnement analogue si i est une semi-norme, en utilisant l'inégalité

$$|j(x) - j(y)| \leqslant j(x - y) \,.$$

(1.8) La notation $\Gamma_{j\in J}(P_j)$: Soit $(P_j)_{j\in J}$ une famille de parties de l'espace vectoriel E. On note $\Gamma_{j\in J}(P_j)$ l'enveloppe disquée de la réunion des P_j.

(1.9) PROPOSITION. - La famille des parties $\Gamma_{\alpha\in A}(j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha))$, où V_α décrit la famille des t_α-voisinages disqués de l'origine de E_α, forme une base de voisinages de l'origine de E pour la topologie t.

Preuve. - La famille des parties $\Gamma_{\alpha\in A}\, j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha)$ forme une base de filtre d'ensembles disqués absorbants, puisque les V_α jouissent de la même propriété.

(a) Montrons d'abord que la famille de ces parties vérifie les axiomes d'une base de voisinages de l'origine pour une topologie localement convexe t' :

(α) Pour toute partie F_i de la famille et tout λ compris entre 0 et 1, il existe F_j contenu dans λF_i.

(β) Pour toute partie F_i de la famille, il existe F_j tel que $F_j + F_j \subset F_i$.

Prouvons (α) : On se donne $F_i = \Gamma(j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha))$.

D'après (1.6.e), il existe β tel que

$$j_\alpha(S_\alpha) \subset \lambda j_\beta(S_\beta) \subset j_\beta(S_\beta) .$$

D'après (1.5.c), étant donné un voisinage V_β de 0 dans E_β, il existe un voisinage W_α de 0 dans E tel que

$$j_\alpha(S_\alpha \cap W_\alpha) \subset j_\beta(S_\beta \cap \lambda V_\beta) .$$

Par suite, $j_\alpha(S_\alpha \cap W_\alpha) \subset \lambda j_\beta(S_\beta) \cap j_\beta(S_\beta \cap \lambda V_\beta)$.

Donc

$$j_\alpha(S_\alpha \cap W_\alpha) \subset \lambda j_\beta(S_\beta \cap V_\beta) .$$

A fortiori,

$$\Gamma_{\alpha\in A}\, j_\alpha(S_\alpha \cap W_\alpha) \subset \lambda\, \Gamma_{\alpha\in A}\, j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha) .$$

C. Q. F. D.

On démontre de même (β), en utilisant (1.5.b) au lieu de (1.6.e).

(b) Il reste à montrer que $t' = t$. Pour chaque indice α, l'application $j_\alpha : S_\alpha \longrightarrow (E , t')$ est continue de sorte que $t' \subset t$, puisque t avait été définie comme la topologie la plus fine rendant les j_α continues. Réciproquement, si V est un voisinage disqué de 0 dans (E , t) , comme j_α est continue, de S_α dans (E , t) , on peut trouver un t_α-voisinage V_α de 0 dans E_α tel que $j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha) \subset V$. Donc

$$V \supseteq \Gamma j_\alpha(S_\alpha \cap V_\alpha) ,$$

et t' est plus fine que t . Finalement, $t = t'$, et la proposition est démontrée.

(1.10) COROLLAIRE.

(a) <u>Une partie disquée</u> V <u>de</u> E <u>est un</u> t-<u>voisinage de</u> 0 <u>dans</u> E <u>si, et seulement si, pour tout</u> α , $\overset{-1}{j_\alpha}(V)$ <u>est un voisinage de</u> 0 <u>dans</u> S_α <u>pour la topologie induite par</u> t_α .

(b) <u>Une semi-norme</u> p <u>sur</u> E <u>est</u> t-<u>continue si, et seulement si, pour tout</u> α , $p \circ j_\alpha$ <u>est une semi-norme continue sur</u> (E_α , t_α) .

(1.11) <u>Remarques</u>.

(a) Soit B une partie de A telle que $(j_\beta(S_\beta))_{\beta\in B}$ soit cofinale dans $(j_\alpha(S_\alpha))_{\alpha\in A}$. Alors la topologie t , définie précédemment, coïncide avec la topologie analogue, déduite en remplaçant B par A .

(b) En particulier, si l'ensemble d'indices est dénombrable, on peut toujours choisir une suite d'indices $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(j_{\alpha_n}(S_{\alpha_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ soit cofinale dans $(j_\alpha(S_\alpha))_{\alpha\in A}$, et telle que

$$\forall\ n \in \underset{\sim}{N}\ , \qquad j_{\alpha_n}(S_n) \subsetneqq j_{\alpha_{n+1}}(S_{n+1})\ .$$

Donc, lorsqu'on aura un ensemble d'indices dénombrable, on pourra supposer $j_i(S_i) \subset j_{i+1}(S_{i+1})$.

Et même, si $(b_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est une suite de nombres positifs tous supérieurs à 1 , on peut supposer

$$b_i\ j_i(S_i) \subset j_{i+1}(S_{i+1})\ .$$

Il suffit d'utiliser (1.5.b).

2. Notion de S-limite inductive stricte.

Nous identifions dès lors chaque E_α à une partie de la limite inductive E . On sait que $j_\alpha : S_\alpha \longrightarrow E$ est continue pour tout α , ce qui signifie que la topologie induite par t sur S_α est moins fine que celle induite par t_α .

Question : Dans quels cas ces topologies coïncident-elles ?

On aimerait avoir un énoncé analogue à celui des limites inductives strictes concernant les limites inductives usuelles d'espaces localement convexes (voir, par exemple, N. BOURBAKI [1], chap. II, §2, n° 4 et 5). Naturellement, l'énoncé souhaité doit se réduire à l'énoncé classique, dans le cas particulier où $S_\alpha = E_\alpha$ pour tout α . Ceci motive le théorème suivant.

(2.12) THÉORÈME (GARLING). - <u>On se donne un système inductif dénombrable (E_n , t_n) d'espaces localement convexes. On se donne, pour tout n , une partie disquée S_n de E_n , la suite S_n étant croissante et vérifiant</u> :

(a) <u>On suppose que, pour tout n , t_n et t_{n+1} induisent la même topologie sur S_n . Alors, pour tout n , t et t_n induisent la même topologie sur S_n</u> .

(b) <u>On suppose, en plus, que, pour tout n , S_n est une partie fermée de S_{n+1}, pour la topologie induite par t_{n+1} . Alors une partie quelconque B de E est t-bornée si, et seulement si, B est contenu dans un S_n et si B est une partie t_n-bornée de E_n</u> .

Par analogie avec la terminologie usuelle, si le système S des S_n vérifie toutes les hypothèses énoncées dans ce théorème, on peut dire que t est la S-limite inductive stricte des topologies t_n relativement au système S des S_n . On notera que la preuve de ce théorème (voir [2]) est très différente de la preuve classique concernant le cas particulier des limites inductives strictes usuelles.

3. Distributions bornées sur un e. v. réel X_i de dimension finie [6].

(3.13) On utilise les résultats et les notations de L. SCHWARTZ pour la théorie des distributions ; à ceci près que les distributions intégrables de L. SCHWARTZ seront appelées distributions <u>bornées</u>.

Rapportons X_i a une base quelconque, les coordonnées du point x de X_i étant notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. L'espace $\mathcal{B}^k(X_i)$ défini dans l'introduction est muni de la norme

$$\varphi \longrightarrow \|\varphi\| = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup|(\partial/\partial x)^\alpha \varphi(x)| .$$

On peut munir $\mathcal{B}^k(X_i)$ de la topologie t_∞ associée à cette norme, ou de la topologie t_K de la convergence uniforme des $\partial^\alpha \varphi = (\partial/\partial x)^\alpha \varphi$ sur tout compact de X_i. On note B la boule unité de $\mathcal{B}^k(X_i)$. L'espace $\mathcal{D}^k(X_i)$ est le sous-espace de $\mathcal{B}^k(X_i)$ formé par les fonctions à support compact. L'espace $\mathcal{B}'^k(X_i)$ des distributions bornées d'ordre au plus k est le dual de $\mathcal{D}^k(X_i)$ muni de la topologie induite par t_∞. Soit A l'ensemble des multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de longueur $|\alpha| = \sum \alpha_j$, inférieure ou égale à k. L'application $\varphi \longrightarrow \{\partial^\alpha \varphi ; \alpha \in A\}$ identifie $\mathcal{D}^k(X_i)$ à un sous-espace topologique du produit de A exemplaires de l'espace $\mathcal{D}^0(X_i)$. Le théorème de Hahn-Banach montre que toute T de $\mathcal{B}'^k(X_i)$ s'écrit

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha \mu_\alpha , \tag{3.13.1}$$

où les μ_α sont des mesures bornées sur X_i. Cette formule montre que la forme linéaire sur $\mathcal{D}^k(X_i)$, associée à toute $T \in \mathcal{B}'^k(X_i)$, s'étend canoniquement en une forme linéiare sur $\mathcal{B}^k(X_i)$. Il suffit de poser, pour toute f de $\mathcal{B}^k(X_i)$:

$$T(f) = \lim_j (\zeta_j f) , \tag{3.13.2}$$

où (ζ_j) est une suite de fonctions plateaux $\zeta_j \in \mathcal{D}(X_i)$ qui tend vers 1 dans $(\mathcal{B}^k(X_i), t_x)$, chaque ζ_j valant 1 au voisinage de l'origine.

(3.14) LEMME.

(a) $\mathcal{B}'^k(X)$ <u>est le dual de</u> $\mathcal{B}^k(X)$ <u>muni de la topologie localement convexe la plus fine</u> t^k <u>qui coïncide avec</u> t_K <u>sur</u> B.

(b) <u>Les ensembles équicontinus</u> L <u>de formes linéaires sur</u> $(\mathcal{B}^k(X), t^k)$ <u>sont les ensembles de formes linéaires sur</u> $\mathcal{B}^k(X)$ <u>qui vérifient simultanément les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>suivantes</u> :

(i) <u>Elles sont uniformément bornées pour</u> t_∞ :

$$\sup\{|\ell(\varphi)| ; \ell \in L , \varphi \in B\} < \infty .$$

(ii) <u>Elles vérifient uniformément la condition suivante</u>, $\forall \varepsilon$, $\exists$ <u>compact</u> K <u>de</u> X_i, $\exists \eta > 0$:

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B \text{ avec } \sum \sup_{x\in K}|\partial^\alpha \varphi(x)| < \eta ; \text{ alors } |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon .$$

(c) <u>Finalement</u> (ii) <u>peut être remplacée par</u> :

(ii)' $\forall \varepsilon$, $\exists$ <u>compact</u> K <u>de</u> X_i,

$$\forall \ell \in L, \forall \varphi \in B \text{ avec } \varphi \text{ nulle sur } K ; \text{ alors } |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon .$$

Les conditions (ii) et (ii)' sont appelées "<u>conditions du type</u> (ε, K) ".

Démonstration. - Il est clair qu'un ensemble L de formes linéaires sur $\mathcal{B}^k(X_i)$ qui vérifie (i) $\cup$ (ii), vérifie aussi (i) $\cup$ (ii)'. Pour montrer la réciproque, on utilise une "technique de troncature par fonction ζ " qui sera fréquemment utilisée par la suite.

Si $\zeta \in \mathcal{D}^k(X_i)$ est égale à 1 dans un voisinage de l'origine, posons

$$\zeta_j(x) = \zeta(x/j) \quad \text{pour} \quad j = 1 , 2 \ldots$$

Notons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout j, les fonctions ζ_j et $1-\zeta_j$ sont des multiplicateurs dans $\mathcal{B}^k(X_i)$, de norme inférieure à C. Soit L un ensemble de formes linéaires vérifiant (i) $\cup$ (ii)'. Soit j tel que ζ_j vaut 1 sur K, et soit K' le support de ζ_j. Montrons que L vérifie (ii), et plus précisément :

(3.14.1)
$$\forall\, \varepsilon' , \forall\, \eta , \forall\, \ell \in L , \forall\, \varphi \in B \text{ avec } \sup_{x \in K'} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq \eta , \text{ alors } |\ell(\varphi)| \leq C(\varepsilon + \eta) .$$

En effet, $|\ell(\varphi)| \leq |\ell(\zeta\varphi)| + |\ell(1 - \zeta)\varphi)|$.

Comme $\|(1 - \zeta)\varphi\| < C$, et comme $(1 - \zeta)\varphi$ est nulle sur K, le deuxième terme est majoré par C_ε. Comme $\|C\varphi\| \leq C$, le premier terme du second membre est majoré par $C\eta \Longrightarrow C\eta$. On a donc montré (3.14.1). Ceci entraîne (ii) si l'on choisit ε et η suffisamment petits. On a donc montré (c).

La topologie t^k est une S-limite inductive stricte car elle coïncide avec la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^k(X_i)$ qui coïncide avec t_K sur B, $2B$, $3B$, ... ; et (b) résulte de (1.7).

Il reste à montrer (a), c'est-à-dire que $\mathcal{B}'^k(X)$ est l'ensemble des formes linéaires ℓ sur $\mathcal{B}^k(X)$ qui vérifient

$\sup\{|\ell(\varphi)| , \varphi \in B\} < \infty$,

$\forall\, \varepsilon , \exists\, K , \varphi \in B , \varphi$ nulle sur $K \Longrightarrow |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon$.

(3.15) EXERCICE.-Image d'une distribution par une application de classe $\mathcal{C}^\infty$: La notion de distribution bornée est très utile pour l'étude de cette image.

On considère deux ouverts $O \subset R^j$ et $U \subset R^\ell$, et une application π de classe $\mathcal{C}^\infty$ de O dans U vérifiant l'hypothèse suivante :

(3.16) Pour tout compact K de U et pour tout $j \geq 0$, la norme de $D^j \pi$ est uniformément majorée sur $\pi^{-1}(K)$. Il en est par exemple ainsi si π est linéaire.

(3.17) Définition d'une application T-propre : Soit $T \in \mathcal{D}'(O)$. L'application π est dite T-propre si, pour tout compact K de U, la restriction de T à $\pi^{-1}(K)$ est une distribution bornée.

Ceci signifie également que, pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(U)$, posant $\tilde{\zeta} = \zeta \circ \pi$, $\tilde{\zeta}T$ est une distribution bornée sur O .

(3.18) Définition de $\pi(T)$ si π est T-propre et vérifie (3.16) : Pour toute φ dans $\mathcal{D}(U)$, on pose :

$$(\pi T , \varphi) = (T , \varphi \circ \pi) .$$

On définit ainsi une distribution πT sur U dont la restriction à tout ouvert relativement compact de U est une distribution bornée.

(3.19) Propriétés de transitivité : Soient V un ouvert de R^m , et χ une a application $\mathcal{C}^\infty$ de U dans V . On suppose que π et χ vérifient l'hypothèse (3.16). Il en est de même de $\chi \circ \pi$. Soit T une distribution sur O .

(a) En général, si π est T-propre et si χ est $\pi(T)$-propre, $\chi \circ \pi$ n'est pas T-propre.

(b) Cependant si $\chi \circ \pi$ est T-propre, alors π est T-propre, χ est $\pi(T)$-propre. De plus ;

$$\chi(\pi T) = (\chi \circ \pi)(T) .$$

4. Mesures de Radon bornées sur l'e. l. c. s. réel X .

On munit $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$) de la norme

$$\varphi \longrightarrow \|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in X} |\varphi(x)| .$$

On note t_∞ (resp. t'_∞) la topologie correspondante. Soit B (resp. B') la boule unité fermée de $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$) . Soit t_K (resp. t'_K) la topologie sur $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$) de la convergence uniforme sur les parties compactes de X . Soit t (resp. t') la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^0(X)$ (resp. $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$) qui coïncide avec t_K sur B (resp. t'_K sur B') .

(4.20) LEMME. - Le dual de $(\mathcal{B}^0_{cyl}(X) , t')$ est l'ensemble des mesures de Radon sur X . Pour qu'un ensemble L de mesures de Radon sur X représente une partie équicontinue du dual de $(\mathcal{B}^0_{cyl}(X) , t')$, il faut et il suffit que L vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\sup\{|\ell(\varphi)| , \ell \in L , \varphi \in B\} < \infty$

(ii) $\forall \varepsilon$, $\exists$ compact K de X , $\exists \eta > 0$,

$$\forall \ell \in L , \forall \varphi \in B , \sup_{x\in K} |\varphi(x)| < \eta , \quad |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon .$$

On peut remplacer (i) $\cup$ (ii) par (i) $\cup$ (ii)' avec

(ii)' $\forall \varepsilon$, $\exists$ compact K de X ,

$$\forall \ell \in L , \forall \varphi \in B , \varphi \text{ nulle sur } K , \quad |\ell(\varphi)| \leq \varepsilon .$$

Evoquons la démonstration : Comme t est la topologie localement convexe la plus fine sur $\mathcal{B}^0(X)$ qui coïncide avec t_K sur B , $2B$ ... , il en résulte que t est une S-limite inductive stricte.

D'autre part $\mathcal{B}^0_{cyl}(X)$ est dense dans $(\mathcal{B}^0(X) , t)$: ceci résulte de [2] (théorème 11), ou peut être démontré directement en appliquant convenablement le théorème de Stone-Weierstrass. Comme $(\mathcal{B}^0_{cyl}(X) , t')$ est un sous-espace topologique de $(\mathcal{B}^0(X) , t)$, ces deux espaces ont même dual, et vu [2] (théorème 1), ce dual est l'ensemble $\mathfrak{M}(X)$ des mesures de Radon bornées sur X . La caractérisation (i)∪(ii) des parties équicontinues de $\mathfrak{M}(X)$ résulte de la théorie des S-limites inductives. Pour montrer que (i) ∪ (ii) équivaut à (i) ∪ (ii)', on utilise la technique de troncature déjà évoquée, mais ici les fonctions ζ sont moins évidentes car X n'est pas forcément localement compact. On peut prendre

$$(4.20.1) \qquad \zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\varphi(x)| \leqslant \eta \\ (4\eta^2 - |\varphi(x)|^2)/(3\eta^2) & \text{si } \eta \leqslant |\varphi(x)| \leqslant 2\eta \\ 0 & \text{si } |\varphi(x)| \geqslant 2\eta \end{cases} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] FREMLIN (D. H.), GARLING (D. J. H.) and HAYDON (R. G.). - Bounded measures on topological spaces, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 25, 1972, p. 115-136.

[3] GARLING (D. J. H.). - A generalized form of inductive-limit topology for vector spaces, Proc. London math. Soc., 3rd series, t. 14, 1964, p. 1-28.

[4] GROTHENDIECK (A.). - Espaces vectoriels topologiques. - Saõ Paulo, Sociedade de Matematica do Saõ Paulo, 1958.

[5] KRÉE (P.). - Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, "Linear operators and approximation, Proceedings of the conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, 1971", p. 159-174. - Basel und Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1972 (International Series of numerical Mathematics, 20).

[6] SCHWARTZ (L.). - Théorie des distributions. Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1966.

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13